Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Sommersemester 2017

Übungsblatt 2
Lineare Algebra 2

Definition 1. Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset R$ heißt Unterring, falls S eine additive Untergruppe mit $1 \in S$ ist, welche abgeschlossen unter der Multiplikation in R ist, d.h. für $x, y \in S$ gilt $xy \in S$.

Bemerkung: Aus obiger Definition folgt direkt, dass die Ringstruktur von R eine Ringstruktur auf jedem Unterring $S \subset R$ induziert; insbesondere ist ein Unterring $S \subset R$ also selbst ein Ring.

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Das Zentrum eines Ringes*
Sei R ein Ring. Das Zentrum $Z(R)$ von R wird definiert als

$$Z(R) := \{a \in R \mid ax = xa \text{ für alle } x \in R\}.$$

(a) Zeige, dass $Z(R) \subset R$ ein Unterring von R ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Bestimme das Zentrum des Matrizenrings $M(n \times n, K)$.

(c) Sei R ein Ring mit Zentrum $Z := Z(R) \subset R$. Bestimme das Zentrum des Plynomrings $R[t]$.

(Bemerkung: Der Ring R soll hier nicht kommutativ angenommen werden; der Polynomring über nicht-kommutativen Ringen ist genauso wie im kommutativen Fall definiert.)

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eigenschaften von $\Lambda^d f$*
Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Für $d \in \mathbb{N}$ zeige man, dass die lineare Abbildung $\Lambda^d f : \Lambda^d V \longrightarrow \Lambda^d W$ injektiv (bzw. surjektiv) ist, falls f diese Eigenschaft hat.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Eigenschaften von $\mathrm{Alt}^d(V, W)$*
Sei K ein Körper, $d \in \mathbb{N}$ und seien V und W K-Vektorräume. Wie in der Vorlesung, bezeichnen wir mit $\mathrm{Alt}^d(V, W)$ die Menge aller multilinearen, alternierenden Abbildungen $f : V^d \longrightarrow W$.

(a) Benutze die Vektorraumstruktur auf W um auf der Menge $\mathrm{Alt}^d(V, W)$ die Struktur eines K-Vektorraums zu definieren.

(b) Benutze die universelle Eigenschaft des d-fachen äußeren Produkts um zu zeigen, dass es einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{Alt}^d(V, W) \cong \mathrm{Hom}_K(\Lambda^d V, W)$ von K-Vektorräumen gibt.

(c) Folgere aus Teil (b) folgende, aus der Linearen Algebra 1 bekannten Aussage:

Sei $n = \dim_K(V) < \infty$ und $\Delta, \Delta' : V^n \longrightarrow K$ jeweils eine Determinantenfunktion. Falls Δ' nicht die Nullabbildung ist, so gibt es ein $a \in K$ mit $\Delta = a\Delta'$.

Abgabe ist am **Freitag 5. Mai 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Definition 2. Sei K ein Körper und seien U, V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : U \times V \longrightarrow W$ heißt *K-bilinear*, falls für alle $a, b \in K$, $u, u_1, u_2 \in U$ und $v, v_1, v_2 \in V$, folgendes gilt:

$$f(au_1 + bu_2, v) = af(u_1, v) + bf(u_2, v) \quad \text{und} \quad f(u, av_1 + bv_2) = af(u, v_1) + bf(u, v_2).$$

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Die äußere Algebra*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Wir erinnern daran, dass $\Lambda^0 V := K$ nach unserer Konvention gilt.

(a) Seien $s, r \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine eindeutige K-bilineare Abbildung

$$\wedge : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$$

gibt, sodass $\wedge(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_s) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$. (Falls $r = 0$, bzw. $s = 0$, so ist das Produkt $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$, bzw. $w_1 \wedge \cdots \wedge w_s$, als $1 \in K = \Lambda^0 V$ zu lesen.)

(b) Sei $n = \dim_K(V)$. Betrachte die direkte Summe $\Lambda V := \oplus_{k=0}^n \Lambda^k V$. Da $\Lambda^0 V = K$, erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$K \longrightarrow \Lambda V, \quad a \mapsto a \in \Lambda^0 V \subset \Lambda V.$$

Zeige, dass ΛV zusammen mit obiger Grundringabbildung sowie mit der in Teil (a) definierten Multiplikation $\wedge$ eine K-Algebra ist; wir nennen ΛV die *äußere Algebra* zu V.

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.