Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Sommersemester 2017

Übungsblatt 1
Lineare Algebra 2

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eigenschaften des Polynomrings*
Sei R ein kommutativer Ring und betrachte den Polynomring $R[t]$. Für $f \in R[t]$ bezeichne $\deg(f)$ den Grad von f. Wir erinnern daran, dass R Integritätsbereich heißt, falls R nicht der Nullring ist und aus $xy = 0$ in R schon $x = 0$ oder $y = 0$ folgt.

(a) Für $f, g \in R[t]$, zeige man folgende Rechenregeln:

   (i) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$;

   (ii) $\deg(fg) \leq \deg(f) + \deg(g)$;

   (iii) $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ falls R ein Integritätsbereich ist.

(b) Sei R ein Integritätsbereich. Ein Polynom $f \in R[t]$ ist genau dann eine Einheit in $R[t]$, wenn $f \in R$ eine Einheit in R ist.

(c) Zeige, dass $R[t]$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Der Quotientenkörper*
Sei R ein kommutativer Ring, sodass R ein Integritätsbereich ist.

(a) Zeige, dass

$$(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad f_1 g_2 = f_2 g_1$$

eine Äquivalenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ definiert.

(b) Sei $Q(R)$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation in Teil (a); die von $(f, g) \in R \times (R \setminus \{0\})$ repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $\frac{f}{g} \in Q(R)$ bezeichnet. Zeige, dass

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} := \frac{f_1 g_2 + g_1 f_2}{g_1 g_2} \quad \text{und} \quad \frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} := \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2},$$

die Struktur eines Körpers auf $Q(R)$ induziert; $Q(R)$ heißt *Quotientenkörper* von R. (Wohldefiniertheit der Verknüpfungen nicht vergessen!)

Bemerkung: Falls K ein Körper ist, so ist der Polynomring $K[t]$ ein Integritätsbereich nach Aufgabe 1(c). Der in Aufgabe 2(b) konstruierte Körper $Q(K[t])$ heißt dann der *Körper der rationalen Funktionen* in t über K.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 28. April 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Ideale und Quotienten*
Sei R ein kommutativer Ring. Eine additive Untergruppe $I \subset R$ heißt *Ideal*, falls für alle $r \in R$ und alle $x \in I$, $rx \in I$ gilt; d.h. die Untergruppe I ist stabil unter Multiplikation mit Elementen aus R.

(a) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Aus der Linearen Algebra 1 Vorlesung ist bekannt, dass die Relation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in I$$

eine Äquivalenzrelation auf R definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen mit R/I; die von $x \in R$ repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $\overline{x} \in R/I$ bezeichnet. Zeige, dass

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y} \quad \text{und} \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$$

auf R/I die Struktur eines kommutativen Rings induziert; R/I zusammen mit dieser Ringstruktur heißt *Quotienten-* oder *Restklassenring*.

(Tipp: Aus der Linearen Algebra 1 ist bekannt, dass $(R/I, +)$ eine abelsche Gruppe ist.)

(b) Sei S ein kommutativer Ring und $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass der Kern $\ker(\varphi)$ ein Ideal in R ist.

(c) Zeige, dass es für jedes Ideal $I \subset R$ einen kommutativen Ring S und einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ mit $\ker(\varphi) = I$ gibt.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Der Homomorphiesatz für Ringe*
Sei R ein kommutativer Ring und $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus.

(a) Sei $I \subset R$ ein Ideal mit $I \subset \ker(\varphi)$. Zeige, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \longrightarrow S$ gibt, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/I \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

wobei $\pi : R \longrightarrow R/I$, $r \mapsto \overline{r}$, die kanonische Projektion bezeichne.

(b) Zeige, dass $\overline{\varphi}$ in Teil (a) genau dann injektiv ist, wenn $I = \ker(\varphi)$, und dass $\overline{\varphi}$ genau dann surjektiv ist, wenn φ surjektiv ist. Folgere daraus, dass es einen Ringisomorphismus

$$R/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi)$$

gibt; man darf dabei ohne Beweis verwenden, dass das Bild $\operatorname{im}(\varphi)$ ein kommutativer Ring ist, man sollte sich aber vergewissern, dass dies wirklich stimmt.

Bemerkung: Sei R ein kommutativer Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Wir betrachten den in Aufgabe 3 konstruierten Quotientenring R/I zusammen mit dem Ringhomomorphismus

$$\pi : R \longrightarrow R/I, \quad r \mapsto \overline{r}.$$

Aufgabe 4 zeigt, dass das Paar $(R/I, \pi)$ die folgende universelle Eigenschaft hat: für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ mit $I \subset \ker(\varphi)$ gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\overline{\varphi} : R/I \longrightarrow S$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$, sodass $\overline{\varphi}$ injektiv ist falls $I = \ker(\varphi)$. Man zeigt leicht, dass diese universelle Eigenschaft den Quotientenring R/I zusammen mit dem Ringhomomorphismus $\pi : R \longrightarrow R/I$ eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt.

Allgemeine Bemerkungen:

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer **Name und Tutorium** von jedem Gruppenmitglied an.

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.

- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/people/schreied/LA2.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird wieder ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Mittwochs 14–17 Uhr sowie Freitags 13–16 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de). Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.