

- 1.1.** Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension m . Beweisen Sie, dass M zusammenhängend ist genau dann, wenn M wegzusammenhängend ist.
- 1.2.** (*Drehflächen*) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine *Drehfläche* S ist eine Fläche, die durch eine Parametrisierung $f : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Form

$$f(u, v) = (c_1(u) \cos(v), c_1(u) \sin(v), c_2(u))$$

gegeben ist, wobei $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen mit $c_1(t) > 0$ und $(\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$ sind.

- Finden Sie die Tangentialebene $T_{f(u,v)} \subset \mathbb{R}^3$ zur Drehfläche S am Punkt $f(u, v)$.
- Finden Sie eine Formel für den Flächeninhalt von S .
- Beweisen Sie, dass f eine Immersion ist.

- 1.3.** (*Länge von Kurven*) Sei $r > 0$.

- Berechnen Sie die Tangenten und die Länge (für $r = 1$) der Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (t + r \sin(t), -r \cos(t))$.
- Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Gerade $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $t \mapsto x + t(y - x)$, die kürzeste Kurve zwischen x und y ist.
- Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und d die übliche euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n . Man definiere

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \mid 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1 \right\},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m = 1$ und alle $m > 0$ gebildet wird. Beweisen Sie, dass L die übliche Länge ist, falls γ eine C^1 Kurve ist.

- 1.4.** Sei B die Matrix einer nicht entarteten Bilinearform auf \mathbb{R}^n und G die Menge aller invertierbaren reellen Matrizen A mit $A^t B A = B$.

- Beweisen Sie, dass G eine Gruppe unter Matrizenmultiplikation ist.
- Beweisen Sie, dass G eine Untermannigfaltigkeit der Menge $M_n(\mathbb{R})$ aller reellen Matrizen ist.