Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 9
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Der Rang und das Radikal von symmetrischen Bilinearformen*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V.

(a) Wir erinnern daran, dass das Radikal von β definiert ist als

$$\mathrm{Rad}(\beta) := \{v \in V \mid \beta(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}.$$

Zeigen Sie, dass β eine wohldefinierte Bilinearform $\overline{\beta}$ auf $V/\operatorname{Rad}(\beta)$ induziert, sodass $\overline{\beta}(\overline{v},\overline{w}) = \beta(v,w)$ für alle $v,w \in V$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass $\overline{\beta}$ nicht ausgeartet ist.

(b) Der Rang $rg(\beta)$ von β ist als der Rang der darstellenden Matrix von β bezüglich einer Basis von V definiert. Verwenden Sie die Transformationsformel um zu zeigen, dass dies wohldefiniert ist, d.h. dass der Rang nicht von der Wahl einer Basis abhängt.

(c) Zeigen Sie die Identität $\dim(V) = rg(\beta) + \dim(\mathrm{Rad}(\beta))$, wobei $\mathrm{Rad}(\beta)$ das in Teil (a) definierte Radikal von β bezeichne.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Berechnung*
Betrachte die reelle 3×3 Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Sei $\beta := \beta_A$ die zu A gehörige symmetrische Bilinearform auf $V := \mathbb{R}^3$, d.h. $\beta(x,y) = x^T A y$.

(a) Geben Sie eine Matrix $B \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ an, sodass $B^T A B$ Diagonalgestalt hat.

(b) Betrachten Sie die induzierte Abbildung

$$\beta_2 : V \longrightarrow V^*, \quad v \mapsto \beta(v,-).$$

Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{B}^*$ die zugehörige duale Basis von V^*. Berechnen Sie die darstellende Matrix $M_{\beta_2,\mathcal{B},\mathcal{B}^*}$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 30. Juni 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Orthogonale Komplemente*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\beta \in \mathrm{BF}(V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V und sei $U \subset V$ ein K-linearer Untervektorraum von V. Wir erinnern daran, dass das orthogonale Komplement von $U \subset V$ bezüglich β definiert ist als

$$U^\perp := U^{\perp,\beta} := \{v \in V \mid \beta(v,u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(U^\perp)$ falls β nicht ausgeartet ist.

(b) Zeigen Sie, dass $V = U \oplus U^\perp$ (d.h. $V = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$) gilt, falls sowohl β als auch die Einschränkung $\beta|_U$ von β auf U nicht ausgeartet ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Adjungierte Abbildung*
Seien (V, β) und (W, β') endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorräume. Sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir erinnern daran, dass die adjungierte Abbildung $f^{ad} : W \longrightarrow V$ definiert ist durch die Bedingung

$$\beta'(f(v), w) = \beta(v, f^{ad}(w)) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } w \in W.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\ker(f) = (\mathrm{im}(f^{ad}))^\perp$ gilt.

(b) Seien $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ Orthonormalbasen von V und W. Zeigen Sie, dass für die darstellenden Matrizen folgendes gilt: $M_{f^{ad},\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V} = \overline{M^T_{f,\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}}$.

(c) Gilt die Formel aus Teil (b) auch noch, wenn $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ beliebige (nicht notwendigerweise orthonormale) Basen von V und W sind?

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.