Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

# Übungsblatt 11
# Lineare Algebra 2

**Aufgabe 1.** (4 Punkte) *Reelle Polynome*

(a) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie, dass $f$ in ein Produkt von reellen Polynomen von Grad kleiner gleich zwei zerfällt, d.h. es gibt Polynome $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[t]$, sodass jedes $f_i$ linear oder quadratisch ist und sodass $f = f_1 \cdots f_m$ gilt.

(Tipp: Sie dürfen verwenden, dass $f$ über den komplexen Zahlen in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt.)

(b) Folgern Sie aus Teil (a), dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad eine reelle Nullstelle besitzt.

(Bemerkung: Diese Folgerung kann auch aus dem Zwischenwertsatz aus Analysis 1 hergeleitet werden. Dazu muss man lediglich einsehen, dass ein normiertes reelles Polynom $f(t)$ von ungeradem Grad eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = \pm\infty$ liefert.)

**Aufgabe 2.** (4 Punkte) *Rund um das Lemma XIII.13*
Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum.

(a) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (i) $\ker(f) \subset \ker(f \circ f^{ad})$;
- (ii) $\ker(f^{ad}) \subset \ker(f^{ad} \circ f)$.

Zeigen Sie, dass $\ker(f) = \ker(f^{ad})$ gilt.

(b) Folgern Sie aus Teil (a), dass $\ker(f) = \ker(f^{ad})$ für alle normalen Endomorphismen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gilt.

(Bemerkung: Diese Aussage wurde als Lemma XIII.13(i) in der Vorlesung formuliert und bewiesen. Der dort gegebene Beweis zeigt sogar folgende stärkere Aussage: falls $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal ist, so gilt für alle $v \in V$: $||f(v)|| = ||f^{ad}(v)||$.)

(c) Zeigen Sie, dass für normale Endomorphismen $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f \circ g^{ad} = g^{ad} \circ f$ auch jede Linearkombination $af + bg$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ normal ist.

(d) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, folgendes gilt: $V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^{ad})$.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte) *Selbstadjungierte Endomorphismen*
Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Seien weiterhin $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ selbstadjungierte lineare Endomorphismen von $V$, wobei $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$f \circ g \;\text{ ist selbstadjungiert} \iff f \circ g = g \circ f.$$

**Bitte wenden.**

Abgabe ist am **Freitag 14. Juli 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte) *Eine Charakterisierung der Nullabbildung*
Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei weiterhin $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein linearer Endomorphismus von $V$, wobei $K = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Wir erinnern daran, dass die Spur von $f$ definiert ist als $\mathrm{Spur}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, wobei $A = (a_{ij})$ die darstellende Matrix von $f$ bezüglich einer (beliebigen) Basis von $V$ ist.

Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(i) $f = 0$;

(ii) $f^{ad} \circ f = 0$;

(iii) $\mathrm{Spur}(f^{ad} \circ f) = 0$.

**Allgemeine Bemerkungen:**

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.