Darstellungstheorie
Sommersemester 2009

Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Olaf Schnürer

Blatt 2

Abgabe: Mittwoch 13. Mai 2009

Problem 4. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale komplexe Liealgebra und V ein endlichdimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul. Zeige das folgende

Theorem: (Poincare Dualität) Sei $0 \le n \le \dim \mathfrak{g}$. Dann gibt es (in V natürliche) Isomorphismen von Vektorräumen

(a) $H^n(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_n(\mathfrak{g}, V)^*$
(b) $H^n(\mathfrak{g}, V) \cong H_{\dim \mathfrak{g} - n}(\mathfrak{g}, V \otimes (\wedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g})^*)$
(c) $H^n(\mathfrak{g}, V^*) \cong H^{\dim \mathfrak{g} - n}(\mathfrak{g}, V \otimes \wedge^{\dim \mathfrak{g}} \mathfrak{g})^*$

Problem 5. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Verifiziere explizit mit Hilfe des Koszulkomplexes das Theorem von Kostant für den trivialen $\mathfrak{g}$-Modul und den natürlichen (zweidimensionalen irreduziblen) $\mathfrak{g}$-Modul.

Problem 6. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Beschreibe explizit mit Hilfe des Koszulkomplexes die Liealgebrenkohomologie $H^k(\mathfrak{g}, V)$ für (bis auf Isomorphie) jeden irreduziblen endlichdimensionalen $\mathfrak{g}$-Modul V. (Verwende dazu die explizite Beschreibung der irreduziblen endlichdimensionalen $\mathfrak{g}$-Moduln vom letzten Semester).

Problem 7. (Wiederholung einiger Grundlagen)
Betrachte die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

(a) Beschreibe explizit die Wurzeln R, eine Wahl einer Basis von einfachen Wurzeln, und dann die Menge der positiven und negativen Wurzeln.
(b) Für $n = 3$ bestimme alle möglichen Wahlen von Basen von einfachen Wurzeln und beschreibe die entsprechende Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

(c) Beschreibe die Killingform im Falle $n = 3$.
(d) Bestimme explizit die Wurzeln, Kowurzeln und ihre Paarung im Falle $n = 3$.

Problem 8. Zeige das folgende
Theorem: (Levi-Malcev)
Jede endlichdimensionale komplexe Liealgebra L ist eine spaltende Erweiterung einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit dem Radikal $\mathcal{R}$ von L.
(Zur Erinnerung: Das Radikal von L ist das maximal auflösbare Ideal von L. Eine Liealgebra L ist *auflösbar*, falls $L^{(n)} = \{0\}$ für ein n. Hierbei ist $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L, L]$ und dann induktiv $L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$ die abgeleitete (oder derivierte) Reihe. Und L ist *halbeinfach*, falls das Radikal von L gleich $\{0\}$ ist.)

(Hinweis: Verwende Induktion über die Länge der abgeleiteten Reihe und zweite Liealgebrenkohomologie.)

Problem 9. Zeige das Lemma der Vorlesung: Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache komplexe Liealgebra, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Dann gilt:

(a) $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (U(\mathfrak{g})\mathfrak{n} + \mathfrak{n}_- U(\mathfrak{g}))$.

(b) Falls $z \in Z(U(\mathfrak{g}))$, dann ist die Projektion auf den zweiten Faktor in $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$.

Betrachte nun die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit der üblichen Basis f, h, e .
Zeige: $\Omega := \frac{1}{2}h^2 + ef + fe \in Z(U(\mathfrak{g}))$.
Berechne $\gamma'(\Omega)$ (die Projektion auf den ersten Faktor in (a)) und $\gamma(\Omega)$ (das Bild von Ω unter dem Harish-Chandra Homomorphismus).