Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 1
40 Punkte

Abgabetermin: 23.04.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem ($*$) bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 1.1 ($*$ 10 Punkte) Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraumes V.

(i) Angenommen, F ist *nilpotent*, d.h. es gibt eine natürliche Zahl n sodass $F^n = 0$. Zeige, dass Null der einzige mögliche Eigenwert von F ist.

(ii) Angenommen, F ist *idempotent*, d.h. $F^2 = F$. Zeige, dass nur 0 und 1 mögliche Eigenverte von F sind.

(iii) Angenommen, $F^2 + F$ hat den Eigenwert -1. Zeige, dass dann F^3 den Eigenwert 1 hat.

Aufgabe 1.2 Seien $F, G\colon V \to V$ Endomorphismen eines K-Vektorraumes V.

(i) Sei $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und sei $G(v) \neq 0$. Zeige, dass dann, $G(v)$ Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ ist.

(ii) Angenommen, V ist endlich-dimensional. Zeige, dass dann $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte haben.

(iii) Finde ein Gegenbeispiel zu (ii) wenn V nicht endlich-dimensional ist.

Aufgabe 1.3 Wir betrachten die lineare Abbildung $F\colon \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R}), \varphi \mapsto \varphi'$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, $\mathcal{C}^\infty(I;\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Abbildung $I \to \mathbb{R}$ ist, und φ' die Ableitung von φ ist.

(i) Bestimme die reellen Eigenwerte von F.

(ii) Bestimmen eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, 1)$.

Aufgabe 1.4 ($*$ 10 Punkte) Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen aus $M(3 \times 3; \mathbb{Q})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.5 ($*$ 10 Punkte) Sei $F\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraumes. Zeige, dass $P_F(0) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 1.6 ($*$ 10 Punkte) Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine Matrix und $\Phi\colon M(n \times n; K) \to M(n \times n; K)$ der Endomorphismismus, der durch $\Phi(B) = AB$ definiert ist. Zeige, dass für die charakteristischen Polynome von A und Φ gilt: $P_\Phi = (P_A)^n$.

Information zum Übungsbetrieb

Die Übungsaufgaben werden immer freitags auf der Vorlesungswebseite zur Verfügug gestellt. Die Lösungen müssen spätestens am jeweils übernächsten Dienstag vor Beginn der Vorlesung direkt dem/der Tutor/in übermittelt werden (11 Tage Bearbeitungszeit). Es dürfen bis zu drei Teilnehmer/innen aus derselben Übungsgruppe gemeinsam abgeben.