| | |
|---|---|
| Universität Bonn — WS 2009-2010 | Prof. Dr. Werner Ballmann |
| **Differentialgeometrie I** | Dr. Stéphane Félix |
| Übungen 12 | 18. Januar 2010 |

**12.1.** a) Beweisen Sie die Formel $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ für alle Vektorfelder $X, Y$ auf $SO(n)$, mit der gleichen Methode wie in der Übung 10.4. Hier ist $SO(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_n\}$, weiter $\mathfrak{so}(n) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A, \det A = 1\} = T_E SO(n)$ die Liesche Algebra von $SO(n)$ und $\langle B, C\rangle_A := \text{Spur}\,((A^{-1}B)^t A^{-1}C)$ das Skalarprodukt auf $T_A SO(n)$, für $A \in SO(n)$ und $B, C \in T_A SO(n)$.

b) Beweisen Sie, dass im Fall von $Sl(n, \mathbb{R})$ und $SO(n)$ der Krümmungstensor durch die folgende Formel gegeben ist:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[Z, [X, Y]].$$

**12.2.** Seien $M, M'$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\phi, \psi : M \to M'$ lokale Isometrien. Sei $M$ vollständig und zusammenhängend, und es gelte $\phi(p) = \psi(p)$ sowie $\phi_{*p} = \psi_{*p}$ für ein $p \in M$. Zeigen Sie, dass $\phi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in M$.

**12.3.** *(Pseudosphäre)* Betrachten Sie die folgende Parametrisierung der sogenannten Pseudosphäre im $\mathbb{R}^3$:

$$\Psi(u, v) = (e^{-u}\cos v, e^{-u}\sin v, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt).$$

Bemerkung: Dies ist eine Drehfläche.

a) Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Gaußsche Krümmung der Pseudosphäre.

b) Man entferne einen Meridian aus der Pseudosphäre. Geben Sie für das restliche Gebiet eine Isometrie auf eine Teilmenge der hyperbolischen Ebene an. *Hinweis:* Eine mögliche Teilmenge von $H^2$ ist von dem Typ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y > c > 0\}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

**12.4.** Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform, die Gaußsche Krümmung, sowie die mittlere Kümmung des Helikoids

$$F(s, t) = (s\cos t, s\sin t, t), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

*Erinnerung:* Die mittlere Krümmung ist die Hälfte der Summe der Hauptkrümmungen.