

Prof. Dr. Werner Ballmann
 Dr. Stéphane Félix
 Emanuel Nipper

Nachklausur Lineare Algebra II

Informationen zur Nachklausur

- Die Nachklausur ist innerhalb von drei Stunden zu bearbeiten.
- Sie dürfen einen doppelseitig beschriebenen Spickzettel (DIN A4) benutzen. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Vorlesungsmitschriften, Taschenrechner, Handy, Notebooks oder Bücher sind ausdrücklich *nicht* zugelassen.
- Bitte benutzen Sie einen blauen oder schwarzen Kugelschreiber.

Hinweise zum richtigen Ausfüllen des beiliegenden Lösungsformulars

- Die Klausur besteht aus Multiple-Choice Aufgaben sowie aus Aufgaben, bei welchen eine knappe Antwort erwartet wird.
- Bei den Multiple-Choice Aufgaben muss entschieden werden, ob eine Aussage wahr ist (das heißt, sie gilt allgemein) oder ob sie falsch ist (das heißt, sie gilt nicht allgemein). Bei jeder Aufgabe liegt die Zahl der wahren Aussagen zwischen 0 und 5. Jede korrekte Antwort wird mit 2 Punkten bewertet. Für jede unbeantwortete Antwort werden 0 Punkte vergeben. Jede inkorrekte Antwort wird mit Abzug von 1 Punkt bewertet. Die Gesamtpunktzahl für jede einzelne Aufgabe ist allerdings mindestens Null Punkte.
- Bei den anderen Aufgaben ist die Lösung im Lösungsformular einzutragen. Die jeweils erreichbaren Punkte sind angegeben. (Bei diesem Aufgabentyp gibt es keine Minuspunkte für falsche Antworten.)
- Tragen Sie Ihre Antworten bitte an der dafür vorgesehenen Stelle auf dem Lösungsformular ein. Zum Beispiel:

Aufgabe X

A	B	C	D	E
W	W	F	F	F

Aufgabe Y

8
$p = 3t^2 - 7$

- Die maximal erreichbare Punktzahl ist 100, die Klausur gilt beim Erreichen von zumindest 50 Punkten als bestanden. Die Klausur wird wie folgt benotet:

zwischen 86 und 100 Punkten - sehr gut,
 zwischen 73 und 85 Punkten - gut,
 zwischen 61 und 72 Punkten - befriedigend,
 zwischen 50 und 60 Punkten - ausreichend.

Viel Erfolg !

Aufgabe 2

A $a_0 =$ $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$

B Eigenwert

C zgh. Eigenvektor (als Zeilenvektor)

<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>

Aufgabe 6

A

B ,

C

Aufgabe 9

A

B

C

Definitionen und Notationen

Sei K ein Körper.

- $M(n \times m, K)$ bezeichnet den Raum der $(n \times m)$ -Matrizen mit Einträgen in K .
- Die transponierte Matrix einer Matrix A wird mit A^t bezeichnet.
- Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heisst *diagonalisierbar über K* , falls es eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, K)$ gibt, sodass SAS^{-1} in Diagonalform ist.
- Eine Bilinearform ϕ über ein K -Vektorraum V heisst *nicht-entartet*, wenn für alle $x \in V$ gilt: $\phi(x, y) = 0$ für alle $y \in V$ impliziert $x = 0$.

Aufgabe 1 *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Seien A eine $(n \times n)$ -Matrix mit Einträgen in einem Körper K und v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Sei $\mu \in K$. Dann ist $\mu + \lambda$ ein Eigenwert von $(1 + \mu)A$.
- B Sei χ_A das charakteristische Polynom von A . Wenn $\chi_A(1) = 1$ gilt, dann ist 1 kein Eigenwert von A .
- C Sei w ebenfalls ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Dann ist w ein Vielfaches von v .
- D Wenn A invertierbar ist, dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} .
- E Sei $p \in K[t]$. Dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

Aufgabe 2 *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 8 & 8 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- A die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 des charakteristischen Polynoms $\chi_A = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ von A (4 Pkte),
- B die Eigenwerte von A (in diesem Beispiel sind es kleine ganze Zahlen, 3 Pkte),
- C und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A (3 Pkte).

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular.

Aufgabe 3 Charakteristisches Polynom

Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix mit Einträgen in einem Körper K und χ_A das charakteristische Polynom von A . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Sei $B \in M(n \times n, K)$ und χ_B das charakteristische Polynom von B . Wenn man A mit Hilfe von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen in die Matrix B überführen kann, dann ist $\chi_A = \chi_B$.
- B Es gilt $\chi_A(1) = 0$ genau dann, wenn $A - E_n$ nicht invertierbar ist.
- C Wenn $\chi_A = -t^3 - t^2 + t$ gilt, dann ist A invertierbar.
- D Wenn $\chi_A = (-1)^n t^n$ gilt, dann ist A diagonalisierbar.
- E Wenn das Minimalpolynom von A gleich $t^2 - t$ ist, dann ist A idempotent, d.h. $A^2 = A$.

Aufgabe 4 Kongruenz von Matrizen

Seien A, B zwei symmetrische Matrizen aus $M(n \times n, \mathbb{R})$. A und B heißen *kongruent über \mathbb{R}* , falls es eine invertierbare Matrix $T \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A = T^t B T$ gibt. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Wenn A und B kongruent über \mathbb{R} sind, dann sind sie simultan diagonalisierbar über \mathbb{R} , d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$, sodass SAS^{-1} und SBS^{-1} beide in Diagonalform sind.
- B Wenn A und B über \mathbb{R} kongruent und beide invertierbar sind, dann gibt es genau eine reelle Matrix T mit $A = T^t B T$.
- C Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist über \mathbb{R} kongruent zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- D Wenn A und B über \mathbb{R} kongruent sind, dann ist A genau dann positiv definit, wenn B positiv definit ist.
- E Für zwei über \mathbb{R} kongruente Matrizen A und B gilt $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(B)$.

Aufgabe 5 *Bilinearformen und quadratische Formen*

Sei ϕ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Wir nehmen an, dass ϕ symmetrisch ist. Wenn es eine Basis (v_1, \dots, v_n) von V mit $\phi(v_i, v_i) > 0$ für alle i gibt, dann ist ϕ positiv definit.
- B Es gilt $\phi(z, z) = 0$ für alle $z \in V$ genau dann, wenn $\phi(x, y) = \phi(x + \lambda y, y)$ für alle x und y in V und alle Skalare λ gilt.
- C Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V . Wenn $\phi(v_i, v_j) = -\phi(v_j, v_i)$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt, dann ist $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ für alle x und y in V .
- D Für alle nicht-entarteten Bilinearformen ϕ gibt es ein $z \in V$ mit $\phi(z, z) \neq 0$.
- E Wir nehmen an, dass $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ für alle x und y in V gilt. Dann ist die Menge $\{z \in V \mid \phi(z, z) = 0\}$ ein Unterraum von V .

Aufgabe 6 *Normen und Metriken, Gram-Schmidt Verfahren*

Sei $\mathcal{P}_3 \subseteq \mathbb{R}[t]$ der Unterraum aller Polynome vom Grad ≤ 3 . Auf \mathcal{P}_3 definiere man ein Skalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt, \quad f, g \in \mathcal{P}_3$$

und eine Norm durch

$$\|f\| := \sum_{i=0}^3 |f_i|$$

für $f \in \mathcal{P}_3$ mit $f = f_0 + f_1t + f_2t^2 + f_3t^3$. Man betrachte die Familie $\mathcal{M} = (1, t, t^2, 2t^2 - t - 3)$.

- A Berechnen Sie die orthogonale Projektion von t^3 auf den Unterraum $\text{span}(\mathcal{M})$ bezüglich des gegebenen Skalarproduktes. (4 Pkte)
- B Berechnen Sie die Einträge s_{24} und s_{42} der Fundamentalmatrix (s_{ij}) von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $(b_1, b_2, b_3, b_4) := (1, t, t^2, t^3)$ von \mathcal{P}_3 . (4 Pkte)
- C Existiert ein Skalarprodukt $\phi(\cdot, \cdot)$ auf \mathcal{P}_3 mit $\|f\|^2 = \phi(f, f)$ für alle $f \in \mathcal{P}_3$? Beantworten Sie diese Frage mit „ja“ oder „nein“. (2 Pkte)

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular.

Aufgabe 7 *Unitäre und orthogonale Endomorphismen*

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum über \mathbb{R} und W ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum über \mathbb{C} . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Für alle orthogonalen Endomorphismen von V ist $(t - 1)^2$ das Minimalpolynom.
- B Die Menge der orthogonalen Endomorphismen von V bildet eine Gruppe unter der üblichen Verkettung von Endomorphismen.
- C Wenn α ein orthogonaler Endomorphismus von V und (v_1, \dots, v_n) ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V .
- D Seien $v \in W$ und α ein unitärer Endomorphismus von W mit $\alpha(v) = v$. Dann gilt $\alpha^{\text{ad}}(v) = v$.
- E Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

Aufgabe 8 *Normale Matrizen*

Seien A und B zwei komplexe $(n \times n)$ -Matrizen. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Wenn A antihermitesch ist (d.h. $\overline{A}^t = -A$), dann ist A normal und alle Eigenwerte von A sind in $i\mathbb{R}$.
- B Wenn A unitär ist, dann gilt $|\text{Spur}(A)| \leq n$.
- C Wenn A idempotent ist, dann ist A auch hermitesch.
- D Wenn A hermitesch und B unitär ist, dann ist $\overline{B}^t AB$ hermitesch.
- E Wir nehmen an, dass A hermitesch ist. Sei U ein Unterraum von \mathbb{C}^n . Sei weiter $v \in U^\perp$ und $w \in \mathbb{C}^n$ mit $Aw \in U$. Dann sind Av und w zueinander orthogonal.

Aufgabe 9 Jordansche Normalform

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -8 & -3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- A Wie oft steht der kleinste Eigenwert von A auf der Diagonalen der Jordanschen Normalform von A ? (2 Pkte)
- B Bestimme die Dimension des Eigenraumes zum kleinsten Eigenwert von A (3 Pkte).
- C Bestimme die Jordansche Normalform von B (5 Pkte).

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular.

Aufgabe 10 Tensorprodukt

Seien V ein K -Vektorraum endlicher Dimension $n \geq 2$ und V^* der Dualraum von V . Identifiziere $V^* \otimes V^*$ mit dem K -Vektorraum $\text{Bil}(V)$ der Bilinearformen auf V vermöge $(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w)$, wobei $\phi, \psi \in V^*$ und $v, w \in V$ (wie in der Vorlesung.)

- A Die Abbildung $V^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(V)$, definiert durch $(\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi$, ist injektiv.
- B Die Abbildung $V^* \times V^* \rightarrow \text{Bil}(V)$, definiert durch $(\phi, \psi) \mapsto \phi \otimes \psi$, ist surjektiv.
- C Seien $\phi, \psi \in V^*$ von Null verschieden. Dann ist $\phi \otimes \psi$ nicht-entartet.
- D Seien $\phi, \psi \in V^*$ von Null verschieden. Dann ist $\phi \otimes \psi$ symmetrisch.
- E Sei α ein Endomorphismus von V und α^* der durch $\alpha^*(\psi) = \psi \circ \alpha$ definierte Endomorphismus von V^* . Wenn α invertierbar ist, so ist α^* ebenfalls invertierbar.