Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 7
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Wahr oder falsch?*
Entscheide jeweils mit Begründung ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Sei $\beta \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^2)$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^2$: $\beta(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(b) Falls $\beta, \beta' \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^2)$ Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$ sind, sodass $\beta + \beta'$ symmetrisch ist, so sind schon β und β' symmetrisch.

(c) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\beta \in \mathrm{BF}(V)$. Genau dann ist β nicht ausgeartet, wenn fuer jedes $v_0 \in V$ ein $w \in V$ existiert sodass $\beta(v_0, w) \neq 0$.

(d) Es gibt eine symmetrische Bilinearform $\beta \in \mathrm{BF}(\mathbb{R}^2)$ mit folgender Eigenschaft:

$$\beta(v,v) = v_1^2 - 2v_2^2 \quad \text{für alle} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Kongruente* 1×1 *Matrizen*
Sei K ein Körper und fasse Elemente aus K als 1×1 Matrizen auf. Betrachte die Äquivalenzrelationen $\sim_1$ und $\sim_2$ auf $M(1 \times 1, K)$ die gegeben sind durch:

$$A \sim_1 B \iff A \text{ und } B \text{ sind ähnlich;}$$

$$A \sim_2 B \iff A \text{ und } B \text{ sind kongruent;}$$

für $A, B \in M(1 \times 1, K)$.

(a) Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_1$ auf $M(1 \times 1, K)$ für einen beliebigen Körper K;

(b) Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_2$ auf $M(1 \times 1, \mathbb{R})$;

(c) Geben Sie ein Repräsentantensystem der Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf $M(1 \times 1, \mathbb{Q})$ an;

(d) Sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $K = \mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Bestimme die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_2$ auf $M(1 \times 1, \mathbb{F}_p)$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 16. Juni 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Die Spur als Bilinearform*
Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Sei $M := M(n \times n, K)$ der K-Vektorraum aller $(n \times n)$-Matrizen über K. Wir erinnern daran, dass für $A = (a_{ij}) \in M$ die Spur von A durch $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ definiert ist.

(a) Zeige, dass $\beta(A, B) := \mathrm{Spur}(AB)$ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform β auf M definiert.

(b) Angenommen $n \geq 2$. Zeige, dass ein Element $A \in M$ mit $A \neq 0$ und $\beta(A) = 0$ existiert.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Ausgeartet oder nicht?*
Sei K ein Körper. Für eine Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ bezeichnen wir mit $\beta_A \in \mathrm{BF}(K^n)$ die Bilinearform die durch $\beta_A(v, w) = v^T A w$ gegeben ist.

(a) Sei $n = 3$, $K = \mathbb{R}$ und betrachte

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bestimme alle linearen Unterräume $U \subset \mathbb{R}^3$, sodass $\beta_A(v, u) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(b) Sei $n = 2$, $K = \mathbb{R}$ und betrachte

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Bestimme alle linearen Unterräume $U \subset \mathbb{R}^2$, sodass $\beta_B(v, u) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(c) Sei $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ die Matrix aus Teil (b). Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1\ x_2) B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ ein Polynom in zwei Variablen ist. Benutze das Verhalten der Funktion f, um zu zeigen, dass es ein $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta_B(v, v) = 0$ gibt.

Bemerkung: Eine formale Definition des Polynomrings $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ in zwei Variablen kann gegeben werden als $\mathbb{R}[x_1, x_2] := R[x_2]$, wobei $R := \mathbb{R}[x_1]$.

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.