Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Sommersemester 2017

Übungsblatt 4
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eine nilpotente Jordanform*
Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $v_1, \ldots, v_7$. Sei $f : V \longrightarrow V$ die K-lineare Abbildung die auf obiger Basis gegeben ist durch

$$f(v_1) = f(v_2) = v_5, \quad f(v_3) = f(v_4) = v_6, \quad f(v_5) = f(v_6) = v_7, \quad f(v_7) = 0.$$

(a) Zeige, dass f ein nilpotenter Endomorphismus von V ist.

(b) Finde eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ nilpotente Jordanform hat.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eigenwerte von Drehungen und Spiegelungen*

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch Rotation um $90°$ (in mathematisch positiver Richtung, d.h. gegen den Uhrzeigersinn) gegeben ist. Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ die zugehörige Matrix bezüglich der Einheitsbasis von $\mathbb{R}^2$. Berechne die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?

(b) Betrachte die Matrix A aus Teil (a), diesesmal aber aufgefasst als Matrix über dem Körper der komplexen Zahlen: $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$. Berechne die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?

(c) Sei $L \subset \mathbb{R}^2$ ein reeller Unterraum der Dimension eins (d.h. ein Ursprungsgerade in $\mathbb{R}^2$). Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch Spiegelung an der Geraden L gegeben ist. Berechne die Eigenwerte von f. Ist f diagonalisierbar?

(d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die durch eine Komposition $f = f_1 \circ \cdots \circ f_n$ von linearen Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist, wobei jedes f_i entweder einer Spiegelung an einer Ursprungsgeraden, oder einer Drehung um einen beliebigen Winkel entspricht. Angenommen das charakteristische Polynom $p_f(t)$ zerfällt in zwei verschiedene Linearfaktoren über $\mathbb{R}$. Zeige, dass es eine Urpsrungsgerade $L \subset \mathbb{R}^2$ gibt, sodass f der Spiegelung an der Geraden L entspricht.

Bemerkung: Sie dürfen bei Teil (d) auch mit etwas Anschauung argumentieren. Insbesondere dürfen Sie aus der Schule bekannte Konzepte wie Winkel und Längen verwenden.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Quotienten nach invarianten Unterräumen*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum. Man zeige:

(a) f induziert einen Endomorphismus $\overline{f} : V/U \longrightarrow V/U$.

(b) Das Minimalpolynom $m_{\overline{f}}$ von $\overline{f}$ teilt das Minimalpolynom m_f von f.

(c) Betrachte die Einschränkung $f|_U : U \longrightarrow U$ von f auf U. Für die charakteristischen Polynome von f, $f|_U$ und $\overline{f}$ gilt: $p_f(t) = p_{f|_U}(t) \cdot p_{\overline{f}}(t)$.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 19. Mai 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Eigenwerte und kommutative Diagramme*
Sei K ein Körper und V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit K-linearen Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $g \in \mathrm{End}_K(W)$. Angenommen es gibt eine lineare Abbildungen $h : V \longrightarrow W$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & V \arrow[d, "h"] \\ W \arrow[r, "g"] & W. \end{tikzcd}$$

Man zeige folgende Aussagen:

(a) Falls h injektiv ist, so ist jeder Eigenwert von f auch ein Eigenwert von g.

(b) Falls h surjectiv ist, so ist jeder Eigenwert von g auch ein Eigenwert von f.

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.