Seminarvortrag* über $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit

Michael Bruening   Thoralf Räsch
Humboldt-Universität zu Berlin

16.Februar 1999

1 Einführung

Fragen bezüglich der Determiniertheit von unendlichen Spielen werden immer wichtiger. Determiniertheit impliziert bekanntlich die gewünschten Regularitätseigenschaften, also die Lebesgue-Meßbarkeit, die Eigenschaft von Baire und die perfekte Mengen Eigenschaft. Damit haben wir Konsequenzen der Determiniertheit, die auch außerhalb der Mengenlehre von Interesse sind.

Wir wissen schon dank Dale und Stuart, daß abgeschlossene Spiele determiniert sind. Wir können sogar einen (oder besser gesagt ω_1-viele) Schritte weiter gehen und uns überlegen, daß auch Borel-Spiele determiniert sind. Der Grundgedanke des Beweises ist dem folgenden sehr ähnlich; man konstruiert nämlich ein abgeschlossenes Hilfsspiel und nutzt dessen Determiniertheit aus. Aber wie *kompliziert* darf ein Spiel werden, ohne die Determiniertheitseigenschaft zu verlieren? Wenn wir schon bei den Borel-Spielen sind, dann liegt es natürlich nahe zu fragen, wie es mit der nächsten Ebene in der Hierachie aussieht: den analytischen Mengen. Wie man sich leicht überlegen kann, ist die Determiniertheit invariant unter Komplementbildung, d.h. es ist äquivalent zu fragen, ob die co-analytischen Mengen determiniert sind. Dieser Frage werden wir hier nachgehen.

Ist es zu erwarten, die Determiniertheit von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen schon in ZF beweisen zu können? Schauen wir uns an, was wir schon wissen. Man kann zeigen, daß die Determiniertheit einer Stufe in der Hierachie der Borel bzw. projektiven Mengen immer die Eigenschaft von Baire in der nächsten Stufe impliziert. Nehmen wir einmal an, wir könnten die Determiniertheit der co-analytischen Mengen wirklich schon in ZF zeigen, dann wären also die $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Mengen Baire-meßbar. Andererseits gibt es in $\mathbf{L}$ eine $\mathbf{\Sigma}^1_2$-Wohlordnung der reellen Zahlen. Das liefert uns einen Widerspruch zu dem bekannten Satz von Kuratowski-Ulam.

Überlegen wir uns, was denn reichte, um auch hier die Determiniertheit zu bekommen. Wir werden daher das folgende Theorem zeigen:

Theorem (D. Martin 1970) *Wenn eine meßbare Kardinalzahl existiert, dann sind alle $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen determiniert.*

*Ein Seminar im WS 1998/99 unter Leitung von Herrn Dipl.-Math. Benedikt Löwe. Der erste Teil stammt aus einer Vorlesung gehalten von Herrn Dr. Achim Ditzen; der letzte Teil geht auf Ideen von Herrn Dr. Martin Zeman zurück.

Damit haben wir einen (ersten) sehr schönen Zusammenhang zwischen der Theorie der Großen Kardinalzahlen und der Deskriptiven Mengenlehre gefunden, die anfangs wenig miteinander zu tun haben schienen. Aber aufgrund der linearen Hiearchie der Großen Kardinalzahlen sind diese vor allem zu einer Möglichkeit geworden, (in ZF) nicht-beweisbare Problemstellungen miteinander vergleichen zu können, nämlich bezüglich ihrer Konsistenzstärke. Mit dem oben genannten Resultat von Martin haben wir eine Möglichkeit gefunden, zumindest das Problem der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit mit Hilfe der Theorie der Großen Kardinalzahlen abschätzen zu können. Aber ist Meßbarkeit die beste Abschätzung in dieser Hierachie? Denken wir an unser Gegenbeispiel für $\mathbf{L}$. Da es in diesem inneren Modell bekanntlich keine meßbaren Zahlen geben kann, spricht nichts dagegen; aber für $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ reichten uns schon die Sharps. Und tatsächlich, Martin 1970 und Harrington 1978 haben (jeweils eine Richtung) gezeigt, daß die gleichzeitige Existenz der Sharps für alle reellen Zahlen äquivalent ist mit der $\mathbf{\Pi}^1_1$-Determiniertheit. Dieses Ergebnis ist zunächst schon verblüffend, denn Determiniertheit behandelt Fragen über Teilmengen vom Kontinuum, also eher niedrig im Universum liegende Mengen, im Gegensatz zu den Großen Kardinalzahlen.

Wir werden zunächst ein Hilfsmittel definieren: die κ-homogenen Bäume. Mit deren Hilfe wird es uns möglich sein, unser Ziel in zwei Teilschritten zu erreichen. Wir werden im Lemma 4.1 zeigen, daß für eine co-analytische Menge eine Suslin-Darstellung existiert mit Hilfe eines Baumes, der sich als κ-homogen entpuppen wird. Das natürlich nur unter der Voraussetzung, daß eine meßbare Kardinalzahl – nämlich κ – existiert. Das Lemma 3.1 wird dann die Determiniertheit dieser Menge zusichern.

2 Grundlagen

In diesem Abschnitt fassen wir einige bekannte Tatsachen zusammen, die wir zwar benutzen werden, aber nicht beweisen wollen. Beweise findet man in der Standard-Literatur zu diesem Thema, etwa in [Ka], [Mo] und [Ke].

Für einen Baum T auf $\omega \times \kappa$ sei

$$T_s := \{u \in {}^{\mathrm{lh}(s)}\kappa \mid \langle s, u\rangle \in T\} \text{ für } s \in {}^{<\omega}\omega$$
$$T_{(x)} := \{u \in {}^{<\omega}\kappa \mid \langle x \restriction \mathrm{lh}(u), u\rangle \in T\} \text{ für } x \in {}^{\omega}\omega.$$

Definition 2.1 *Eine Menge A ist κ-Suslin, wenn ein Baum T auf $\omega \times \kappa$ existiert, so daß $A = \mathrm{p[T]}$ gilt.*

Lemma 2.2 *Eine Teilmenge A des Baire*schen Raumes ist abgeschlossen gdw. ein Baum T auf ω existiert mit $A = [T]$.*

Korollar 2.3 *Wenn A eine analytische Menge ist, dann existiert ein Baum T auf $\omega \times \omega$ mit $A = \mathrm{p[T]}$.*

Lemma 2.4 (Gale, Stewart 1953) *Abgeschlossene Spiele sind determiniert.*

Lemma 2.5 *Sei G ein Spiel mit der Eigenschaft, daß wenn einer der beiden Spieler verliert, das schon zu einem endlichen Zeitpunkt feststeht. Dann ist G determiniert.*

Lemma 2.6 *Sei Γ eine beliebige Stufe in der Hiearchie der* Borel- *bzw. projektiven Mengen. Dann ist Γ determiniert gdw. $\neg\Gamma$ determiniert ist. Dabei bezeichnet $\neg\Gamma$ die Menge der Komplemente von Mengen aus Γ.*

Theorem 2.7 (Rowbottom 1964) *Sei U ein normaler Ultrafilter auf κ und $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \gamma$ für ein $\gamma < \kappa$. Dann gibt es ein $A \in U$, das für f homogen ist.*

Zum Schluß bringen wir die dem Beweis zugrunde liegenden Definitionen.

Definition 2.8 (κ-homogene Bäume) *Sei κ eine Kardinalzahl und T ein Baum auf $\omega \times \kappa$. Dann heißt $\langle T, \langle U_s \mid T_s \neq \emptyset, s \in {}^{<\omega}\omega \rangle\rangle$ ein κ-*homogener Baum*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(a) *U_s ist ein ω_1-vollständiges Maß auf T_s für $T_s \neq \emptyset$.*

(b) *Falls $s \subset t$, beide Element von ${}^{<\omega}\omega$, dann ist U_s die Projektion von U_t, d.h.*

$$X \in U_s \longleftrightarrow \{u \in T_t \mid u \restriction \mathrm{lh}(s) \in X\} \in U_t$$

(c) *Falls $x \in \mathrm{p[T]}$, dann ist $\langle U_{x\restriction n} \mid n < \omega \rangle$ abzählbar vollständig, d.h. für $\langle X_n \mid n < \omega \rangle \in \prod_{n<\omega} U_{x\restriction n}$ existiert ein $d \in {}^{\omega}\kappa$ mit $d \restriction n \in X_n$.*

Bemerkung 2.9 Eigentlich werden wir die Eigenschaft (b) nicht benutzen. Sie wird aber benötigt in Verallgemeinerungen des Beweises, wo mit Ultraprodukten gearbeitet wird. Betrachten wir nun die Ultraprodukt-Einbettungen $\pi_s : \mathbf{V} \longrightarrow \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_s)$.

Die Eigenschaft (b) verlangt eine gewisse Kohärenz der Ultrafilter, die uns Einbettungen $\sigma_{s,t}$ für $s \subset t$ liefert, die jeweils das folgende kommutative Diagramm erfüllen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[rr, "\pi_t"] \arrow[dr, "\pi_s"'] & & \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_t) \\
& \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_s) \arrow[ur, "\sigma_{s,t}"'] &
\end{tikzcd}$$

Erst mit Eigenschaft (b) können wir dann den direkten Limes M_x^* des gerichteten Systems bilden, gegeben durch einen unendlichen Zweig $x \in {}^{\omega}\omega$ in dem Baum ${}^{<\omega}\omega$, nämlich

$$\langle\langle \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_{x\restriction n}) \mid n < \omega \rangle, \langle \sigma_{x\restriction m, x\restriction n} \mid m \leq n \rangle\rangle,$$

so daß wir das folgende Bild erhalten:

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbf{V} \arrow[dll] \arrow[d, "\pi_{x\restriction n}"'] \arrow[dr, "\pi_{x\restriction(n+1)}"] \arrow[drrr] & & & \\
\mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_\emptyset) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_{x\restriction n}) \arrow[r] & \mathrm{Ult}(\mathbf{V}, U_{x\restriction(n+1)}) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_x^*
\end{tikzcd}$$

Die Bedingung (c) besagt dann gerade, daß M_x^* für jede reelle Zahl x fundiert ist.

Definition 2.10 (homogen Suslin) *Eine Teilmenge $A \subset {}^{\omega}\omega$ heißt κ-*homogen Suslin*, falls es einen κ-homogenen Baum $\langle T, \langle U_s \mid T_s \neq \emptyset, s \in {}^{<\omega}\omega \rangle\rangle$ gibt, so daß $A = \mathrm{p[T]}$. Wir nennen A *homogen Suslin*, wenn es ein κ gibt, so daß A κ-homogen Suslin ist.*

3 Determiniertheit homogener Suslin Mengen

Wir beweisen in diesem Abschnitt das folgende

Lemma 3.1 *Homogene* Suslin *Mengen sind determiniert.*

A, G

Beweis: Wir führen den Beweis direkt. Sei also $A \subset {}^{\omega}\omega$ gegeben. Wir betrachten nun das durch A gegebene Spiel $G = G_A$,

Spiel G	I	x_0		x_2		$\cdots$
	II		x_1		$\cdots$	

wobei Spieler I gewinnt, falls $x \in A$, und zeigen dessen Determiniertheit.
/bigskip Die Idee des Beweises läßt sich kurz beschreiben. Wir werden zu unserem Spiel G ein Hilfspiel G^* definieren, das sich als determiniert herausstellen wird. Dann nutzen wir die für G^* gegebene Gewinnstrategie, um eine Gewinnstrategie für den gleichen Spieler in G zu finden. Dabei werden wir Gebrauch von der homogenen Suslin-Darstellung von A machen müssen. Wir gehen im Anschluß an dieses Lemma in der Bemerkung 3.2 darauf etwas näher ein.

T, U_s

Sei also $\langle T, \langle U_s \,|\, T_s \neq \emptyset, s \in {}^{<\omega}\omega \rangle\rangle$ der nach Voraussetzung existierende κ-homogene Baum mit $A = \mathrm{p[T]}$.

G^*

Sei also G^* das folgende Spiel

Spiel G^*	I^*	$\langle x_0, y_0\rangle$		$\langle x_2, y_1\rangle$		$\cdots$
	II^*		x_1		$\cdots$	

wobei Spieler I gewinnt, falls $\langle x, y\rangle \in [T]$.

Das Spiel G^* stellt nun aber in Bezug auf Determiniertheit kein Problem dar, da die zu Grunde liegenden Menge gerade $[T]$ ist und daher natürlich insbesondere abgeschlossen. Also erhalten wir zusammen mit dem Satz von Gale und Stuart:

G^* ist determiniert.

Also existiert für einen Spieler eine Gewinnstrategie. Gehen wir die beiden Fälle durch.

σ^*

Fall 1: Spieler I^* hat eine Gewinnstrategie σ^* in G^*.

Dann finden wir auch sofort eine Gewinnstrategie σ für den Spieler I in dem Spiel G. Dabei entstehe σ aus σ^*, indem sich Spieler I genau an σ^* orientiert und die für das Spiel G nicht benötigten Werte y_i einfach unter den Tisch fallen läßt. σ

Wenn Spieler I nach σ spielt, dann hat er auch eine beliebige Partie gewonnen, denn es gilt nach Voraussetzung des Falles:

$$\langle x, y \rangle \in [T], \text{ d.h. } x \in \mathrm{p}[\mathrm{T}] = A.$$

⊠(Fall 1)

Es bleibt noch der

Fall 2: Spieler II* hat eine Gewinnstrategie τ^* in G^*. τ^*

Hier müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir definieren auch hier eine Strategie τ f"ur den Spieler II aus τ^*. Danach zeigen wir, daß τ für den Spieler II im Spiel G eine Gewinnstrategie ist. Um aber τ^* nutzen zu können, müssen wir eine geeignete (gültige) Partie in G^* finden. Im Gegensatz zu Fall 1, wo wir zuviel Information hatten, nämlich die y_i-Werte, fehlen uns diese hier. Wie wählen wir die Werte y geeignet aus, so daß wir eine *vernünftige* Strategie τ bekommen? An dieser Stelle nutzen wir die Maße U_s, die wir bisher nicht benötigt haben.

Wir definieren τ induktiv über die Länge des Spiels. Sei also im n-ten Zug Spieler II an der Reihe, also hat Spieler I gerade das Paar $\langle x_{2n}, y_n \rangle$ gespielt. Dann sei die Antwort $\tau(x \upharpoonright (2n+1))$ von Spieler II, gegeben durch τ

$$\tau(x \upharpoonright (2n+1)) := \text{ dasjenige } k < \omega \text{ mit } X_n^{(k)} \in U_{x \upharpoonright n}, \tag{3.1}$$

wobei $X_n^{(k)} := \{y \in T_{x \upharpoonright n} \mid \tau^*(x \upharpoonright (2n+1), y) = k\}$.

Aufgrund der Eigenschaften der U_s ist (3.1) korrekt definiert. (Die Existenz folgt aus der ω_1-Vollständikeit. Induktiv über $n < \omega$ schließt man aus der Annahme des Falls 2 zusammen mit der obigen Definition, daß $T_{x \upharpoonright n} \neq \emptyset$ ist.)

Wir zeigen nun die folgende

Behauptung: τ ist eine Gewinnstrategie für Spieler II in G.

Beweis der Behauptung: Angenommen, das wäre nicht der Fall; dann gibt es eine Partie $x \in {}^\omega\omega$ in dem Spiel G, welche entsprechend τ gespielt wurde und trotzdem $x \in A = \mathrm{p}[\mathrm{T}]$ gilt, d.h. Spieler II hat verloren.

Wenn diese Partie entsprechend τ gespielt wurde, dann bedeutet das gerade, daß Spieler II seine Züge genau wie in (3.1) gewählt hat. Das heißt nun aber wiederum, daß

$$X_n^{(x_{2n+1})} \in U_{x \upharpoonright n} \text{ für alle } n < \omega \tag{3.2}$$

ist. Wegen der abzählbaren Vollständigkeit der Maße $\langle U_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ existiert dann aber ein $d \in {}^\omega\kappa$ mit

$$d \upharpoonright (n+1) \in X_n^{(x_{2n+1})} \text{ für alle } n < \omega. \tag{3.3}$$

Schauen wir uns nun die folgende Partie von G^* an:

Spiel G^*	I^*	$\langle x_0, d_0\rangle$		$\langle x_2, d_1\rangle$		$\cdots$
	II^*		x_1		$\cdots$	

(3.4) Diese Partie ist entsprechend τ^* gespielt,

denn $x_{2n+1} = \tau^*(x \restriction (2n+1), d \restriction (n+1))$ wegen (3.3) und der Definition von $X_n^{(k)}$ für beliebiges $n < \omega$.

Nach unserer Annahme ist $x \in A = \mathrm{p}[\mathrm{T}]$. Außerdem gilt $d \restriction n \in T_{x\restriction n}$, d.h. $\langle x \restriction n, d \restriction n\rangle \in T$, für alle $n < \omega$. Also gewinnt Spieler I nach der Gewinnstrategie τ^* für II*. Widerspruch. ⊠(Behauptung)

Damit ist τ doch wie gewünscht. ⊠(Fall 2)

Unser Ziel ist erreicht; das Spiel G ist determiniert. ⊠(Lemma 3.1)

Bemerkung 3.2 Wir sehen an diesem Beweis genau, wo wir die homogene Suslin-Darstellung von A benötigt haben: Unser eigentliches Ziel ist es, $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen A zu betrachten. Wir können einen Baum T finden, so daß $A = \mathrm{p}[\mathrm{T}]$ gilt. Diese Eigenschaft war die einzig nötige, um das Hilfsspiel G^* zu definieren und den Fall 1 zu beweisen. Wenn wir uns den Fall 2 genauer anschauen, dann stellt sich gerade am Anfang das Problem, wie wir die nötigen y_i bereitstellen können, so daß wir die Gewinnstrategie τ^* ausnutzen können. Genau an dieser Stelle haben wir die homogene Suslin-Darstellung unserer Menge A ausgenutzt. Mit Hilfe der Maße U_s war es uns möglich geworden, derart Werte y_i zu wählen, so daß die damit definierte Strategie τ eine Gewinnstrategie für den Spieler II wurde.

4 Eine Darstellung von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen

Unser eigentliches Ziel erreichen wir nun mit dem folgenden Lemma.

Lemma 4.1 *Wenn κ meßbar, dann ist jede $\mathbf{\Pi}^1_1$-Menge κ-homogen* Suslin.

Beweis: Als erstes analysieren wir, was wir schon wissen über die Darstellung von $\mathbf{\Pi}^1_1$-Mengen. Hierfür werden wir die Meßbarkeit von κ gar nicht benötigen. Sei also
A, B $\kappa \geq \omega_1$ und A eine beliebige co-analytische Menge. Setze $B := {}^\omega\omega \setminus A \in \mathbf{\Sigma}^1_1$. Dann gibt es eine abgeschlossene Menge C, so daß $x \in B \longleftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\, (\langle x, y\rangle \in C)$.
T Natürlich läßt sich C als Menge von Zweigen durch einen geeigneten Baum T auf $\omega \times \omega$ darstellen, d.h. $C = [T]$, also gilt:

(4.1) $B = \mathrm{p}[\mathrm{T}]$.

Daher erhalten wir sofort die folgenden Äquivalenzen:

(4.2)
$$\begin{aligned} x \in B &\longleftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\, (\langle x, y\rangle \in [T]) \\ &\longleftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega\, (y \in [T_{(x)}]) \\ &\longleftrightarrow \langle T_{(x)}, \supset\rangle \text{ ist nicht fundiert,} \end{aligned}$$

Also

(4.3) $x \in A \longleftrightarrow \langle T_{(x)}, \supset\rangle$ ist fundiert.

Entwickeln wir die rechte Bedingung weiter, um einen Baum zu bekommen, der zwar bzgl. der Menge A die gleiche Eigenschaft wie T hat, aber der zu einem κ-homogenen Baum erweitert werden kann. Dazu benötigen wir die sogenannte KLEENE-BROWER Ordnung auf ${}^{<\omega}\omega$. Setze $<_{KB}$

$$s <_{KB} t \;:\longleftrightarrow\; s \supset t \;\vee\; \exists i\,(s \restriction i = t \restriction i \wedge s(i) < t(i))$$

Dann gilt:

(4.4) $\langle T, \supset\rangle$ ist fundiert $\longleftrightarrow \langle T, <_{KB}\rangle$ ist fundiert.

BEWEIS VON (4.4): Die Richtung $(\leftarrow)$ ist offensichtlich erfüllt, da $<_{KB}$ eine Erweiterung von $\supset$ ist. Für die andere Richtung $(\rightarrow)$ beweisen wir die Kontraposition. Sei also $\langle t_i | i < \omega\rangle$ eine $<_{KB}$-absteigende Folge mit $t_i \in T$. Es genügt dann, einen unendlichen Zweig in T zu finden. Um ein solches $x \in [T]$ zu finden, setze

$$x(n) := \min\{t_i(n) \mid \mathrm{lh}(t_i) > n \;\wedge\; \forall m < n(t_i(m) = x(m))\}$$

Falls diese Definition für alle natürlichen Zahlen n korrekt durchgeführt werden kann, dann hätten wir ein solches x gefunden. Überzeugen wir uns also davon, daß diese Definition nicht zusammenbricht.
Induktiv nehmen wir nun an, daß $x \restriction n$ für ein $n > 0$ definiert werden kann.
Also existiert ein $i < \omega$ mit $t_i \restriction n = x \restriction n$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall A: $\mathrm{lh}(t_i) > n$: Dann ist $x(n)$ als Minimum einer nichtleeren Menge definiert.

Fall B: $\mathrm{lh}(t_i) = n$: Betrachten wir dann t_{i+1}. Wegen $t_{i+1} <_{KB} t_i$ haben wir wiederum zwei Fälle, wobei der erste nicht eintreten kann.

Fall B.1: $\exists j < n\,(t_i \restriction j = t_{i+1} \restriction j \;\wedge\; t_{i+1}(j) < t_i(j))$.
Das würde aber der Minimalität von $x(j)$ widersprechen.

Fall B.2: $t_{i+1} \supset t_i$.
Dann existiert aber auch $t_{i+1}(n)$ und somit ist $x(n)$ definiert. $\boxtimes$ (4.4)

Nun können wir unsere Äquivalenzen von (4.3) weiterführen.

(4.5)
$$\begin{aligned} x \in A \quad &\longleftrightarrow \quad \langle T_{(x)}, \supset\rangle \text{ ist fundiert} \\ &\longleftrightarrow \quad \langle T_{(x)}, <_{KB}\rangle \text{ ist fundiert} \\ &\longleftrightarrow \quad \langle {}^{<\omega}\omega, <_x\rangle \text{ ist fundiert} \end{aligned}$$

wobei $<_x$ definiert ist durch $<_x$

$$\begin{aligned} s <_x t \;\longleftrightarrow\; \quad & (s,t \in T_{(x)} \;\wedge\; s <_{KB} t) \;\vee \\ & (s \notin T_{(x)} \;\wedge\; t \in T_{(x)}) \;\vee \\ & (s,t \notin T_{(x)} \;\wedge\; s \prec t) \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $\prec$ eine beliebige lineare Ordnung von ${}^{<\omega}\omega$ vom Typ ω mit $s \subset t \longrightarrow s \prec t$. Weil $<_x$ eine Erweiterung von $<_{KB}$ ist und eine unendliche $<_x$-absteigende Folge schon bis auf endlich viele in $T_{(x)}$ liegen muß, gilt auch die zuletzt behauptete Äquivalenz.

Bevor wir mit dieser neuen Ordnung weiterarbeiten, halten wir zwei einfache Eigenschaft fest.

(4.6) $<_x$ ist linear.

(4.7) Falls $x \upharpoonright n = y \upharpoonright n$, so gilt $T_{(x)} \upharpoonright {}^{<n}\omega = T_{(y)} \upharpoonright {}^{<n}\omega$ und daher auch $<_x \upharpoonright {}^{<n}\omega = <_y \upharpoonright {}^{<n}\omega$.

Sei nun $\langle s_i | i < \omega \rangle$ die zu $\prec$ gehörige monotone Aufählung von ${}^{<\omega}\omega$. Dann können wir eine entscheidene aber offensichtliche Beobachtung machen.

(4.8) $\langle {}^{<\omega}\omega, <_x \rangle$ ist fundiert gdw. es existiert $g \in {}^{\omega}\kappa$ mit $(s_i <_x s_j \longleftrightarrow g(i) \in g(j))$ für $i, j < \omega$.

D.h. g erhält die Ordnung von $<_x$ modulo der Aufzählung $\langle s_i | i < \omega \rangle$. Setze nun

C $C := \{ \langle x, y \rangle \in {}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}\kappa \mid \forall i, j \, (s_i <_x s_j \longleftrightarrow y_i \in y_j) \}$. C ist abgeschlossen.

$\tilde{T}$ Es existiert also ein Baum $\tilde{T}$ mit $C = [\tilde{T}]$; wir können $\tilde{T}$ sogar genau beschreiben:

(4.9) $\langle u, v \rangle \in \tilde{T} \; :\longleftrightarrow \; \forall x \in {}^{\omega}\omega \, [u \subset x \rightarrow \forall i, j < \mathrm{lh}(v) \, (s_i <_x t_j \leftrightarrow v_i \in v_j)]$

Also ist $\langle u, v \rangle$ genau dann in $\tilde{T}$, wenn v die Ordnung von $<_x$ modulo $\langle s_i | i < \omega \rangle$ erhält für alle Erweiterungen x von u. Offensichtlich leistet $\tilde{T}$ das gewünschte. Aus unseren bisherigen Äquivalenzen (4.5) zusammen mit (4.8) bekommen wir jetzt:

(4.10) $x \in A \longleftrightarrow \exists y \in {}^{\omega}\kappa \, \langle x, y \rangle \in [\tilde{T}]$, also $A = \mathrm{p}[\tilde{\mathrm{T}}]$.

Mit ihr werden wir jetzt zum Ziel kommen, indem wir die Meßbarkeit von κ ins Spiel bringen. Wir möchten betonen, daß wir diese κ-Darstellung von A auch ohne die Meßbarkeit von κ bekommen.

U Sei also U ein normaler Ultrafilter auf κ. Wir werden jetzt im zweiten Teil des Beweises Maße $\langle U_s | \tilde{T}_s \neq \emptyset, s \in {}^{<\omega}\omega \rangle$ finden, so daß $\tilde{T}$ zusammen mit $\langle U_s | \tilde{T}_s \neq \emptyset \rangle$ ein κ-homogener Baum ist. Damit wäre der Beweis komplett.

Dazu benötigen wir als erstes die folgende

$U_{(n)}$ **Bemerkung:** $U_{(n)}$ *ist ein* κ*-vollständiger Ultrafilter auf* $[\kappa]^n$ *, wobei*

$$A \in U_{(n)} \longleftrightarrow \exists B \in U \, [B]^n \subset A \text{ für } A \in [\kappa]^n.$$

Einfaches *Nachrechnen* bestätigt schnell die Filtereigenschaften. Für den Nachweis der zusätzlichen Ultrafiltereigenschaft hilft der Satz von Rowbottom (Theorem 2.7) angewendet auf die charakteristische Funktion eines beliebigen $X \subset [\kappa]^n$.

Definiere nun Bijektionen für $s \in {}^{<\omega}\omega$ wie folgt:

π_s

$$\pi_s : \tilde{T}_s \longrightarrow [\kappa]^{\mathrm{lh}(s)} \text{ gegeben durch } \pi_s(t) := \mathrm{rng}(t).$$

Die Injektivität von π_s bekommen wir aus der ordnungserhaltenden Eigenschaft in (4.9).

Setze dann U_s

$$U_s := \{\pi_s^{-1\prime\prime} A \mid A \in U_{(\mathrm{lh}(s))}\} \text{ für } s \in {}^{<\omega}\omega, \tilde{T}_s \neq \emptyset,$$
$$\text{d.h. } A \in U_s \longleftrightarrow \pi_s'' A \in U_{(\mathrm{lh}(s))}$$

Wir zeigen jetzt, daß die so definierte Maßfolge das gewünschte leistet.

Behauptung: *Durch $\langle U_s | \tilde{T} \neq \emptyset \rangle$ wird $\tilde{T}$ zu einem κ-homogenen Baum.*

Beweis der Behauptung: Wir zeigen die Eigenschaften entsprechend der Definition 2.8.

zu (a). U_s ist ein ω_1-vollständiges Maß auf $\tilde{T}_s$ nach der oben stehenden Bemerkung.

zu (b). U_s ist Projektion von U_t für $s \subset t$, d.h. $X \in U_s \longleftrightarrow \{u \in \tilde{T}_t \mid u \upharpoonright \mathrm{lh}(s) \in X\} \in U_t$. Das folgt sofort aus $X \in U_s \longleftrightarrow \pi_s'' X \in U_{\mathrm{lh}(s)} \longleftrightarrow \exists B \in U [B]^{\mathrm{lh}(s)} \subset \pi_s'' X$ und $\{u \in \tilde{T}_t \mid u \upharpoonright \mathrm{lh}(s) \in X\} \in U_t \longleftrightarrow \exists B \in U\ [B]^{\mathrm{lh}(t)} \subset \{\pi_t(u) \mid u \in \tilde{T}_t, u \upharpoonright \mathrm{lh}(s) \in X\}$.

zu (c). Wir wollen die abzählbare Vollständigkeit zeigen. Sei also $x \in \mathrm{p}[\tilde{\mathrm{T}}]$, $A_n \in U_x \upharpoonright n$ für jedes $n < \omega$. Wir suchen nach einem $d \in {}^\omega\kappa$, so daß für jedes $n < \omega$ gilt: $d \upharpoonright n \in A_n$.

Wir wollen jetzt erneut den Satz von Rowbottom anwenden:

Setze dazu $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2$ wie folgt: $f(a) = 1 \longleftrightarrow a \in \pi''_{x \upharpoonright \mathrm{lh}(a)} A_{\mathrm{lh}(a)}$. Dann existiert ein für f homogenes $B \in U$. Es muß $f''[B]^n = \{1\}$ für alle $n < \omega$ gelten. Angenommen, es gelte nicht. Dann gilt $[B]^n \cap \pi''_{x \upharpoonright n} A_n = \emptyset$ nach Definition von f. Aber beide am Durchschnitt beteiligten Mengen liegen im Ultrafilter $U_{(n)}$. Widerspruch.

Da $x \in A = \mathrm{p}[\tilde{\mathrm{T}}]$, ist nach (4.5) $<_x$ fundiert. Sei also $d : \omega \longrightarrow B$ eine Einbettung von $<_x$ modulo $\langle s_i | i < \omega \rangle$ in $\in\upharpoonright B$, d.h. $\langle x \upharpoonright n, d \upharpoonright n \rangle \in \tilde{T}$ für jedes $n < \omega$. Nach der Homogenität von B gilt $[B]^n \subset \pi''_{x \upharpoonright n} A_n$ für jedes $n < \omega$. Aber $\pi_{x \upharpoonright n}(d \upharpoonright n) = \mathrm{rng}(d \upharpoonright n) \in [B]^n$. Also $d \upharpoonright n \in A_n$ für alle $n < \omega$.

Damit sind alle geforderten Eigenschaften nachgewiesen. ⊠(Behauptung)

Also ist unsere Menge A κ-homogen Suslin. ⊠(Lemma 4.1)

Literatur

[Di] Ditzen, A.: *Einführung in die Deskriptive Mengenlehre,* Skriptum zu einer Vorlesung im WS 1997/98 an der Humboldt-Universität zu Berlin.

[Ka] Kanamori, A.: *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994.

[Ke] Kechris, A.S.: *Classical Descriptive Set Theory,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994.

[Mo] Moschovakis, Y.N.: *Descriptive Set Theory,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1980.