

Topologische Anwendungen algebraischer K -Theorie

Dienstags, 14:15–15:45, Seminarraum 0.007

In diesem Seminar betrachten wir zwei eng verwandte algebraische Invarianten von Ringen und ihre Anwendungen auf rein topologische Fragestellungen:

Wir beginnen mit dem Studium *einfacher Homotopieäquivalenzen* – bestimmter Homotopieäquivalenzen, die sich aus gegebenen CW-Strukturen »kombinatorisch« konstruieren lassen – mit Hilfe der *Whitehead-Torsion*. Wir folgen dabei Kapitel 11 im Buch von Davis und Kirk [DK01] sowie der kurzen Arbeit von Stöcker [Stö70]. Deutlich umfangreichere Quellen zu diesem Thema mit einer Vielzahl von weiteren Referenzen sind Milnors Übersichtsartikel [Mil66] und Cohens Buch [Coh73].

Im Anschluss behandeln wir die *Wall'schen Endlichkeitshindernisse*. An diesen kann man für gewissen Räume ablesen, ob sie den Homotopietyp endlicher CW-Komplexe haben. Referenzen hierzu sind die ersten Kapitel der Übersichtsartikel von Mislin [Mis95] und Ferry und Ranicki [FR01] sowie Walls Originalarbeiten [Wal65] und [Wal66].

Abschließend werden wir Quillens berühmte Konstruktion der algebraischen K -Theorie von Ringen diskutieren, was uns erlaubt die beiden studierten Themen in einen gemeinsamen Kontext einzuordnen.

Hinweis. Sie sollten sich mindestens zwei Wochen vor Ihrem Vortragstermin mit Tobias Lenz (lenz@math.uni-bonn.de) treffen, um die geplanten Inhalte durchzusprechen.

Voraussetzungen

Die Inhalte der Vorlesungen »Einführung in die Geometrie und Topologie« sowie »Topologie I«, insbesondere: CW-Komplexe und Δ -Komplexe, Fundamentalgruppe und Überlagerungen, Homologiegruppen und homologische Algebra, Moduln über allgemeinen Ringen

Vorträge

1. **Die Whitehead-Gruppe eines CW-Komplexes** (T. Lenz) 12. APRIL
[Stö70, §§1 und 2] sowie [DK01, Definition 11.3-(2) und das darauffolgende Beispiel]
2. **$K_1(\mathbf{R})$ und $\text{Wh}(\pi)$** (E. Scheuermann) 26. APRIL
[DK01, Abschnitt 11.2]
3. **Torsion von Kettenkomplexen** (J. Sneeuw) 3. MAI
[DK01, Abschnitt 11.3 bis einschließlich Definition 11.22]
4. **Whitehead-Torsion für CW-Komplexe** (E. Ertle) 10. MAI
[DK01, Rest von Abschnitt 11.3] sowie [DK01, Teil 1 und 2 von Theorem 11.31]
5. **Whitehead-Torsion detektiert einfache Homotopieäquivalenz** (P. Pützstück) 17. MAI
[Stö70, §3] und [DK01, Teil 3 von Theorem 11.31]; genauer: nachdem mit Hilfe von [Coh73, (7.4)] die Resultate von [Stö70, §3] bewiesen sind, folgt mit [Stö70, Satz 3] und [Coh73, (5.8)] [DK01, Theorem 11.31(3)]
6. **Klassifikation 3-dim'ler Linsenräume bis auf Homotopie** (V. Stojanovic) . 24. MAI
[DK01, Abschnitt 11.6 bis einschließlich Theorem 11.35]
7. **Klassifikation 3-dim'ler Linsenräume unter einfacher Homotopie** (T. Thanassis)
. 31. MAI
[DK01, Rest von Abschnitt 11.6] (insbesondere Theorem 11.37); falls Zeit bleibt, [DK01, Theorem 11.38] formulieren (ohne Beweis!)

8. **Höhere K -Gruppen** (T. Thanassis) 14. JUNI
 Pluskonstruktion [Hat02, Proposition 4.40 und die Diskussion im Anschluss], Definition von $K_n(R)$ als $\pi_n BGL_\infty(R)^+$ für $n \geq 1$, Vergleich mit früherer Definition von K_1 , je nach verbliebener Zeit algebraische Beschreibung von $K_2(R)$ [Wei13, IV.1]; weitere nützliche Literatur: [Ros94, 4.1–4.2, 5.2]

Literatur

- [Coh73] M. M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, Grad. Texts Math., vol. 10, Berlin-Heidelberg-New York Springer, 1973.
- [DK01] James F. Davis and Paul Kirk, *Lecture notes in algebraic topology*, Grad. Stud. Math., vol. 35, Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 2001.
- [FR01] Steve Ferry and Andrew Ranicki, *A survey of Wall's finiteness obstruction*, Surveys on surgery theory. Vol. 2: Papers dedicated to C. T. C. Wall on the occasion of his 60th birthday, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2001, pp. 63–79.
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [Mil66] John W. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Am. Math. Soc. **72** (1966), 358–426.
- [Mis95] Guido Mislin, *Wall's finiteness obstruction*, Handbook of algebraic topology, Amsterdam: North-Holland, 1995, pp. 1259–1291.
- [Ran85] Andrew Ranicki, *The algebraic theory of finiteness obstruction*, Math. Scand. **57** (1985), 105–126.
- [Ros94] Jonathan Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Grad. Texts Math., vol. 147, New York, NY: Springer-Verlag, 1994.
- [Sri96] V. Srinivas, *Algebraic K-theory.*, Prog. Math., vol. 90, Boston, MA: Birkhäuser, 1996.
- [Stö70] Ralph Stöcker, *Whiteheadgruppe topologischer Räume*, Invent. Math. **9** (1970), 271–278.
- [Wal65] C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. Math. (2) **81** (1965), 56–69.
- [Wal66] ———, *Finiteness conditions for CW-complexes. II*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **295** (1966), 129–139.
- [Wei13] Charles A. Weibel, *The K-book. An introduction to algebraic K-theory*, Grad. Stud. Math., vol. 145, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2013.