

2. Übungsaufgaben LA I, WS 10/11

Anwesenheitsaufgaben (2. Vorlesungswoche)

Aufgabe A8. Seien X und Y Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) $X \subseteq Y$
- (ii) $X \cap Y = X$
- (iii) $X \cup Y = Y$
- (iv) $X \setminus Y = \emptyset$

Aufgabe A9. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

- (i) Es gibt nur ein Einselement in K .

Zeigen Sie: Für alle $a, b \in K$ gilt:

- (ii) $(-a)b = -(ab)$
- (iii) Sei $ab = 0$. Dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$.

Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $A1, \dots, A4, M1, \dots, M4, D$ Sie benutzen.

Aufgabe A10. Sei $X \neq \emptyset$ eine endliche Menge und sei $f: X \rightarrow X$ eine Abbildung. Zeige: Es existiert ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $x \in X$ mit $f^m(x) = x$. ($f^m = f \circ \dots \circ f$ ist die m -fache Komposition (Hintereinanderschaltung) von f .)

Hausaufgaben

Aufgabe H1. Seien A, B, X, Y Mengen. Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

- (i) $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$
- (ii) $(A \times X) \cap (B \times X) = (A \cap B) \times X$
- (iii) $(A \times X) \cup (B \times X) = (A \cup B) \times X$
- (iv) $(A \times X) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times (X \cup Y)$

Aufgabe H2. Seien $f: X_1 \rightarrow X_2, g: Y_1 \rightarrow Y_2, h_1: X_1 \rightarrow Y_1$ und $h_2: X_2 \rightarrow Y_2$ Abbildung mit $h_2 \circ f = g \circ h_1$, and seien h_1 und h_2 bijektiv. Zeigen Sie: f is injektiv genau dann wenn g injektiv ist.

Aufgabe H3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

- (i) Zu jedem $a \in K$ gibt es nur ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

Zeigen Sie: Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

- (ii) $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$

(iii) $(-a)(-b) = ab$

(iv) $-(-a) = a$

Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $A1, \dots, A4, M1, \dots, M4, D$ Sie benutzen.

Aufgabe H4. (*Exponentialabbildungen sind nicht bijektiv*) Sei K ein Körper, und sei $K^\times := K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keine bijektive Abbildung $e: K \rightarrow K^\times$ mit $e(a+b) = e(a)e(b)$ für alle $a, b \in K$.

Regeln:

- Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.
- Zulässig sind Einzelabgaben und Abgaben in Zweiergruppen. Jedes Mitglied einer Zweiergruppe muß jede der bearbeiteten Aufgaben im Tutorium präsentieren können.
- Für jede gelöste Hausaufgabe gibt es 4 Punkte.
- Wer mindestens 50% der Punkte erzielt und aktiv am Tutorium teilnimmt, wird zur Klausur zugelassen.