

Die Probeklausur ist innerhalb von 3 Stunden zu bearbeiten.

Aufgabe 1

Seien K ein Körper, $A \in M(n \times n, K)$ und λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A λ^2 ist ein Eigenwert von A^2 .
- B Wenn μ ein Eigenwert zu einer Matrix $B \in M(n \times n, K)$ ist, dann ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB .
- C $-v$ ist ein Eigenvektor zu A mit Eigenwert $-\lambda$.
- D Ist χ_A das charakteristische Polynom von A , dann ist $\chi_A(0)$ ein Eigenwert von A .
- E Ist A ähnlich zu B , dann ist $\chi_A(0) = \chi_B(0)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die jeweils größten Eigenwerte der folgenden zwei reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -4 & -11 & -16 \\ 2 & 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Seien A, B Matrizen aus $M(n \times n, K)$ und χ_A und χ_B ihre charakteristischen Polynome. A und B heißen *kongruent*, falls es eine invertierbare Matrix T mit $A = T^t B T$ gibt. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Es gilt $\chi_A(0) = \det(A)$.
- B Wenn B kongruent zu A ist, dann ist $\chi_A = \chi_B$.
- C Wenn $\chi_A = \chi_B$, dann ist A ähnlich zu B .
- D Es gilt $\text{Rang}(A^2) \leq (\text{Rang}(A))^2$.
- E Es gilt $(\chi_A)^2 = \chi_{A^2}$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die folgende Matrix A als Endomorphismus des \mathbb{R}^3 und die folgende Basis \mathcal{B} des \mathbb{R}^3 :

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Spur, die Determinante und das charakteristische Polynom von $B := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A)$.

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Die Matrix A ist ähnlich zur Einheitsmatrix.
- B Die Matrix A ist kongruent zur Einheitsmatrix.
- C Die Matrix B ist kongruent zur Einheitsmatrix.
- D Die Matrix C ist kongruent zur Einheitsmatrix.
- E Die Matrix C ist ähnlich zur Matrix A .

Aufgabe 6

Sei \mathcal{P}_1 der Raum aller Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} der Form $x \mapsto ax + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Auf \mathcal{P}_1 sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

für alle $f, g \in \mathcal{P}_1$. Berechnen Sie die Determinante der Fundamentalmatrix bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (1, t)$ und bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = (-34 + 10t, 20 + 6t)$.

Aufgabe 7

Seien V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, ϕ und ψ symmetrische Bilinearformen auf V und Φ und Ψ die zwei zugeordneten quadratischen Formen, d.h. $\Phi(x) = \phi(x, x)$ und $\Psi(x) = \psi(x, x)$ für alle $x \in V$. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Wenn Φ und Ψ positiv definit sind, dann ist auch $\Phi + \Psi$ eine positiv definite quadratische Form.
- B Es gilt $\Phi(x + y) = 2\Phi(x) + 2\Phi(y) - \Phi(x - y)$ für alle $x, y \in V$.
- C Wenn es ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit $\Phi(x) = 0$ gibt, dann gibt es eine Basis (v_1, \dots, v_n) von V mit $\Phi(v_i) = 0$ für alle i .
- D Die Menge $\{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$ ist ein affiner Unterraum von V .
- E Die Menge $\{v \in V \mid \Phi(v) = 1\}$ ist ein affiner Unterraum von V .

Aufgabe 8

Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ zwei orthogonale Matrizen. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Es gilt $\det A = 1$.
- B AB ist orthogonal.
- C $A + B$ ist orthogonal.
- D A ist diagonalisierbar.
- E Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $A + \lambda E_n$ orthogonal.

Aufgabe 9

Seien A, B zwei $(n \times n)$ -Matrizen mit Einträge in einem Körper K . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Es gibt $(n \times n)$ -Matrizen S, T mit $A = SBT$.
- B Wenn A und B nilpotent sind, dann ist AB auch nilpotent.
- C Wenn A und B diagonalisierbar sind, dann ist AB auch diagonalisierbar.
- D Wenn A und B symmetrisch sind, dann ist AB auch symmetrisch.
- E Wenn A und B diagonalisierbar sind, dann ist $A + B$ symmetrisch.

Aufgabe 10

Sei $\mathbb{K}^n \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A** Es gibt in \mathbb{R}^3 sechs paarweise zueinander orthogonale von Null verschiedene Vektoren.
- B** Es gibt in \mathbb{C}^3 sechs paarweise zueinander orthogonale von Null verschiedene Vektoren.
- C** Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein von Null verschiedener Vektor. Dann ist $\langle iv, v \rangle$ reell und > 0 .
- D** Wenn $v, w \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig sind, dann gibt es einen von Null verschiedenen Vektor $w' \in \mathbb{C}^n$ sodass $\langle v, w' \rangle = 0$.
- E** Die Vektoren (v_1, \dots, v_n) in \mathbb{K}^n sind genau dann linear unabhängig, wenn die Linearformen $x \mapsto \langle v_i, x \rangle$ linear unabhängig sind.