Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 3
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (8 Punkte) *Wahr oder falsch?*
Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Wir erinnern daran, dass eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ nilpotent heißt, falls $A^k = 0$ für ein $k \geq 1$.

Entscheide jeweils mit Begründung ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ sind genau dann ähnlich wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(b) Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ haben genau dann dieselben Eigenwerte wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

(c) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix. Dann ist 0 der einzige Eigenwert von A.

(d) Eine nilpotente Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit $A \neq 0$ ist niemals diagonalisierbar.

(e) Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar. Dann gibt es eine simultane Eigenbasis von A und B; d.h. es gibt eine Basiswechselmatrix $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ welche sowohl A als auch B diagonalisiert.

(f) Das Produkt AB zweier diagonalisierbarer Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ ist diagonalisierbar.

(g) Sei $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom $p_A(t) = t^2 - 8t + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Falls 5 ein Eigenwert von A ist, so ist unabhängig von c auch 3 ein Eigenwert von A.

(h) Betrachte die Menge M aller Matrizen $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodass 2 ein Eigenwert von A ist. Dann definiert

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind ähnlich}$$

eine Äquivalenzrelation auf M. Die Matrizen

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ bilden ein Repräsentantensystem bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Berechnung*
Betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C}).$$

Berechne alle Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 12. Mai 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Wir erinnern an folgende Definition.

Definition 1. Sei K ein Körper und seien U, V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : U \times V \longrightarrow W$ heißt K-*bilinear*, falls für alle $a, b \in K$, $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$, folgendes gilt:

$$f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v) \quad \text{und} \quad f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2).$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Das Tensorprodukt*
Sei K ein Körper und seien U und V K-Vektorräume. Konstruiere einen K-Vektorraum $U \otimes V$ zusammen mit einer K-bilinearen Abbildung $\otimes : U \times V \longrightarrow U \otimes V$, sodass folgende universelle Eigenschaft gilt. Für jeden K-Vektorraum W und für jede K-bilineare Abbildung $f : U \times V \longrightarrow W$ gibt es eine eindeutige K-lineare Abbildung $g : U \otimes V \longrightarrow W$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & W \\
U \otimes V \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Für $(u, v) \in U \times V$ bezeichnen wir das Bild $\otimes(u, v) \in U \otimes V$ mit $u \otimes v$ und nennen dies das Tensorprodukt von u und v; der Vektorraum $U \otimes V$ heißt das Tensorprodukt von U und V.

(**Tipp:** Gehen Sie ähnlich vor wie bei der Konstruktion des äußeren Produkts, das Sie in der Vorlesung gesehen haben.)

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.