Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 10
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Wahr oder falsch?*
Sei n eine positive natürliche Zahl. Entscheiden Sie jeweils mit Begründung ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Beachten Sie dabei, dass die Antwort von n abhängen kann.

(a) Das Produkt AB von zwei symmetrischen rellen Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist symmetrisch;

(b) Das Produkt AB von zwei unitären Matrizen $A, B \in U(n)$ ist unitär;

(c) Jede reelle orthogonale Matrix $A \in O(n)$ ist diagonalisierbar;

(d) Jede unitäre Matrix $A \in U(n)$ ist diagonalisierbar;

(e) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\beta \in BF(V)$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Sei weiterhin $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus, sodass das charakteristische Polynom $p_f(t)$ von f in Linearfaktoren zerfällt. Dann gibt es eine orthogonale Basis von Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ von V, d.h. jeder Basisvektor v_i ist ein Eigenvektor von f und $\beta(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Quadratische Formen*
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $Q : V \longrightarrow K$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(I) Q ist eine quadratische Form wie es in der Vorlesung definiert wurde, d.h. es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V und Elemente $c_{ij} \in K$ für $1 \leq i, j \leq n$, sodass für alle $x_1, \dots, x_n \in K$, folgendes gilt:

$$Q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j.$$

(II) Q erfüllt die Eigenschaften die in der Bemerkung nach Satz XII.5 angegeben wurde, d.h. es gilt folgendes:

(a) für alle $a \in K$ und $v \in V$ gilt: $Q(av) = a^2 Q(v)$;

(b) $\beta(v, w) := Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ definiert eine K-bilineare Abbildung

$$\beta : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \mapsto \beta(v, w).$$

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 7. Juli 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Nullstellen quadratischer Formen*
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 3 und sei $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale quadratische Form. Wir betrachten die Nullstellenmenge von Q:

$$Z(Q) := \{v \in V \mid Q(v) = 0\} \subset V.$$

Zeigen Sie, dass es eine geordnete Basis v_1, v_2, v_3 von V gibt, sodass folgendes gilt. Die Nullstellenmenge $Z(Q)$ ist entweder gegeben durch $Z(Q) = \{0\}$, oder sie stimmt mit der Nullstellenmenge einer der folgenden quadratischen Formen auf V überein:

(a) $Q_1(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i) = x_1^2$;

(b) $Q_2(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i) = x_1^2 - x_2^2$;

(c) $Q_3(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i) = x_1^2 + x_2^2$;

(d) $Q_4(\sum_{i=1}^{3} x_i v_i) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Beschreiben Sie $Z(Q)$ in jedem der obigen Fälle anhand einer Skizze.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Adjungierte Endomorphismen*
Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sei $f : V \longrightarrow V$ ein linearer Endomorphismus von V mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass $f = f^{ad}$ genau dann gilt, wenn $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ orthogonal zueinander sind.

(Tipp: Wiederholen Sie zuerst ein Argument aus der LA1 um zu zeigen, dass die Bedingung $f \circ f = f$ folgendes impliziert: es gibt zwei lineare Unterräume $V_1, V_2 \subset V$ mit $V = V_1 \oplus V_2$, sodass f gegeben ist als Komposition der Projektion $\mathrm{pr}_1 : V \longrightarrow V_1$ auf den ersten Faktor, gefolgt von der Inklusion $V_1 \hookrightarrow V$.)

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.