| | |
|---|---|
| Universität Bonn — WS 2009-2010 | Prof. Dr. Werner Ballmann |
| **Differentialgeometrie I** | Dr. Stéphane Félix |
| Übungen 9 | 14. Dezember 2009 |

**9.1.** Sei $H^2$ wie in der Übung 6.2.

a) Zeigen Sie, dass $t \mapsto (x_0, \exp(at))$ eine Geodätische ist.

b) Finden Sie andere Geodätische von $H^2$. *Hinweis:* Benutzen Sie die in der Übung 6.2 beschriebene Isometriegruppe.

c) Gibt es andere Geodätische in $H^2$ als die Geoätische in b)?

**9.2.** Sei $(M, g)$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor $R$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$, wobei $X, Y, Z$ Vektorfelder sind, $\mathcal{F}M$-linear in $Z$ ist. $\mathcal{F}M$ bezeichnet den Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen auf $M$.

**9.3.** Sei die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$, das Vektorfeld $X : I \to \mathbb{R}^3$ und die Regelfläche $f : I \times J \to \mathbb{R}^3$ wie in der Übung 5.4.

a) Zeigen Sie, dass die gaußsche Krümmung von $f$ genau dann verschwindet, wenn

$$S_{(t,0)}((1,0),(0,1)) = 0$$

für alle $t \in I$ gilt, wobei $S(\cdot, \cdot)$ die zweite Fundamentalform ist.

b) Zeigen Sie, dass die gaußsche Kümmung $\leq 0$ ist.

**9.4.** Betrachten Sie die Kurve

$$c(t) := (a \sin t, a \cos t, b)$$

auf der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, wobei $a^2 + b^2 = 1$ und $a \neq 0$. Sei $v := \dot{c}(0)$. Welchen Tangentialvektor in $c(0)$ erhält man nach einem Umlauf, wenn man $v$ entlang von $c$ parallel verschiebt?