

Exercise Sheet 13

Abgabe: Mittwoch 29. April 2009

Problem 1. Sei R ein Ring. Betrachte das folgende Diagramm in der Kategorie von R -Moduln:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & \downarrow \\
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_1 \\
 \downarrow \psi_A & & \downarrow \psi_B & & \downarrow \psi_C \\
 A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_2 \\
 \downarrow \phi_A & & \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_C \\
 A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & C_3 \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Angenommen,

- die Quadrate kommutieren,
- die Spalten sind exakt, und
- die oberste und unterste Zeile sind exakt, und
- $\beta_2\alpha_2 = 0$.

Zeige: die mittlere Zeile ist exakt.

Problem 2.

- (a) Zeige: Ist \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache komplexe Liealgebra, dann spaltet jede zentrale Erweiterung.
- (b) Zeige das 1. Whitehead Lemma: Ist \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache komplexe Liealgebra, dann ist $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$ für jede endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g} .
- (c) Zeige das 2. Whitehead Lemma (etwas aufwendiger): Ist \mathfrak{g} eine endlich-dimensionale halbeinfache komplexe Liealgebra, dann ist auch $H^2(\mathfrak{g}, V) = 0$ für jede endlichdimensionale Darstellung von \mathfrak{g} .

Problem 3. Zeige die Exaktheit des Koszulkomplexes für beliebige (d.h. nicht notwendigerweise abelsche) endlich dimensionale komplexe Liealgebren \mathfrak{g} .