

NACHLESUNG LINEARE ALGEBRA

INHALTSVERZEICHNIS

1. Normalformen im unitären Fall	1
2. Normalformen im (reellen) Euklidischen Fall	2
3. Eulersche Winkel	4

1. NORMALFORMEN IM UNITÄREN FALL

Sei V ein unitärer Vektorraum endlicher Dimension und $f \in \text{End } V$. Dann sind die folgenden Aussagen (1) – (3) jeweils dazu äquivalent, dass f *unitär* bzw. *selbstadjungiert* bzw. *normal* ist:

$$(1) \quad f^{\text{ad}} = f^{-1}, \quad f^{\text{ad}} = f, \quad f f^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} f.$$

(2) Falls B eine unitäre Basis von V und $A := M_B^B(f)$ ist, so ist

$$\bar{A}^t = A^{-1}, \quad \bar{A}^t = A, \quad A \bar{A}^t = \bar{A}^t A.$$

(3) (Normalform) Es gibt eine unitäre Basis B von V , sodass $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist mit Diagonaleinträgen in

$$S^1, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}.$$

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen (4) und (5) dazu äquivalent, dass A *unitär* bzw. *Hermiteisch* bzw. *normal* ist ((4) = (2)):

$$(4) \quad \bar{A}^t = A^{-1}, \quad \bar{A}^t = A, \quad A \bar{A}^t = \bar{A}^t A.$$

(5) (Normalform) Es gibt eine unitäre Matrix S , sodass SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist mit Diagonaleinträgen in

$$S^1, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}.$$

Zur Erinnerung: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$.

BEMERKUNGEN: 1) Zusammen mit dem kanonischen Skalarprodukt ist \mathbb{C}^n ein unitärer Vektorraum. Wenn wir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ als Endomorphismus des \mathbb{C}^n interpretieren, dann ist die Äquivalenz zwischen (4) und (5) eine Reformulierung der Äquivalenz zwischen (1) und (3).

2) Die Matrix S in (5) kann man aus $SU(n)$ wählen: Bestimme $z \in S^1$ mit $z^{-n} = \det S$. Dann ist $S_1 := zS \in SU(n)$ und

$$S_1 A S_1^{-1} = S A S^{-1}.$$

3) Die Menge T (\sim Torus) der Diagonalmatrizen in $SU(n)$ bzw. $U(n)$ ist eine Abelsche Untergruppe von $SU(n)$ bzw. $U(n)$. Überlege: Als Abelsche Untergruppe ist T jeweils maximal, das heißt, in keiner echt größeren Abelschen Untergruppe von $SU(n)$ bzw. $U(n)$ enthalten.

4) Achten Sie bei der Nacharbeitung der Vorlesung auf die entscheidende Rolle invarianter Unterräume bei der Herleitung der verschiedenen Normalformen.

2. NORMALFORMEN IM (REELLEN) EUKLIDISCHEN FALL

Sei V ein reeller Euklidischer Vektorraum endlicher Dimension und $f \in \text{End } V$. Dann sind die folgenden Aussagen (1) und (2) jeweils dazu äquivalent, dass f *orthogonal* bzw. *selbstadjungiert* bzw. *normal* ist:

$$(1) \quad f^{\text{ad}} = f^{-1}, \quad f^{\text{ad}} = f, \quad f f^{\text{ad}} = f^{\text{ad}} f.$$

(2) Falls B eine orthonormal Basis von V und $A := M_B^B(f)$ ist, so ist

$$A^t = A^{-1}, \quad A^t = A, \quad A A^t = A^t A.$$

Die Normalform normaler Endomorphismen haben wir im reellen Fall nicht diskutiert. Man überlege, dass die Argumente bei der Herleitung der Normalform orthogonaler Transformationen auch hier zu einer entsprechenden Normalform führen.

Die Normalform selbstadjungierter Endomorphismen von V ist analog zum unitären Fall: f ist genau dann selbstadjungiert, wenn V eine Orthonormalbasis B hat, sodass $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Zur Diskussion der Normalform orthogonaler Endomorphismen definieren wir zunächst die Drehmatrizen

$$(3) \quad R(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Falls $\dim V$ gerade ist, $\dim V = 2m$, dann ist f genau dann eine orthogonale Transformation von V mit positiver Determinante, wenn es eine Orthonormalbasis B von V und reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gibt mit

$$(4) \quad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} R(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

Falls $\dim V$ ungerade ist, $\dim V = 2m + 1$, dann ist f genau dann eine orthogonale Transformation von V mit positiver Determinante, wenn

es eine Orthonormalbasis B von V und reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ gibt mit

$$(5) \quad M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R(\alpha_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\alpha_m) \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen ist dann sogar $\det f = 1$.

Die Normalform orthogonaler Transformationen mit negativer Determinante, also Determinante $= -1$, ist entsprechend. Man beachte hierzu zum Beispiel, dass die Diagonalmatrix

$$(6) \quad C_n := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

orthogonal mit Determinante -1 ist. Damit ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann orthogonal mit negativer Determinante, wenn $C_n A$ orthogonal mit positiver Determinante ist.

BEMERKUNGEN: 1) Interpretiere C_n als Endomorphismus des \mathbb{R}^n geometrisch und beachte $C_n^2 = E_n$, also $C_n = C_n^{-1}$. Berechne $C_2 R(\alpha) C_2$. Diagonalisiere $C_2 R(\alpha)$ und $R(\alpha) C_2 R(-\alpha)$, und interpretiere beide als Abbildungen des \mathbb{R}^2 geometrisch.

2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta) = R(\beta)R(\alpha).$$

Ferner ist $R(0) = E_2$ und (folglich) $R(-\alpha) = R(\alpha)^{-1}$. Überlege: $R(\alpha)$ hat genau dann endliche Ordnung in $SO(2)$, wenn α ein rationales Vielfaches von π ist.

3) Die Menge T aller Matrizen wie in (4) bzw. (5) oben ist eine Abelsche Untergruppe von $SO(n)$ bzw. $O(n)$, wobei $n = 2m$ in (4) und $n = 2m+1$ in (5). Überlege: Als Abelsche Untergruppe ist T jeweils maximal in $SO(n)$ und $O(n)$, wenn n gerade ist. Falls n ungerade ist, so ist T maximal Abelsch in $SO(n)$, aber nicht in $O(n)$. Bestimme im letzten Fall eine maximale Abelsche Untergruppe von $O(n)$, die T enthält.

3. EULERSCHE WINKEL

Sei $A \in \text{SO}(3)$, und betrachte A als orthogonale Transformation des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 . Schreibe

$$(1) \quad Ae_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \end{pmatrix}$$

mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$(2) \quad \begin{pmatrix} R(-\beta) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(-\alpha) \end{pmatrix} Ae_1 = e_1.$$

Die Determinanten der drei Matrizen auf der linken Seite sind jeweils 1, also auch die des Produkts. Daher ist das Produkt in $\text{SO}(3)$ und lässt e_1 invariant, damit auch die (e_2, e_3) -Koordinatenebene. Also gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$(3) \quad \begin{pmatrix} R(-\beta) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(-\alpha) \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$(4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\beta) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir A als ein Produkt dreier sehr spezieller orthogonaler Matrizen geschrieben.

Die Winkel α, β, γ heißen die *Eulerschen Winkel* von A . Die drei Matrizen auf der rechten Seite sind Drehungen des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 , die erste und dritte mit $\mathbb{R}e_1$, die zweite mit $\mathbb{R}e_3$ als Drehachse, jeweils mit entsprechendem Drehwinkel α und γ beziehungsweise β , wobei der Drehwinkel nach der üblichen Dreifingerregel mit Daumen der rechten Hand in Richtung e_1 bei der ersten und dritten und in Richtung e_3 bei der zweiten Drehung gezählt wird.

BEMERKUNGEN: 1) Diskutiere die Eindeutigkeit von α, β und γ (abgesehen von der offensichtlichen 2π -Periodizität).

2) Mit A wie in (4) ist

$$A^t = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(-\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(-\beta) & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R(-\alpha) \end{pmatrix}.$$

Damit ist insbesondere γ analog zur Bestimmung von α in (1) durch $A^t e_1$ bestimmt.