

Prof. Dr. Werner Ballmann
 Dr. Stéphane Félix
 Emanuel Nipper

Abschlußklausur Lineare Algebra II

Informationen zur Abschlußklausur

- Die Abschlußklausur ist innerhalb von drei Stunden zu bearbeiten.
- Sie dürfen einen doppelseitig beschriebenen Spickzettel (DIN A4) benützen. Weitere Hilfsmittel wie Skripte, Notizen, Vorlesungsmitschriften, Taschenrechner, Handy, Notebooks oder Bücher sind ausdrücklich *nicht* zugelassen.
- Bitte benützen Sie einen blauen oder schwarzen Kugelschreiber.

Hinweise zum richtigen Ausfüllen des beiliegenden Lösungsformulars

- Die Klausur besteht aus Multiple-Choice Aufgaben sowie aus Aufgaben, bei welchen eine knappe Antwort erwartet wird.
- Bei den Multiple-Choice Aufgaben muss entschieden werden, ob eine Aussage wahr ist (das heißt, sie gilt allgemein) oder ob sie falsch ist (das heißt, sie gilt nicht allgemein). In jeder Aufgabe liegt die Zahl der wahren Aussagen zwischen 0 und 5. Jede korrekte Antwort wird mit 2 Punkten bewertet. Für jede unbeantwortete Antwort werden 0 Punkte vergeben. Jede inkorrekte Antwort wird mit Abzug von 1 Punkt bewertet. Die Gesamtpunktzahl für jede einzelne Aufgabe ist allerdings mindestens Null Punkte.
- Bei den anderen Aufgaben ist die Lösung im Lösungsformular einzutragen. Die jeweils erreichbaren Punkte sind angegeben. (Bei diesem Aufgabentyp gibt es keine Minuspunkte für falsche Antworten.)
- Tragen Sie Ihre Antworten bitte an der dafür vorgesehenen Stelle auf dem Lösungsformular ein. Zum Beispiel:

Aufgabe X

A	B	C	D	E
W	W	F	F	F

Aufgabe Y

8
$p(t) = 3t^2 - 7$

- Die maximal erreichbare Punktzahl ist 100, die Klausur gilt beim Erreichen von zumindest 50 Punkten als bestanden. Die Klausur wird wie folgt benotet:

zwischen 86 und 100 Punkten - sehr gut,
 zwischen 73 und 85 Punkten - gut,
 zwischen 61 und 72 Punkten - befriedigend,
 zwischen 50 und 60 Punkten - ausreichend.

Viel Erfolg !

Aufgabe 2

A

B Eigenwert

C zgh. Eigenvektor (als Zeilenvektor)

Aufgabe 6

A

B

--

--

--

Aufgabe 10

A

B

C

--

Definitionen und Notationen

Sei K ein Körper.

- $M(n \times m, K)$ bezeichnet den Raum der $(n \times m)$ -Matrizen mit Einträgen in K .
- Die transponierte Matrix einer Matrix A wird mit A^t bezeichnet.
- Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt *diagonalisierbar über K* , falls es eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, K)$ gibt, sodass SAS^{-1} in Diagonalform ist.
- Zwei Matrizen A und B mit Einträgen in K heißen *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in M(n \times n, K)$ gibt, sodass SAS^{-1} und SBS^{-1} beide in Diagonalform sind.
- Der *Grad* eines Polynoms $p \in K[t]$, $p \neq 0$, ist die höchste Potenz von t , sodass der entsprechende Koeffizient von p nicht verschwindet. Der entsprechende Koeffizient heißt auch *Leitkoeffizient* von p .

Aufgabe 1 *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Seien A eine $(n \times n)$ -Matrix mit Einträgen in einem Körper K und λ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A $-v$ ist Eigenvektor zu $-A$ mit Eigenwert $-\lambda$.
- B Ist v ebenfalls Eigenvektor von $B \in M(n \times n, K)$, und zwar zum Eigenwert ν , dann ist $\nu\lambda$ ein Eigenwert von AB .
- C Sei $\mu \in K$. Dann ist $(\mu + \lambda)^2$ ein Eigenwert von $A^2 + 2\mu A + \mu^2 E_n$.
- D Sei μ ein Eigenwert zu $B \in M(n \times n, K)$. Dann ist $\mu + \lambda$ ein Eigenwert zu $A + B$.
- E Sei $\mu \in K$. Dann ist $\mu\lambda$ ein Eigenwert von μA .

Aufgabe 2 *Eigenwerte und Eigenvektoren*

Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

- A das charakteristische Polynom (*4 Pkte*),
- B die Eigenwerte (in diesem Beispiel sind es kleine ganze Zahlen, *3 Pkte*),
- C und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A (*3 Pkte*).

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular.

Aufgabe 3 *Charakteristisches Polynom*

Sei $A \in M(4 \times 4, K)$ eine Matrix mit Einträgen in einem Körper K und χ_A das charakteristische Polynom von A . Sei $p(t) = t^4 + 1 \in K[t]$. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Ist $\chi_A = p$, dann ist A invertierbar.
- B Ist $\chi_A = p$, dann ist A diagonalisierbar über K .
- C Gilt $p(B) = 0$ für eine Matrix $B \in M(8 \times 8, K)$, dann teilt p das charakteristische Polynom von B .
- D Es gibt ein eindeutiges Polynom $q \in K[t]$ vom Grad 4 mit Leitkoeffizient 1, sodass $q(A) = 0$ ist.
- E Eine Matrix $B \in M(n \times n, K)$ ist genau dann nilpotent, wenn ihr Minimalpolynom gleich t^k für eine natürliche Zahl $k \geq 1$ ist.

Aufgabe 4 *Kongruenz von Matrizen*

Seien A, B zwei Matrizen aus $M(n \times n, \mathbb{K})$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist. A und B heißen *kongruent über \mathbb{K}* , falls es eine invertierbare Matrix $T \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $A = T^t B T$ gibt. Wir nehmen an, dass A und B symmetrisch sind. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist über \mathbb{R} kongruent zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- B Wenn A und B kongruent über \mathbb{C} sind, dann sind A und B ähnlich über \mathbb{C} .
- C Wenn A reell ist und alle Eigenwerte positiv sind, dann ist A über \mathbb{R} kongruent zur Einheitsmatrix.
- D Wenn A über \mathbb{R} kongruent zur Einheitsmatrix ist, dann sind alle Eigenwerte von A positiv.
- E Seien C und D über \mathbb{R} kongruente Matrizen aus $M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann ist C genau dann symmetrisch, wenn D symmetrisch ist.

Aufgabe 5 *Bilinearformen und quadratische Formen*

Sei ϕ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Falls ϕ nicht entartet ist (d.h. $\phi(x, y) = 0$ für alle $y \in V$ impliziert $x = 0$), dann ist $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x, y) := \frac{1}{2}(\phi(x, y) + \phi(y, x))$ ein Skalarprodukt.
- B Es gilt $\phi(z, z) = 0$ für alle $z \in V$ genau dann, wenn $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ für alle x und y in V ist.
- C Wenn ϕ symmetrisch und $\phi(x, x) = 0$ für alle $x \in V$ ist, dann ist $\phi = 0$.
- D Wenn die Bilinearformen ϕ und ψ symmetrisch, positiv definit und $x, y \in V$ sind, dann ist $\{z \in V \mid \phi(x, z)^3 + \psi(y, z)^3 = 0\}$ ein Unterraum von V .
- E Wenn ϕ und ψ Bilinearformen und $x, y \in V$ sind, dann ist $\{z \in V \mid \phi(x, z)^2 + \psi(y, z)^2 = 0\}$ ein Unterraum von V .

Aufgabe 6 Gram-Schmidt Verfahren

Seien α die folgende Linearform auf \mathbb{R}^3 , A die folgende reelle Matrix und \mathcal{B} die folgende Basis von \mathbb{R}^3 :

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- A** Begründen Sie kurz, dass die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^t A y$, ein Skalarprodukt definiert (4 Pkte).
- B** Bestimmen Sie eine bezüglich A orthonormale Basis (v_1, v_2, v_3) von \mathbb{R}^3 mit $v_1 \in \text{span}\{b_1\}$ und $v_2 \in \ker \alpha$ (6 Pkte).

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular (v_1, v_2, v_3 als Zeilenvektoren.)

Aufgabe 7 Normen und Metriken

Sei $\mathcal{P}_n \subseteq \mathbb{R}[t]$ der Unterraum aller Polynome vom Grad $\leq n$. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A** Erkläre $d : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $d(p, q) := \sum_{i=0}^n |\alpha_i - \beta_i|$, wobei $p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i x^i$. Behauptung: Es gibt eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathcal{P}_n , sodass $\|p\| = d(0, p)$ für alle $p \in \mathcal{P}_n$.
- B** Zu $p \in \mathcal{P}_n$ sei $\|p\| := 0$ falls $p = 0$ und $\|p\| := \max(\{0\} \cup \text{NS}(p))$ falls $p \neq 0$, wobei $\text{NS}(p)$ die Menge aller reellen Nullstellen von p bezeichnet. Behauptung: Die Abbildung $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \|p\|$ ist eine Norm auf \mathcal{P}_n .
- C** Sei $\|\cdot\|$ die Norm auf \mathcal{P}_n , die durch $\|p\| := \max_{t \in [0,1]} |p(t)|$ definiert ist. Behauptung: Es gibt eine Bilinearform ϕ auf \mathcal{P}_n mit $\phi(p, p) = \|p\|^2$ für alle $p \in \mathcal{P}_n$.
- D** Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \mathcal{P}_n , $\|\cdot\|$ die assoziierte Norm und α ein Endomorphismus von \mathcal{P}_n mit $\|\alpha(p)\| = \|p\|$ für alle $p \in \mathcal{P}_n$. Dann ist α orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- E** Die reelle Funktion $(p, q) \mapsto (pq)'(0)$ auf \mathcal{P}_n , wobei r' die Ableitung von $r \in \mathcal{P}_n$ bezeichnet, definiert ein Skalarprodukt auf dem Unterraum $\{f \in \mathcal{P}_n \mid f(0) = 0\}$.

Aufgabe 8 *Unitäre und orthogonale Endomorphismen*

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum über \mathbb{R} und W ein endlichdimensionaler hermitescher Vektorraum über \mathbb{C} . Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Sei α ein Endomorphismus von W . Falls es eine unitäre Basis \mathcal{B} von W gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\alpha)$ eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten in $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist, so ist α unitär.
- B Die Menge der orthogonalen Endomorphismen von V bildet einen Ring unter der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation.
- C Sei α ein von der Identität verschiedener, orthogonaler Endomorphismus von V mit Determinante 1. Dann gibt es kein von Null verschiedenes $v \in V$, sodass $\alpha(v) = v$ ist.
- D Wenn α ein orthogonaler Endomorphismus von V und (v_1, \dots, v_n) eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V ist, dann ist $(\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_n))$ linear unabhängig in V .
- E Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ mit dem üblichen Skalarprodukt. Sei $z \in \mathbb{R}^3$, $\|z\| = 1$, und $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der durch das Kreuzprodukt $\alpha(x) := z \times x$ definierte Endomorphismus von \mathbb{R}^3 . Dann lässt α den Unterraum z^\perp invariant und ist auf diesem Unterraum orthogonal.

Aufgabe 9 *Normale Matrizen*

Seien A und B zwei komplexe $(n \times n)$ -Matrizen. Kennzeichnen Sie allgemeingültige Aussagen mit **W** und nicht allgemeingültige Aussagen mit **F**.

- A Wenn A normal und $\det(A) = 1$ ist, dann ist A unitär.
- B Wenn A unitär ist, dann ist A normal und es gilt $\det(A) = 1$.
- C Wenn A normal ist und reelle Eigenwerte hat, dann ist A hermitesch.
- D Wenn A und B hermitesch sind, dann ist AB normal.
- E Wenn A normal und B unitär ist, dann ist $\overline{B}^t AB$ normal.

Aufgabe 10 *Jordansche Normalform*

Sei

$$A := \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- A** Wie oft steht der größte Eigenwert von A auf der Diagonalen der Jordanschen Normalform von A ? (2 Pkte)
- B** Bestimme die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert 4 von A (3 Pkte).
- C** Bestimme die Jordansche Normalform von B (5 Pkte).

Übertragen Sie Ihre Antwort ins Lösungsformular.