Universität Bonn — SS 2009	Prof. Dr. Werner Ballmann
Lineare Algebra II	Dr. Stéphane Félix
Übungen 9 — 19. Juni 2009	Emanuel Nipper

9.1. a) Testen Sie die positive Definitheit folgender reeller Matrizen mit Hilfe des Hauptminoren-Kriterium:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & 21 \end{pmatrix}.$$

b) Formulieren Sie und beweisen Sie ein solches Kriterium für negativ definite Matrizen.

9.2. Sei A eine hermitesche $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie, dass die folgende Formel gilt:

$$\mathrm{Spur}\,(A^2)\ \ \mathrm{Rang}\,(A) \geq (\mathrm{Spur}\,(A))^2.$$

9.3. Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & -1 & 2i \\ 1-2i & -2i & -1 \\ 0 & 1+2i & -1-i \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass diese Matrix normal ist, und diagonalisieren Sie A mit einem unitären Basiswechsel.

9.4. Sei $p(x) = (-1)^k(x^k + 1)$ für $k > 1$.

a) Finden Sie alle Nullstellen von p in $\mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass p nur einfache Nullstellen hat.

b) Finden Sie eine orthogonale Matrix $R \in \mathrm{M}\,(k \times k, \mathbb{R})$, die p als charakteristisches Polynom besitzt.

c) Finden Sie alle Nullstellen von $x^2 + 1$ in $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$.

d) Gibt es eine Matrix A in $\mathrm{M}\,(2 \times 2, \mathbb{F}_3)$ bzw. $\mathrm{M}\,(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$, sodass $A^t = A^{-1}$ gilt und welche $x^2 + 1$ als charakteristisches Polynom hat?

Bemerkung: Für $q > 2$ kann man zeigen, dass -1 genau dann ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist, wenn $q \equiv 1 \pmod 4$ ist.

9.5. (*Diese Aufgabe wird nicht bewertet*) Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Gilt der Satz oder ein Teil des Trägheitssatzes von Sylvester für Bilinearformen oder Sesquilinearformen auf V?