Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 12
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Zusatzpunkte) *Eine Polarzerlegung*
Berechnen Sie die Polarzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Singulärwertzerlegung*
Seien m und n positive natürliche Zahlen und sei $K = \mathbb{R}$ (bzw. $K = \mathbb{C}$). Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix von Rang $\mathrm{rg}(A) = r$. Zeigen Sie, dass es orthogonale (bzw. unitäre) Matrizen $U_1 \in M(m \times m, K)$ und $U_2 \in M(n \times n, K)$ gibt, sodass $A = U_1 S \overline{U_2}^T$ gilt, wobei

$$S = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r \end{pmatrix},$$

mit reellen Eigenwerten $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r > 0$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Quadrate d_i^2 genau die Eigenwerte von $\overline{A}^T A$ sind.

Tipp: Um U_1 und U_2 zu konstruieren, können folgende Schritte nützlich sein.

(a) Zeigen Sie, dass es orthogonale (bzw. unitäre) Matrizen $U_3 \in M(m \times m, K)$ und $U_4 \in M(n \times n, K)$ gibt, sodass folgendes gilt:

$$U_3 A \overline{U_4}^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_1 \in \mathrm{GL}(r, K).$$

(b) Betrachten Sie die Polarzerlegung $A_1 = U_5 P$ von A_1, wobei U_5 orthogonal (bzw. unitär) ist und P selbstadjungiert mit positiven reellen Eigenwerten. Finden Sie eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix $U_6 \in M(r \times r, K)$, sodass $P = U_6 D \overline{U_6}^T$ für eine passende Diagonalmatrix $D \in GL(r, K)$ gilt.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 21. Juli 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Rang und Signatur einer Bilinearform*
Sei n eine positive natürliche Zahl. Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform $\beta \in BF(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R}^n$ die gegeben ist durch

$$\beta(x, y) = \sum_{i \neq j} x_i y_j.$$

Berechnen Sie Rang und Signatur von β.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Eine Matrix deren k-te Potenz orthogonal ist*
Sei n eine positive natürliche Zahl und sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sodass $A^k \in O(n)$ für ein $k \geq 1$.

(a) Betrachten Sie das Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ und betrachten Sie die symmetrische Bilinearform $\beta \in BF(\mathbb{R}^n)$ die gegeben ist durch:

$$\beta(x, y) := \langle x, y \rangle + \langle Ax, Ay \rangle + \cdots + \langle A^{k-1}x, A^{k-1}y \rangle.$$

Zeigen Sie, dass β positiv definit ist und $\beta(x, y) = \beta(Ax, Ay)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Matrix $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gibt, sodass $CAC^{-1} \in O(n)$ gilt.
(Tipp: Verwenden Sie eine orthonormale Basis von β aus Teil (a).)

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.