

## Übungsblatt 6 Lineare Algebra 2

### Aufgabe 1. (4 Punkte) *Wahr oder falsch?*

Sei  $K$  ein Körper,  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $A, B \in M(n \times n, K)$ . Entscheide jeweils mit Begründung ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- (a) Die Anzahl der Jordankästchen in einer JNF zu  $A$  zum Eigenwert  $\lambda = 0$  ist  $n - \text{rg}(A)$ .
- (b) Die Anzahl der  $i \times i$  Jordankästchen in einer JNF zu  $A$  zum Eigenwert  $\lambda \in K$  ist kleiner gleich der Dimension von  $\ker((A - \lambda \text{id})^i)$ .
- (c) Falls  $A$  und  $B$  nilpotent sind und falls  $A$  und  $B$  dieselbe JNF haben, dann ist auch  $A + B$  nilpotent.
- (d) Die folgenden drei Matrizen  $A_1, A_2, A_3 \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$  sind paarweise nicht ähnlich zueinander (d.h. liegen in verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich Ähnlichkeit):

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) Die folgenden drei Matrizen  $A_1, A_2, A_3 \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$  sind paarweise nicht ähnlich zueinander (d.h. liegen in verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich Ähnlichkeit):

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (f) Die folgenden drei Matrizen  $A_1, A_2, A_3 \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$  sind paarweise nicht ähnlich zueinander (d.h. liegen in verschiedenen Äquivalenzklasse bezüglich Ähnlichkeit):

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Jordansche Normalform*

Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C}).$$

Berechne das charakteristische Polynom  $p_A$ , das Minimalpolynom  $m_A$  sowie die Jordansche Normalform von  $A$ . Geben Sie auch die Basiswechselmatrix an, welche  $A$  in die Jordansche Normalform bringt.

**Bitte wenden.**

**Aufgabe 3.** (4 Punkte) *Summen von diagonalisierbaren und nilpotenten Matrizen*

Sei  $K$  ein Körper und  $n \geq 1$  eine natürliche Zahl und  $D, D', N, N' \in M(n \times n, K)$ . Man zeige:

(a) Falls  $D$  und  $D'$  diagonalisierbar sind und  $DD' = D'D$  gilt, so ist für alle  $\lambda \in K$  auch  $D + \lambda D'$  diagonalisierbar.

(b) Falls  $N$  und  $N'$  nilpotent sind und  $NN' = N'N$  gilt, so ist für alle  $\lambda \in K$  auch  $N + \lambda N'$  nilpotent.

(Tipp: Beweisen Sie zuerst eine binomische Formel die  $(A + B)^m$  für  $m \geq 1$  berechnet, wobei  $A, B \in M(n \times n, K)$  beliebige Matrizen mit  $AB = BA$  sind.)

**Aufgabe 4.** (4 Punkte) *k-te Wurzeln von Matrizen*

(a) Zeige, dass es zu jeder Matrix  $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$  mit  $A^2 \neq 0$  eine Matrix  $B \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$  mit  $B^2 = A$  gibt.

(b) Sei  $n \geq 3$ . Zeige, dass es eine Matrix  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $A^n \neq 0$  gibt, sodass  $A$  nicht von der Gestalt  $A = B^k$  für ein  $k \geq 2$  und eine Matrix  $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$  ist.

**Hinweis:** Am Donnerstag dem 1. Juni findet die Matheparty der Fachschaft statt. Alle weiteren Infos findet man auf <http://www.fsmath.uni-bonn.de>.

**Allgemeine Bemerkungen:**

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: <http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.html>
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragen zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten ([schreied@math.uni-bonn.de](mailto:schreied@math.uni-bonn.de)). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.