Prof. Dr. Catharina Stroppel Sommersemester 2017

Dr. Stefan Schreieder

Übungsblatt 5
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Wahr oder falsch?*
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Entscheide jeweils mit Begründung ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Falls f und g simultan diagonalisierbar sind, so gilt $f \circ g = g \circ f$.

(b) Falls $f \circ g = g \circ f$ und falls f diagonalisierbar ist, so ist auch g diagonalisierbar.

(c) Falls $f \circ g = g \circ f$, so ist für alle $\lambda \in K$ der verallgemeinerte Eigenraum $V_\lambda^\infty(f)$ g-stabil.

(d) Das charakteristische Polynom p_f bestimmt das Minimalpolynom m_f eindeutig.

(e) Das Minimalpolynom m_f bestimmt die Jordansche Normalform von f eindeutig.

(f) Falls $p_f(t) = t^2(t-1)(t-2)$ so gibt es (bis auf Permutation der Jordanblöcke) genau zwei mögliche Formen der Jordanschen Normalform von f.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Jordansche Normalform*
Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C}).$$

Berechne das charakteristische Polynom p_A, das Minimalpolynom m_A sowie die Jordansche Normalform von A. Geben Sie auch die Basiswechselmatrix an, welche A in die Jordansche Normalform bringt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Lemma VI.3*
Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Man zeige:

(a) Falls $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnlich sind, so stimmen die Minimalpolynome von A und B überein: $m_A = m_B$.

(b) Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_f in verschiedene Linearfaktoren über K zerfällt, d.h.

$$m_f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_r)$$

mit $\lambda_i \in K$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 26. Mai 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 4. (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte) *Simultane Diagonalisierung*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

(a) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar mit $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle i, j. Zeige, dass f_1, f_2 und f_3 simultan diagonalisierbar sind, d.h. es gibt eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V sodass $M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonal ist für alle $i = 1, 2, 3$. (4 Punkte)

(b) Sei I eine beliebige Indexmenge und sei für alle $i \in I$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus $f_i \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben. Angenommen $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für alle $i, j \in I$. Zeige, dass es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass $M_{f_i,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ diagonal ist für alle $i \in I$.
(2 Zusatzpunkte)

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.