Algebraische Gruppen — Catharina Stroppel
SoSe 2008 — Olaf Schnürer

# 3. Übungsblatt

Abgabetermin: Mittwoch, 23. April 2008

**Aufgabe 7.** Betrachten Sie die additive Gruppe $\mathbb{G}_a$ und die multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_m$. Bestimmen Sie alle Morphismen und Endomorphismen zwischen diesen algebraischen Gruppen.

**Aufgabe 8.** Wir betrachten die algebraische Gruppe $\mathrm{SL}(2,k)$ mit

$$k[\mathrm{SL}(2,k)] = k[T_1,T_2,T_3,T_4]/(T_1T_4 - T_2T_3 - 1).$$

Sei $A \subseteq k[\mathrm{SL}(2,k)]$ die von den $T_iT_j$ $1 \leq i,j \leq 4$ erzeugte Unteralgebra von $k[\mathrm{SL}(2,k)]$. Zeigen Sie:

(1) Die Hopf-Algebren-Struktur auf $k[\mathrm{SL}(2,k)]$ induziert eine Hopf-Algebren-Struktur auf $A$. Damit gibt es eine algebraische Gruppe $G = \mathrm{PGL}(2,k)$ so dass $k[G] = A$.

(2) Die Inklusion $A \subseteq k[\mathrm{SL}(2,k)]$ definiert einen Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$f : \mathrm{SL}(2,k) \to \mathrm{PGL}(2,k),$$

dessen Kern die Untergruppe $\{1,-1\}$ von $\mathrm{SL}(2,k)$ ist; als Abbildung von Mengen ist $f$ surjektiv.

(3) Falls $\operatorname{char} k = 2$, dann ist $f$ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, aber nicht von algebraischen Gruppen.

**Aufgabe 9.** Seien $(X, k[X])$ und $(Y, k[Y])$ affine Varietäten.

(1) Zeigen Sie, dass die Projektionen $X \times Y \to X$ und $X \times Y \to Y$ einen Isomorphismus $k[X] \otimes_k k[Y] \xrightarrow{\sim} k[X \times Y]$ von $k$-Algebren liefern.

(2) Sind $k[X]$ und $k[Y]$ affine $k$-Algebren, so ist auch $k[X \times Y]$ eine affine $k$-Algebra.

(3) Sind $k[X]$ und $k[Y]$ Integritätsbereiche, so ist auch $k[X \times Y]$ ein Integritätsbereich.

**Aufgabe 10.** Wir fassen $R := k[(X_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}]$ auf als den Raum der polynomialen Funktionen auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen.

Zeigen Sie: Das Polynom $\det -1$ ist irreduzibel in $R$. Folgern Sie (mit dem Hilbertschen Nullstellensatz), dass

$$R/(\det -1) \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{SL}(n,k)].$$