Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 8
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Das Gram-Schmidt Verfahren*

(a) Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$. Betrachte die folgenden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Finde eine Orthonormalbasis w_1, w_2, w_3, w_4 von V, sodass folgendes gilt:

$$w_1 \in Spann_{\mathbb{R}}(\{v_1\}), \quad w_2 \in Spann_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2\}) \quad \text{und} \quad w_3 \in Spann_{\mathbb{R}}(\{v_1, v_2, v_3\}).$$

(b) Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $P_3 \subset \mathbb{R}[t]$ aller reellen Polynome von Grad kleiner gleich drei. Bestimme eine Orthogonalbasis von P_3 bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Anzahl der Ähnlichkeitsklassen symmetrischer Bilinearformen*
Sei n eine positive natürliche Zahl, K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Betrachte die Menge aller symmetrischen Bilinearformen $BF^{sym}(V)$ auf V zusammen mit der Äquivalenzrelation

$$\beta_1 \sim \beta_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad \beta_1 \text{ und } \beta_2 \text{ sind kongruent.}$$

Die Bedingung dass β_1 und β_2 kongruent sind bedeutet hier, dass es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass die darstellenden Matrizen $M(\beta_1, \mathcal{B})$ und $M(\beta_2, \mathcal{B})$ kongruent sind. Es folgt aus der Transformationsformel, dass dies wiederum äquivalent zu der Bedingung ist, dass es zwei geordnete Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von V gibt, sodass $M(\beta_1, \mathcal{B}_1) = M(\beta_2, \mathcal{B}_2)$ gilt.

Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ auf $BF^{sym}(V)$ in den folgenden Fällen:

(a) $K = \mathbb{C}$;

(b) $K = \mathbb{R}$;

(c) $K = \mathbb{Q}$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 23. Juni 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Der Kegel als Vereinigung isotroper Unterräume*
Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ zusammen mit der symmetrischen Bilinearform

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

(a) Beschreiben Sie die Menge aller isotroper Vektoren $x \in V$ geometrisch und malen Sie eine Skizze von dieser Menge.

(Tipp: Beschreiben Sie zunächst die Menge aller isotroper Vektoren $x \in V$ mit der Eigenschaft, dass die dritte Koordinate x_3 von x fixiert ist.)

(b) Zeigen Sie anschaulich und mit Hilfe der Skizze aus Teil (a), dass alle nicht-trivialen isotropen Unterräume von V bezüglich β eindimensional sind und es davon unendlich viele gibt.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Die orthogonale Gruppe*
Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Betrachte auf K^n das Standardskalarprodukt

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(a) Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) A ist orthogonal;

(ii) die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von K^n;

(iii) die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von K^n.

(b) Zeige, dass die Menge $O(n) \subset \mathrm{GL}(n, K)$ aller orthogonalen Matrizen eine Untergruppe bezüglich Matrixmultiplikation bildet. Ist $O(n)$ auch ein K-Vektorraum?

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.