Algebraische Gruppen
SoSe 2008

Catharina Stroppel
Olaf Schnürer

1. Übungsblatt

Abgabetermin: Freitag, 11. April 2008

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2n, k)$ eine lineare algebraische Gruppe (über k) ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Gegeben eine endliche Menge X, dann existiert ein Ring von regulären Funktionen k[X], so dass $(X, k[X])$ eine affine Varietät wird.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie das Beispiel aus der Vorlesung: Gegeben eine affine Varietät $(X, k[X])$ und $f \in k[X]$, so ist $(X_f, k[X]_f)$ eine affine Varietät. Dabei sei $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, und man fasse die Lokalisierung $k[X]_f$ in geeigneter Weise auf als Teilmenge der k-wertigen Funktionen auf X_f.

Aufgabe 4. Betrachten Sie das Beispiel $(k^n, k[k^n])$ aus der Vorlesung für $n = 1$ und $k = \overline{\mathbb{F}}_p$.

Zeigen Sie: Die Frobeniusabbildung $F : \overline{\mathbb{F}_p} \to \overline{\mathbb{F}_p}$, $x \mapsto x^p$, ist ein Morphismus von affinen Varietäten, bijektiv, aber kein Isomorphismus.

Aufgabe 5. Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$ und Teilmengen $M \subset k[T_1, \ldots, T_m]$ und $N \subset k[T_1, \ldots, T_n]$ seien $X = \mathcal{V}(M) \subset k^m$ und $Y = \mathcal{V}(N) \subset k^n$ die zugehörigen Nullstellenmengen.

Zeigen Sie: Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist genau dann ein Morphismus von Varietäten $(X, k[X]) \to (Y, k[Y])$, wenn es Polynome $\varphi_i \in k[T_1, \ldots T_m]$, $1 \leq i \leq n$, gibt mit $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ für alle $x \in X$.