

1.1. Berechnen Sie die Eigenwerte folgender zwei Matrizen, und geben Sie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2. Sei K ein Körper und $A \in M(n \times n; K)$.

- a) Zeigen Sie: Eine nilpotente Matrix A hat genau einen Eigenwert λ , und zwar $\lambda = 0$.
- b) Im Fall $K = \mathbb{R}$, finden Sie eine Matrix, die 0 als einzigen Eigenwert hat, aber nicht nilpotent ist.

1.3. Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ der \mathbb{R} -Vektorraum von allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Ableitung.

- a) D ist ein Endomorphismus.
- b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von D und zugehörige Eigenvektoren (sogenannte *Eigenfunktionen*.)
- c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von D^2 .
- d) Finden Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ und einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ von A^2 , sodaß es keine Eigenwerte μ von A mit $\mu^2 = \lambda$ gibt.

1.4. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\alpha : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von V . Zeigen Sie, dass $\alpha = \lambda \cdot \text{id}$ für einen Skalar $\lambda \in K$ genau dann, wenn α jeden Unterraum $U \subseteq V$ invariant lässt (d.h. $\alpha(U) \subseteq U$.)