

# Die Farrell-Jones Vermutung für einige allg. lineare Gruppen

Henrik Rüping

April 23, 2013



Zu einer Gruppe  $G$  und einem Ring  $R$  kann man eine Multiplikation auf dem freien  $R$ -Modul mit Basis  $G$  definieren, indem man

$$G \times G \rightarrow G \quad (g, h) \mapsto gh$$

linear fortsetzt. Dies macht  $R[G]$  zu einem Ring. Im Allgemeinen ist sehr wenig über die Struktur solcher Ringe bekannt.

## Beobachtung

$R[G]$  hat Nullteiler, falls  $R$  Nullteiler hat oder  $G$  nicht torsionsfrei ist.

## Offenes Problem (Nullteilervermutung)

Sei  $k$  ein Körper und  $G$  torsionsfrei. Dann ist  $k[G]$  nullteilerfrei.

## Beobachtung

$$rg \in R[G]^* \Leftrightarrow r \in R^*.$$

Elemente der Form  $rg$  mit  $r \in R^*$  heißen *triviale Einheiten*.

## Beispiel

Der Gruppenring  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]$  ist auch bekannt als  $\mathbb{Z}[t]/(t^5 - 1)$ .

Es gilt:  $(1 - t - t^4)(1 - t^2 - t^3) = 1$ .

Dies ist eine nichttriviale Einheit. All ihre Potenzen sind auch nicht trivial.

## Offenes Problem (Einheitenvermutung)

Sei  $k$  ein Körper und  $G$  torsionsfrei. Dann gibt es keine nichttrivialen Einheiten in  $k[G]$ .

Gegeben eine Matrix  $A \in GL_n(R[G])$ . Die  $m$ -fache Stabilisierung von  $A$  sei die Blockmatrix  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$ , wobei  $I_m \in GL_m(R[G])$  die Einheitsmatrix sei.

## Frage

Kann man  $A$  (nach eventueller Stabilisierung) als Produkt von Elementarmatrizen  $I_n + \lambda e_{i,j}$  für  $\lambda \in R[G]$  und  $i \neq j$  schreiben?

*Fakt:* Die Menge aller Matrizen mit einer solchen Produktzerlegung bildet eine normale Untergruppe von  $GL_\infty(R[G]) = \bigcup_n GL_n(R[G])$ . Es stellt sich heraus, dass dies die Kommutatorgruppe ist. Der Quotient heißt  $K_1(R[G]) = GL_\infty(R[G])_{ab}$ .

Läßt man zusätzlich Matrizen der Gestalt  $\begin{pmatrix} rg & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$  für  $r \in R^*$  zu, so erhält man ebenfalls eine normale Untergruppe von  $GL_\infty(R[G])$ .

Der Quotient heißt Whitehead-Gruppe  $Wh_R(G)$  von  $G$  über  $R$ .

### Beobachtung

$1 - t - t^4 \in GL_1(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5])$  repräsentiert ein nichttriviales Element in  $Wh_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5)$ .

Tatsächlich ist  $Wh_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/5)$  eine unendlich zyklische Gruppe und  $1 - t - t^4$  repräsentiert einen Erzeuger.

Die Whitehead-Gruppe spielt eine große Rolle bei der Klassifikation von hochdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Der s-Kobordismensatz ordnet einem h-Kobordismus von  $M$  nach  $M'$  ein Hindernis in  $Wh_{\mathbb{Z}}(\pi_1(M))$  zu. Falls dieses verschwindet, so sind die beiden Randkomponenten isomorph.

# Die Farrell-Jones Vermutung

Die Farrell-Jones Vermutung beschäftigt sich mit der Frage, wie die  $K$ -Gruppen des Gruppenringes aussehen. Genauer besagt sie, dass die Assembly-Abbildung

$$H_*^G(E_{\mathcal{VCyc}}G, \mathbf{K}_{\mathcal{A}}^G) \rightarrow H_*^G(pt, \mathbf{K}_{\mathcal{A}}^G) = K_*(\mathcal{A}[G])$$

ein Isomorphismus ist.

## Theorem (Bartels-Lück, Wegner)

*Die Farrell-Jones Vermutung gilt für Gruppen, die proper, isometrisch und kokompakt auf endlichdimensionalen CAT(0)-Räumen operieren.*

Bartels-Lück-Reich-R. haben die Kokompaktheitsbedingung abgeschwächt, es wird stattdessen nur ein bestimmtes System offener Mengen verlangt, so dass die Gruppenoperation auf dem Komplement kokompakt ist.

$GL_n(\mathbb{Z})$  erfüllt diese Bedingungen (Bartels-Lück-Reich-R.).

# Nichtpositive Krümmung in metrischen Räumen

Sei  $X$  ein eindeutig geodätischer, metrischer Raum, d.h. je zwei Punkte können mit einer eindeutigen Geodäten verbunden werden. Das *Dreieck*, dass von drei Punkten  $x, y, z$  aufgespannt wird, sei die Vereinigung der drei Verbindungen.

Manche Räume haben die Eigenschaft, dass man zu drei vorgegebenen Seitenlängen bis auf Isometrie genau ein Dreieck mit diesen Seitenlängen findet.

Beispiele für solche Räume sind  $\mathbb{H}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  und viele Bäume.

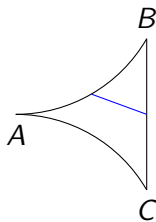
## Beobachtung

Ein nichtdegeneriertes Dreieck in  $\mathbb{R}^2$  kann nie isometrisch zu einem nichtdegenerierten Dreieck in einem Baum sein. (Betrachte den Abstand von einem Punkt zur anderen Seite).

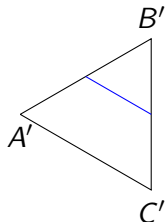
Nun kann man Krümmung von metrischen Räumen definieren, indem man Dreiecke aus  $X$  mit Dreiecken aus  $\mathbb{R}^2$  vergleicht.



# Skizze: CAT(0)-Räume



$X$



$\mathbb{R}^2$

$X$  heißt  $CAT(0)$ -Raum, wenn für jedes Dreieck in  $X$  und jedes Punktpaar auf dem Dreieck der Abstand links nicht größer ist als der Abstand im Vergleichsdreieck.

Sei  $X$  der Raum der Skalierungsklassen von Skalarprodukten auf  $\mathbb{R}^2$ . Dies ist eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Man kann sich  $X$  als obere Halbebene in  $\mathbb{C}$  vorstellen. Gegeben ein  $[s] \in X$ . Wähle den Repräsentanten mit  $\|e_1\|_s = 1$ . Ordne  $s$  nun dem Punkt auf dem Kreis mit Radius  $\|e_2\|_s$  zu, dessen Realteil  $s(e_1, e_2)$  ist.

## Beobachtung

Es gibt einen solchen Punkt.

## Bemerkung

Am Imaginärteil kann man das Volumen der Standardbasis ablesen. Falls man anstatt der Länge von  $e_1$  das Volumen auf 1 normiert, so kann man die Länge von  $e_1$  ablesen. Je größer der Imaginärteil ist, umso kleiner ist die Länge von  $e_1$ .

# Welche geometrischen Bedingungen sind nötig

## Proposition (Bartels-Lück-Reich-R.-Wegner)

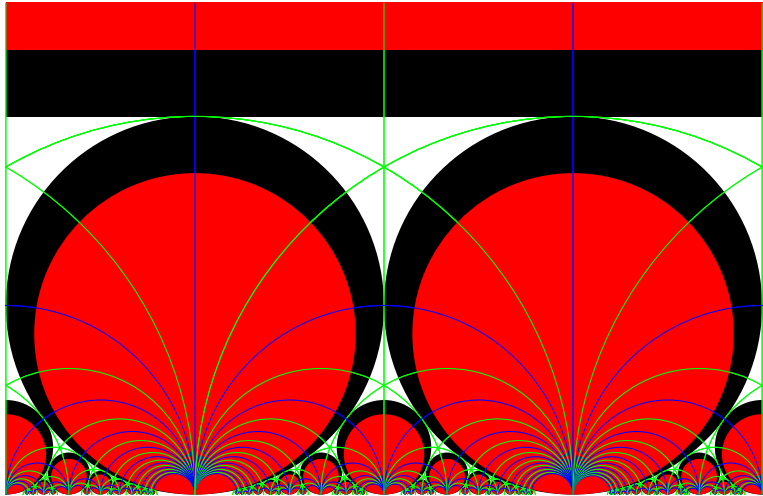
Sei  $X$  ein endlichdimensionaler, properer CAT(0)-Raum mit einer properen und isometrischen Operation einer Gruppe  $G$ . Sei  $\mathcal{U}$  ein System von offenen Mengen mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{U}$  ist  $G$ -invariant ( $g \in G, U \in \mathcal{U} \Rightarrow gU \in \mathcal{U}$ ),
- offene Mengen aus demselben Orbit sind disjunkt,
- $\mathcal{U}$  ist endlichdimensional (es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass jeder Punkt in höchstens  $N$  offenen Mengen enthalten ist),
- die  $G$ -Operation auf  $X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^{-R}$  ist kokompakt für alle  $R$ .  
 $U^{-R}$  bezeichnet  $\{x \in X \mid B_R(x) \subset U\}$ .

Dann gilt die Farrell-Jones Vermutung für  $G$  relativ zu der Familie  $\mathcal{VCyc} \cup \text{Stab}(\mathcal{U})$ . ( $\text{Stab}(\mathcal{U}) = \{H \leq G \mid \exists U \in \mathcal{U} : HU = U\}$ ).

Der Beweis dieser Proposition ist eine Modifikation des Beweises von Bartels-Lück für CAT(0)-Gruppen. Falls  $G$  kokompakt operiert, kann man  $\mathcal{U} = \emptyset$  wählen.

# Skizze der offenen Mengen für $G = GL_2(\mathbb{Z})$ .



Der zweidimensionale Fall ist recht speziell. Im höherdimensionalen kann man jedem direkten Summanden  $W$  von  $\mathbb{Z}^n$  die Menge der (volumennormierten) Skalarprodukte zuordnen, die  $W$  ein Volumen  $\leq 1$  zuordnen.

Für  $n \geq 3$  können sich diese offenen Mengen recht wild schneiden.

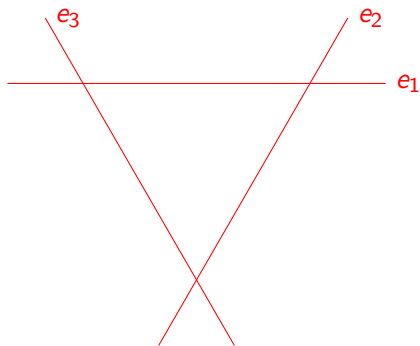
### Beobachtung

Die Funktion, die einem Skalarprodukt  $s$  mit Volumen 1 die Anzahl an nichttrivialen Vektoren  $v \in \mathbb{Z}^3$  mit  $\|v\|_s \leq 1$  zuordnet, ist unbeschränkt.

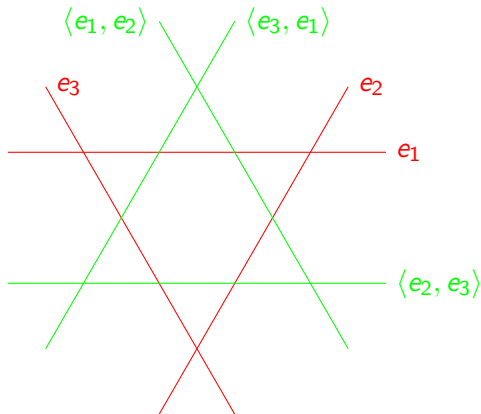
Dies bedeutet, dass dieses System von offenen Mengen nicht endlichdimensional ist. D. Grayson hat einen Weg gefunden, wie man sich aus den Volumenfunktionen durch Linearkombinationen und Supremumsbildung neue Funktionen basteln kann, die dieses Problem nicht mehr haben.

Hier eine Skizze eines Querschnittes (Einbettung:  $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow X(\mathbb{R}^3)$ )

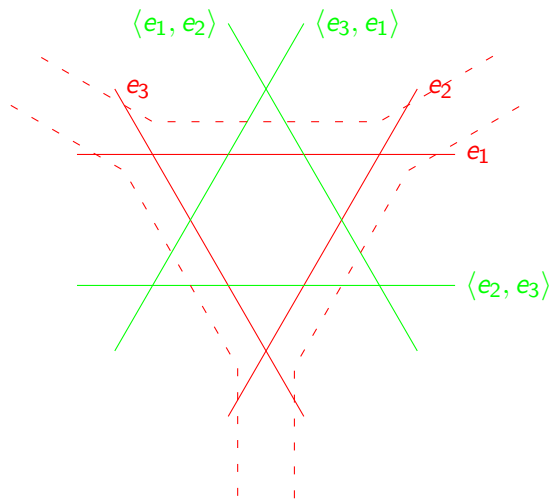
# Querschnitt der offenen Mengen im Raum der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^3$



# Querschnitt der offenen Mengen im Raum der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^3$

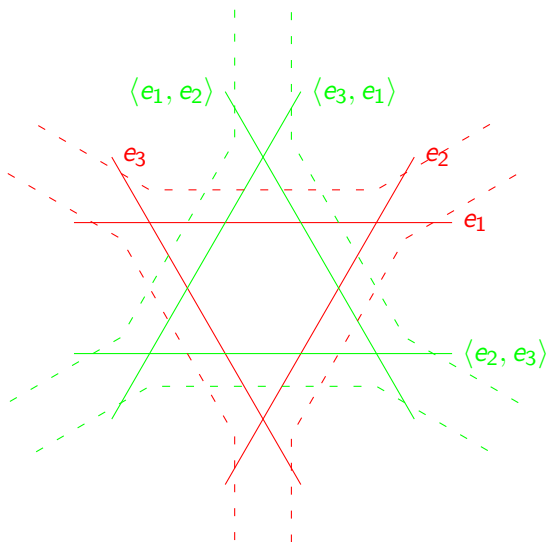


# Querschnitt der offenen Mengen im Raum der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^3$





# Querschnitt der offenen Mengen im Raum der Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^3$



# Was passiert im Funktionenkörperfall?

Sei  $F$  ein endlicher Körper.

$$\nu : F(t) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \frac{f}{g} \mapsto \deg(g) - \deg(f)$$

ist eine Bewertung und sei  $R$  der zugehörige Bewertungsring. Das Analogon zu einem Skalarprodukt auf  $\mathbb{Z}^n$  ist ein endlich erzeugter  $R$ -Untermodul  $S$  maximalen Ranges von  $F(t)^n$ . Skalierungsklassen solcher Untermoduln bilden die Eckenmenge eines simplizialen Komplexes, eines *affinen Gebäudes*. Mit der richtigen Metrik versehen ist dies ein CAT(0)-Raum. Man kann nun einem solchen Modul ein Volumen zuordnen via

$$\ln \text{vol} := -\nu(\lambda) \text{ mit } e_1 \wedge \dots \wedge e_n = \lambda s_1 \wedge \dots \wedge s_n,$$

wobei  $s_1, \dots, s_n$  eine  $R$ -Basis von  $S$  ist und  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $F[t]^n$ .

Weiterhin kann man  $S$  auf einen Untermodul  $W$  von  $F[t]^n$  einschränken via

$$S \mapsto (F(t) \otimes_{F[t]} W) \cap S.$$

Somit kann man nun auch die Länge von Vektoren messen. Die wichtigste Eigenschaft der Volumenfunktionen ist die Subadditivität, d.h.

$$\ln \operatorname{vol}(V \cap W) + \ln \operatorname{vol}(V + W) \leq \ln \operatorname{vol}(V) + \ln \operatorname{vol}(W).$$

Für  $\operatorname{rk}(V) = \operatorname{rk}(W) = 1$  bedeutet dies lediglich, dass der Flächeninhalt eines Parallelogramms kleiner als das Produkt der Seitenlängen ist. Dies gilt auch im Funktionenkörperfall. Dies ist die wichtigste Eigenschaft in der bereits erwähnten Konstruktion von Grayson.

# Was passiert beim Lokalisieren?

*Erinnerung:* Bei der Berechnung des Volumens von  $(\mathbb{Z}^n, s)$  wird eine Basis gewählt. Das Ergebnis ist dann unabhängig von der Wahl der Basis.

Dies klappt nicht mehr, wenn man  $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^n, s)$  ein Volumen zuordnen will. Der Trick besteht darin zusätzlich zum Skalarprodukt noch als Input zu verlangen, welche Basen zugelassen sind. Genauer kann man  $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^n, s, B)$  ein Volumen zuordnen, wobei  $\mathbb{Z}^n \cong B \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]^n$ .  $B$  besagt nun welche Basen erlaubt sind. Wie vorher bilden Reskalierungsklassen solcher  $B$ 's die Eckenmenge eines affinen Gebäudes. In diesem Setting starten die Volumenfunktionen nun auf dem Produkt des Raumes der Skalarprodukte und des neuen affinen Gebäudes.

# Das Hauptresultat

Nun kann man die Proposition auf  $GL_n(\mathbb{Z})$ ,  $GL_n(F[t])$ ,  $GL_n(\mathbb{Z}[S^{-1}])$ ,  $GL_n(F[t][S^{-1}])$  anwenden. Man muss noch die Vererbungseigenschaften der Farrell-Jones Vermutung benutzen um aus der relativen Version die eigentliche Version zu erhalten.

## Theorem

- 1  $GL_n(\mathbb{Z})$  erfüllt die Farrell Jones Vermutung [Bartels-Lück-Reich-R.].
- 2  $GL_n(\mathbb{Z}[S^{-1}])$  erfüllt die Farrell-Jones Vermutung relativ zur Familie der virtuell auflösbaren Untergruppen für jede endliche Menge von Primzahlen  $S \subset F[t]$ .
- 3  $GL_n(F[t])$  erfüllt die Farrell-Jones Vermutung für jeden endlichen Körper  $F$ .
- 4  $GL_n(F[t][S^{-1}])$  erfüllt die Farrell-Jones Vermutung für jeden endlichen Körper  $F$  und jede (endliche) Menge von Primzahlen  $S \subset F[t]$ .

Dies impliziert zum Beispiel, dass für eine torsionsfreie Untergruppe  $G \subset GL_n(F[t][S^{-1}])$  bereits  $Wh_{\mathbb{Z}}(G) = 0$  und jeder endlich erzeugte, projektive  $\mathbb{Z}G$  Modul bereits stabil frei ist. Dies war bisher (meines Wissens nach) nicht bekannt.

**Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit.**