

Hinweis: Es gibt eine weitere Seite.

- 11.1.** Berechnen Sie die Jordansche Normalform der beiden folgenden komplexen Matrizen, und geben Sie das Minimalpolynom an:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beide Matrizen haben -1 als einzigen Eigenwert.

- 11.2.** Sei $\|\cdot\|$ die Norm auf $M(n \times n, \mathbb{C})$, die in der Übung 10.4 definiert wurde, und d die assoziierte Metrik.

- a) Beweisen Sie, dass es für alle $M \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und alle $\epsilon > 0$ eine diagonalisierbare Matrix $M_\epsilon \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $d(M, M_\epsilon) < \epsilon$ gibt; das heißt, die diagonalisierbaren Matrizen liegen dicht in $M(n \times n, \mathbb{C})$. *Hinweis:* Trigonalisieren Sie M zunächst.
- b) Ist die gleiche Aussage wahr für $M(n \times n, \mathbb{R})$?

- 11.3.** Sei V ein 6-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und α ein Endomorphismus von V mit charakteristischem Polynom $(t-1)(t+2)^5$ und Minimalpolynom $(t-1)(t+2)^3$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von α .

- 11.4.** (*Exponentialfunktion für Matrizen*) Betrachten Sie die Verallgemeinerung der Exponentialfunktion für Matrizen; für jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ existiert

$$\exp(A) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} A^i$$

Bemerkung: Die Konvergenz der Reihe ist eine Konsequenz der Übung 10.4.

- a) Bestimmen Sie $\exp(D)$ für eine Diagonalmatrix D .
- b) Beweisen Sie: ist $A, S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit S invertierbar, so folgt

$$\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1}.$$

c) Beweisen Sie: ist $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $AB = BA$, so gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

d) Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine invertierbare Matrix $S \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ so dass $A = S(D + N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist, und berechnen Sie $\exp(A)$.

e) Berechnen Sie $\exp(tB)$, wobei $t \in \mathbb{R}$ und

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.5. (*Hauptraumzerlegung*) Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $\alpha \in \text{End}(V)$ ein Endomorphismus und $p \in K[t]$ ein Polynom mit $p(\alpha) = 0$. Nehmen Sie an, dass p geschrieben werden kann als $p = p_1 \dots p_k$ mit paarweise zueinander primen Polynomen p_1, \dots, p_k (d.h. für $i \neq j$ gibt es kein nicht-konstantes Polynom m mit $m|p_i$ und $m|p_j$.) Für alle $i = 1, \dots, k$ sei $V_i := \ker p_i(\alpha) \subseteq V$.

a) Beweisen Sie, dass jeder Unterraum V_i invariant unter α ist.

b) Beweisen Sie $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.