

# Lineare Algebra

AOR Dr. Thoralf Räsch  
Mathematisches Institut  
der Universität Bonn

**Version 1.1**  
28. März 2012

\* \* \*

Dieses Skript entstand während meiner Vorlesung im Sommersemester 2009. Es basiert auf Skript-Vorlagen von Herrn Professor Koepke aus vergangenen Semestern und wurde wegen der aktualisierten Inhalte der neuen Studiengänge erweitert bzw. angepasst.

\* \* \*

Für die Erstbearbeitung im Sommersemester 2009 danke ich meiner Tutorin Anika Markgraf für die tatkräftige Unterstützung bei der Erstellung einer  $\text{\LaTeX}$ -Vorlage der Tafelbilder, so dass ich überhaupt in diesem turbulenten Semester zeitlich in der Lage war, ein solches Skript zu verfassen. Darüber hinaus danke ich den Studenten der Informatik, die mir die Finanzierung einer Tutorin für diese Zwecke durch ihre Studienbeiträge überhaupt ermöglichten.

\* \* \*

Ich danke Herrn Angel Koutev für die intensive und engagierte Unterstützung bei der Überarbeitung des Skriptes im Sommersemester 2011. Außerdem bedanke ich mich bei den Studierenden aus dem Kurs im Wintersemester 2011/12 für die hilfreichen Kommentare; insbesondere bei Lea Krüger, Cina Razzaghi, Roman Schmitz, Ruben Sparka und Martin Üding.

\* \* \*



## Inhaltsverzeichnis

1. Lineare Gleichungssysteme	5
Gleichungen	5
Lineare Gleichungssysteme	6
Lineare Gleichungssysteme spezieller Gestalt	7
Der Gauß-Algorithmus	9
2. Vektorräume	13
Der Raum $K^n$	13
Untervektorräume	17
3. Gruppen, Ringe, Körper	21
Gruppen	22
Ringe	23
Teilbarkeit und modulare Arithmetik	25
4. Komplexe Zahlen	28
Definition der komplexen Zahlen	28
Komplexe quadratische Gleichungen	30
Komplexe Zahlen als reelle Ebene	31
Komplexe Zahlen als Polarkoordinaten	32
Anwendungen	34
5. Linearkombinationen und Basen	35
Linearkombinationen und lineare Unabhängigkeit	35
Existenzsätze für Basen	38
6. Lineare Abbildungen	50
Grundlagen Linearer Abbildungen	50
Endliche Beschreibung von Homomorphismen	56
Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume	57
Der Dimensionssatz	58
7. Die Welt der Matrizen	62
Darstellende Matrizen	62
Matrizenrechnung	64
Lineare Abbildungen und Matrizen	70
8. Anwendungen von Matrizen	73
Matrizen als Kodierwerkzeug: Lineare Codes	73
Matrizen als Drehungen in der reellen Ebene	75
Matrizen als Spiegelungen in der reellen Ebene	78
Matrizen als Elementare Umformung: Vertauschen von zwei Zeilen	80
Matrizen als Elementare Umformung: Skalarmultiplikation einer Zeile	81

Matrizen als Elementare Umformung: Addition zweier Zeilen	82
9. Matrizen und lineare Gleichungssysteme	84
Geometrie der Lösungsmengen	84
Gaußscher Algorithmus	88
Algorithmus zum Invertieren von Matrizen	88
10. Koordinatentransformation	91
Basiswechsel	91
Darstellende Matrizen von linearen Abbildungen bezüglich beliebiger Basen	94
Darstellende Matrizen von Endomorphismen	98
11. Eigenwerte und Eigenvektoren	102
Grundlegende Begriffe	102
Eigenwerte und Eigenvektoren an bekannten Beispielen	103
Eigenräume zu Eigenwerten	105
Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren	106
Vorläufige Strategie des Diagonalisierens	108
12. Determinanten von Matrizen	112
Determinanten von Matrizen	113
Determinanten und Gaußscher Algorithmus	116
Praktisch Determinanten berechnen	120
Die Cramersche Regel	124
Determinanten und Volumina	125
13. Charakteristische Polynome & Diagonalisierbarkeit	127
Diagonalisieren an Beispielen	130
MEGA-Beispiel zur Diagonalisierbarkeit	132
Ausblick Hauptachsentransformation	137
14. Euklidische Vektorräume	140
Geometrische Begriffe in der reellen Ebene	140
Skalarprodukte	142
Normen	143
Orthogonalität	145
Orthonormalsysteme	147
Orthogonale Zerlegungen und Projektionen	150
Orthogonale Abbildungen	153
15. Lösungshinweise	156
Index	168

## 1. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Gleichungssysteme finden wir überall in der Mathematik. In der Linearen Algebra werden wir uns vor allem mit den so genannten linearen Gleichungen beschäftigen.

**Gleichungen.** Wir arbeiten über einem Ring oder Körper. Formal lernen wir diese Begriffe erst im dritten Kapitel dieses Skripts kennen, ich werde die Sätze hier allerdings jetzt schon so allgemein halten. Bis zum dritten Kapitel können Sie sich jedes Mal bei Ring oder Körper die bekannten reellen Zahlen vorstellen – das reicht für den Anfang und das Verständnis.

Eine Gleichung ist eine Formel  $t(x_1, \dots, x_n) = b$ , wobei  $t$  ein arithmetischer Term mit Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$  ist.

**Beispiel 1.1.** Es gibt verschiedene Typen von Gleichungen:

- (a)  $a \cdot x = b$  lineare Gleichung mit einer Unbekannten
- (b)  $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$  quadratische Gleichung mit einer Unbekannten
- (c)  $a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$  polynomielle Gleichung  $n$ -ten Grades mit einer Unbekannten
- (d)  $a \cdot x + b \cdot y = c$  lineare Gleichung mit zwei Unbekannten
- (e)  $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 = r^2$  quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten

Eine Gleichung ist eine Bedingung an die Unbekannten der Gleichung. Gesucht ist jeweils die Lösungsmenge  $\{(x_1, \dots, x_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) = b\}$ . Die Bestimmung der Lösungsmenge verläuft so, dass die Gleichung  $t(\bar{x}) = b$  zu einer übersichtlichen oder expliziten Formel  $\varphi(\bar{x})$  umgeformt wird, sodass

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) = b\} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

ist.

*Lineare Gleichungen in einer Unbekannten.* Wir betrachten die lineare Gleichung  $a \cdot x = b$  über einem Körper  $\mathbb{K}$ .

Fall 1:  $a \neq 0$

Dann ist  $a \cdot x = b$  äquivalent zu  $x = a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b$ . In diesem Fall ist die Lösungsmenge einelementig:

$$\{x \mid x = a^{-1} \cdot b\} = \{a^{-1} \cdot b\}$$

Fall 2:  $a = 0$  und  $b \neq 0$

Dann ist die Gleichung  $a \cdot x = b$  immer unlösbar. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge:  $\{x \mid a \cdot x = b\} = \emptyset$

Fall 3:  $a = 0$  und  $b = 0$

Dann ist die Gleichung  $a \cdot x = b$  immer wahr. Die Lösungsmenge ist dann der gesamte Körper:  $\{x \in \mathbb{K} \mid a \cdot x = b\} = \mathbb{K}$

Insgesamt erhalten wir folgende Gesamtlösungsmenge :

$$\{x \in \mathbb{K} \mid (a \neq 0 \text{ und } x = a^{-1} \cdot b) \text{ oder } (a = 0 \text{ und } b = 0)\}$$

*Quadratische Gleichungen in einer Unbekannten.* Wir betrachten die quadratischen Gleichungen  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  über dem Körper  $\mathbb{R}$ .

Fall 1:  $a = 0$

Dann ist die Gleichung linear.

Fall 2:  $a \neq 0$

Dann ist die Gleichung äquivalent zu  $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$ . Wir setzen abkürzend  $p = \frac{b}{a}$  und  $q = \frac{c}{a}$  an und betrachten somit die Gleichung  $x^2 + p \cdot x + q = 0$ .

Nach quadratischer Ergänzung gilt:  $x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$  und nach binomischer Formel gilt:  $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$

Fall 2.1:  $-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$

Dann kann man die Quadratwurzel ziehen und erhält

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Fall 2.2:  $-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 < 0$

Dann können wir über  $\mathbb{R}$  keine Wurzel ziehen.

Allgemein erhalten wir als Lösungsmenge für die Gleichung  $x^2 + p \cdot x + q = 0$  :

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ und } \left( x = -\frac{p}{2} + \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \right. \right. \\ \left. \left. \text{oder } x = -\frac{p}{2} - \sqrt{-q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \right) \right\}$$

und die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  wird deutlich komplizierter (logische Verknüpfung des linearen Falls mit dem gerade behandelten Fall  $a \neq 0$ ).

**Bemerkung 1.2.** Über dem Grundkörper  $\mathbb{C}$  gibt es auch für den letzten Fall Lösungen. Dies untersuchen wir in Kapitel 3.

\* \* \*

**Lineare Gleichungssysteme.** Gerade wenn man Gleichungen in mehreren Unbekannten betrachtet, spielen Systeme von Gleichungen eine wichtige Rolle. Mittels einer Gleichung in mehreren Unbekannten beschreibt man einen Zusammenhang dieser Variablen. Je mehr Gleichungen man in Konjunktion zusammenfasst, desto einschränkender ist die beschriebene Bedingung und somit desto kleiner die Lösungsmenge.

**Definition 1.3.** Sei  $K$  ein Körper. Ein lineares Gleichungssystem (kurz LGS) für die Unbekannten  $x_1, \dots, x_m$  ist ein System von linearen Gleichungen der Gestalt:

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

Dabei sind die  $a_{ij}$  und  $b_i$  Körperelemente. Die  $a_{ij}$  werden als Koeffizienten des Systems bezeichnet. Wir bezeichnen ein solches System gelegentlich auch mit  $Ax = b$ .

Das System heißt **homogen**, falls  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  gilt. In diesem Fall schreiben wir auch kurz:  $Ax = 0$ . Ansonsten heißt das System **inhomogen**.

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  ist

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A, b) &= \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1, \dots, x_m \in K, \text{ und} \\ & a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n\} \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem heißt **lösbar**, wenn  $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ . Das lineare Gleichungssystem heißt **eindeutig lösbar**, wenn die Lösungsmenge genau ein Element enthält.

\* \* \*

**Lineare Gleichungssysteme spezieller Gestalt.** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  über dem Körper  $K$  in Diagonalgestalt:

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem können wir schnell lösen:

Fall 1: Für alle  $i \leq n$  gilt  $a_{ii} \neq 0$ .

Dann ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar mit der Lösungsmenge:  $\text{Lös}(A, b) = \left\{ \left( \frac{b_1}{a_{11}}, \dots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right) \right\}$

Fall 2: Es gibt ein  $i \leq n$  mit  $a_{ii} = 0$  und  $b_i \neq 0$ .

Dann ist das gesamte lineare Gleichungssystem nicht lösbar, da die  $i$ -te Gleichung nicht lösbar ist. Es gilt also:

$$\text{Lös}(A, b) = \emptyset$$

**Fall 3:** Für alle  $i \leq n$  mit  $a_{ii} = 0$  gilt  $b_i = 0$ .

Dann ist das lineare Gleichungssystem lösbar mit :

$$\text{Lös}(A, b) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \text{für } i \leq n \quad \text{mit} \quad a_{ii} \neq 0 \text{ gilt } x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}\}$$

**Bemerkung 1.4.** Ein homogenes LGS ist immer lösbar!

Betrachten wir nun ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  in Zeilenstufenform (ZSF):

$$\begin{array}{rcccc} a_{1j(1)}x_{j(1)}+ & \dots & + \dots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ & a_{2j(2)}x_{j(2)}+ & \dots & + \dots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{ij(i)}x_{j(i)} & + \dots + a_{im}x_m = & b_i \end{array}$$

mit  $i \leq n$  und Pivot-Koeffizienten, oder Pivot-Elementen,

$$a_{1j(1)}, a_{2j(2)}, \dots, a_{ij(i)} \neq 0.$$

Menge der Lösungen  $(x_1, \dots, x_m)$ :

Die Menge der Lösungen ergibt sich durch Auflösen des Systems von unten nach oben und von hinten nach vorne. Die letzte Zeile im linearen Gleichungssystem sieht wie folgt aus:

$$a_{ij(i)}x_{j(i)} + a_{i(j(i)+1)}x_{j(i)+1} + \dots + a_{im}x_m = b_i$$

Das heißt  $x_{j(i)+1}, \dots, x_m \in \mathbb{K}$  können beliebige Werte annehmen, da sie durch keine weitere Gleichung eingeschränkt werden. Daraus ergibt sich  $x_{j(i)}$  wie folgt:

$$x_{j(i)} = \frac{1}{a_{ij(i)}} \cdot (b_i - a_{i(j(i)+1)}x_{j(i)+1} - \dots - a_{im}x_m)$$

Außerdem verfahren Sie mit den restlichen Gleichungen analog. Die Lösungsmenge ist dann:

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid \text{für } k = 1, \dots, i \text{ gilt } x_{j(k)} = \frac{1}{a_{kj(k)}} \cdot \left( b_k - \sum_{l=j(k)+1}^m a_{kl}x_l \right) \right\}$$

**Beispiel 1.5.** Betrachte das lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 &= 2 \\ 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Dann sind die Unbekannten  $x_4$  und  $x_2$  frei wählbar, während sich  $x_3$  und  $x_1$  in Abhängigkeit von  $x_4$  und  $x_2$  ergeben. Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \left\{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = \frac{1-3x_4}{2} \text{ und } x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = \frac{1-3x_4}{2} \text{ und } x_1 = \frac{1}{2} - 2x_2 + \frac{1}{2}x_4 \right\} \end{aligned}$$

Man kann dieses lineare Gleichungssystem zum Beispiel auch als System über dem Körper  $\mathbb{Z}_5$  auffassen:

In  $\mathbb{Z}_5$  ist  $\frac{1}{2} = 2^{-1} = 3$  (denn in  $\mathbb{Z}_5$  gilt:  $2 \cdot 3 = 1$ ),  $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 3 = 4$  und  $-2 = 3$ . Damit ist die Lösungsmenge zu  $\mathbb{Z}_5$ :

$$L = \{(x_1, \dots, x_4) \mid x_3 = 3 + x_4 \text{ und } x_1 = 3 + 3x_2 + 3x_4\}$$

\* \* \*

**Der Gauß-Algorithmus.** Ziel ist es ein beliebiges lineares Gleichungssystem logisch äquivalent in Zeilenstufenform zu überführen, da wir ein lineares Gleichungssystem in Zeilenstufenform einfacher lösen können. Grundlage der Transformation ist die folgende Beobachtung:

**Satz 1.6.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $a_1, \dots, a_m, b, a'_1, \dots, a'_m, b' \in \mathbb{K}$ . Weiterhin sei  $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$  und  $\mu \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

(a) für  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$  ist die Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b \quad (*)$$

äquivalent zu der Gleichung

$$\lambda a_1x_1 + \dots + \lambda a_mx_m = \lambda b \quad (**)$$

(b) für  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$  ist:

$$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b \text{ und } a'_1x_1 + \dots + a'_mx_m = b'$$

äquivalent zu:

$$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b \text{ und } (a'_1 + \mu a_1)x_1 + \dots + (a'_m + \mu a_m)x_m = b' + \mu b$$

*Beweis:*

zu (a) Seien  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ . Wir zeigen die Äquivalenz  $(*) \Leftrightarrow (**)$ .

Zunächst zeigen wir „ $\Rightarrow$ “:

Es gelte also  $(*)$ . Dann gilt insbesondere:

$$\lambda \cdot (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) = \lambda \cdot b$$

Durch wiederholtes Anwenden des Distributivgesetzes in  $\mathbb{K}$  ergibt sich die Gleichung  $(**)$ .

Es bleibt „ $\Leftarrow$ “ zu zeigen:

Es gelte nun  $(**)$ . Nach Anwendung des Distributivgesetzes gilt:

$$\lambda \cdot (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) = \lambda b$$

da  $\lambda \neq 0$ , existiert das multiplikative Inverse. Es folgt

$$\lambda^{-1} \cdot \lambda (a_1x_1 + \dots + a_mx_m) = \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot b$$

und daraus folgt (\*).

Die Aussage aus (b) kann analog gezeigt werden.  $\square$

Die Äquivalenz in (b) erlaubt es, eine Unbekannte  $x_i$  zu eliminieren, indem  $\mu$  so gewählt wird, dass gilt:

$$a'_i + \mu a_i = 0$$

**Beispiel 1.7.**

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} x & + & 2y & = & 5 \\ 2x & + & 3y & = & 8 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc} -2x & - & 4y & = & -10 \\ 2x & + & 3y & = & 8 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{cc} -2x & - & 4y & = & -10 \\ & - & y & = & -2 \end{array} \right| \end{array}$$

Also  $y = 2$  und  $x = 1$ .

Wir können das System auch kürzer fassen:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & 3 & 8 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}$$

**Beispiel 1.8.** Schauen wir uns noch ein Beispiel an:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 12 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -12 \\ 5x_1 - 6x_2 + 11x_3 &= -24 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & 4 & -12 \\ 5 & -6 & 11 & -24 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -1 & 12 \\ 5 & -6 & 11 & -24 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -12 \\ 0 & 9 & -9 & 36 \\ 0 & 9 & -9 & 36 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dieses System entspricht den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -12 \\ x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hierbei ist  $x_3$  beliebig wählbar:  $x_2 = 4 + x_3$  und  $x_1 = -x_3$ , also ergibt sich als Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 4 + x_3, x_1 = -x_3\}$$

**Beispiel 1.9.** Betrachte nachfolgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 3 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 4$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6$$

oder etwas kompakter geschrieben erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 6 & 6 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir können jetzt einfach die zweite mit der dritten und dann die dritte mit der vierten Spalte vertauschen um unsere gewünschte Zeilenstufenform zu erhalten. Aber Vorsicht! Das Vertauschen von Spalten entspricht einer Umbenennung der Variablen und muss deshalb immer sorgfältig notiert und beim Aufschreiben der Lösungsmenge wieder rückgängig gemacht werden. In unserem Fall notieren wir beispielsweise (2,3) und (3,4) und erhalten:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

Für dieses Gleichungssystem bekommen wir zunächst die Lösungsmenge:

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -15 - 2x_4, x_2 = 6, x_3 = -2\}$$

Jetzt müssen wir noch die Spaltenvertauschungen rückgängig machen. Dazu tauschen wir zuerst den Wert von  $x_3$  mit  $x_4$  und anschließend  $x_2$  mit  $x_3$ , wodurch wir die richtige Lösungsmenge für unser Ausgangsproblem erhalten:

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -15 - 2x_2, x_3 = 6, x_4 = -2\}$$

**Beispiel 1.10.** Schauen wir uns einmal folgendes LGS an:

$$x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 2$$

$$3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 2$$

$$4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 3$$

Dann errechnen wir wieder die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{cccc|cccc|c}
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1 \\
 4 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & -1 & -1
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{cccc|cccc|c}
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & -5 & 0 & 0 & 3 & -5 & 1
 \end{array}$$

Die daraus resultierende Lösungsmenge ist:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = \frac{2}{3}(1 - x_4), x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_4), x_3 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4 \right\}$$

\* \* \*

**Aufgabe 1.11.** Berechnen Sie die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS aus dem vorherigen Beispiel. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen diesen beiden Lösungsmengen?

**Aufgabe 1.12.** Konstruieren Sie Lineare Gleichungssysteme mit den folgenden Lösungsmengen:

$$\mathbb{L}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 3x_4, x_2 = 6x_4, x_3 = -2x_4\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 5\lambda + \rho, x_2 = 6\lambda - 2\rho, x_3 = -2\lambda, x_4 = -2\rho, \text{ für } \lambda, \rho \in \mathbb{R}\}$$

## 2. VEKTORRÄUME

Lineare Gleichungssysteme in den Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  haben Folgen von Elementen von  $\mathbb{K}$  als Lösungen. Die Struktur dieser Folgen werden wir im Folgenden näher betrachten.

**Der Raum  $\mathbb{K}^n$ .** Wir starten gleich mit der entscheidenden

**Definition 2.1.** Sei  $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Definiere die Struktur  $\mathbb{K}^n := (\mathbb{K}^n, +, \cdot, 0)$  durch:

(a)  $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{K}, \dots, x_n \in \mathbb{K}\}$ . Die Elemente von  $\mathbb{K}^n$  heißen **Vektoren**.

(b) Für  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$  definiere die **Vektoraddition** “+” durch

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

(c) Für  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  definiere die **Skalarmultiplikation** “ $\cdot$ ” durch

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

(d)  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$  ist der **Nullvektor**.

(e) Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  definiere ein **additiv Inverses** durch

$$-x = (-x_1, \dots, -x_n)$$

(f) Für  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  definiere die **Vektorsubtraktion** “-” durch  $(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) := (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$

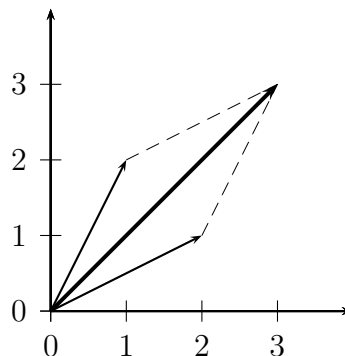
**Beispiel 2.2.** Die Struktur  $\mathbb{K}^n$  wird vielfältig angewendet:

(a) Die Menge  $(\mathbb{Z}_2)^n$  ist die Menge der 0-1-Folgen der Länge  $n$ , das heißt aller Bitfolgen der Länge  $n$ . Ein Element von  $(\mathbb{Z}_2)^8$  bezeichnet man als Byte.

(b) Die Menge  $(\mathbb{Z}_m)^n$  kann man als die Menge der  $n$ -elementigen Wörter über dem Alphabet  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\} \hat{=} \{A, B, C, \dots\}$  auffassen. So kann man dies etwa für die CAESAR- Verschlüsselung benutzen:  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n) + (c, \dots, c)$ . Etwa

$$\text{INFORMATIK} + \text{EEEEEEEE} = \text{NSKTWRFYNP}$$

(c) Analytische Geometrie im  $\mathbb{R}^2$ :  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



Motiviert durch die Beispiele studieren wir die Gesetze des vektoriellen Rechnens:

**Satz 2.3.** Sei  $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Für  $x, y, z \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Assoziativgesetz)
- (b) Für  $x, y \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $x + y = y + x$  (Kommutativgesetz)
- (c) Für  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $x + 0 = x$  (Neutralität der Null)
- (d) Für  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $x + (-x) = 0$  (Existenz des Inversen)
- (e) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$  (Assoziativgesetz)
- (f) Für  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $1 \cdot x = x$  (Neutralität der 1)
- (g) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$  (1. Distributivgesetz)
- (h) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt  
 $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$  (2. Distributivgesetz)

*Beweis:* Klar mit den Rechengesetzen im Körper. Beispielsweise für das Kommutativgesetz:

Seien  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  und  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} = y + x \end{aligned}$$

□

Beachten Sie, dass das Symbol 0 im Satz 2.3 formell für den Nullvektor im Vektorraum steht, also für  $0_V$ , während die 1 dem Einselement im Körper entspricht.

**Beispiel 2.4.** Sei  $M = \{f \mid f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  die Menge der reellwertigen Funktionen auf  $[-1, 1]$ . Für  $f, g \in M$  setze  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ . Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  setze  $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ . Dann gilt:  $(f + g) \in M$  und  $(\lambda \cdot f) \in M$ . Definiere  $0 \in M$  als  $0(x) = 0$ . Dann erfüllt die Struktur  $(M, +, \cdot, 0)$  die im Satz beschriebenen Gesetze:

**Satz 2.5.** Sei die Menge  $M = \{f \mid f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$  mit den o.g. Operationen gegeben.

- (a) Für  $f, g, h \in M$  gilt  
 $(f + g) + h = f + (g + h)$  (Assoziativgesetz)
- (b) Für  $f, g \in M$  gilt  
 $f + g = g + f$  (Kommutativgesetz)
- (c) Für  $f \in M$  gilt  
 $f + 0 = f$  (Neutralität der Null)
- (d) Für  $f \in M$  gilt  
 $f + (-f) = 0$  (Existenz des Inversen)
- (e) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  gilt  
 $(\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$  (Assoziativgesetz)
- (f) Für  $f \in M$  gilt  
 $1 \cdot f = f$  (Neutralität der 1)
- (g) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f, g \in M$  gilt  
 $\lambda \cdot (f + g) = \lambda f + \lambda g$  (1. Distributivgesetz)
- (h) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  gilt  
 $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$  (2. Distributivgesetz)

*Beweis:* Zur Kommutativität:

$$(f + g) = (g + f) \Leftrightarrow \forall x((f + g)(x) = (g + f)(x))$$

Sei  $x \in [-1, 1]$  gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(Nach Definition von +)} \\ &= g(x) + f(x) && \text{(Kommutativität in } \mathbb{R} \text{)} \\ &= (g + f)(x) \end{aligned}$$

Rest klar, mit den Rechengesetzen im Körper  $\mathbb{R}$ . \(\square\)

**Definition 2.6.** Es sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und sei  $V = (V, +, \cdot)$  eine Struktur mit einer Abbildung “+” (genannt Addition)

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad ; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

und einer Abbildung “ $\cdot$ ” (genannt "skalare Multiplikation" oder "Skalarmultiplikation")

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V \quad ; \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

Dann ist  $V = (V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{K}$ - Vektorraum oder Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , wenn die folgenden Axiome gelten:

- (a) Für  $x, y, z \in V$  gilt  
 $(x + y) + z = x + (y + z)$  (Assoziativgesetz)
- (b) Für  $x, y \in V$  gilt  
 $x + y = y + x$  (Kommutativgesetz)

- (c) Es gibt ein "0"  $\in V$ , sodass für  $x \in V$  gilt  
 $x + 0 = x$  (Neutralität der Null)
- (d) Für  $x \in V$  gibt es ein  $y \in V$ , sodass  
 $x + y = 0$  (Existenz des Inversen)
- (e) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  gilt  
 $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$  (Assoziativgesetz)
- (f) Für  $x \in V$  gilt  
 $1 \cdot x = x$  (Neutralität der 1)
- (g) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in V$  gilt  
 $\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$  (1. Distributivgesetz)
- (h) Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  und  $x \in V$  gilt  
 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  (2. Distributivgesetz)

**Satz 2.7.** Für alle Vektorräume  $V = (V, +, \cdot)$  gibt es genau ein Element, das der Nullvektor ist.

*Beweis:* Angenommen es gäbe die Nullvektoren  $0$  und  $0'$  in  $V$ . Dann gilt nach den Axiomen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0' && ((c) \text{ für } 0') \\ &= 0' + 0 && (\text{nach (b)}) \\ &= 0' && ((c) \text{ für } 0) \end{aligned}$$

□

Nach diesem Satz können wir ohne Einschränkung den Nullvektor mit in die Signatur aufnehmen und schreiben daher im Folgenden stets:

Sei  $V = (V, +, \cdot, 0)$  ein Vektorraum.

**Satz 2.8.** Für alle Vektorräume  $V = (V, +, \cdot, 0)$  gilt: Für  $x$  aus  $V$  existiert genau ein Element  $y$ , welches das additiv Inverse in  $V$  ist, d.h.  $x + y = 0$  erfüllt, das wir mit  $-x$  bezeichnen.

*Beweis:* Betrachte ein beliebiges  $x \in V$ . Angenommen  $a$  und  $b$  sind additiv Inverse von  $x$  in  $V$ , d.h.  $x + a = 0$  und  $x + b = 0$ .

$$\begin{aligned} a &= a + 0 && (\text{Neutrales Element}) \\ &= a + (x + b) && (b \text{ als inverses Element}) \\ &= (a + x) + b && (\text{Assoziativität}) \\ &= (x + a) + b && (\text{Kommutativität}) \\ &= 0 + b && (a \text{ als inverses Element}) \\ &= b + 0 && (\text{Kommutativität}) \\ &= b \end{aligned}$$

□

**Definition 2.9.** Schreibe  $x - y$  statt  $x + (-y)$ .

\* \* \*

**Untervektorräume.** Sie wissen bereits, dass folgende Inklusionskette gilt:  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . Alle drei Strukturen sind Körper und somit selbst für sich Vektorräume. Man kann sich beispielsweise jetzt fragen, ob etwa die reellen Zahlen als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum als Teilmenge des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  die einzige solche Teilmenge ist, die unter den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist. Solche Teilmengen (Teilräume) nennen wir Untervektorräume.

**Definition 2.10.** Sei  $V = (V, +, \cdot, 0)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und sei  $U \subseteq V$  eine Teilmenge von  $V$ . Dann ist  $U$  ein **Unter(vektor)raum** (kurz: *UVR*) von  $V$ , wenn  $U \neq \emptyset$  und für alle  $x, y \in U$  und alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:  $x + y \in U$  und  $\lambda \cdot x \in U$ . (Abgeschlossenheit bzgl.  $+$  und  $\cdot$ )

**Satz 2.11.** Sei  $U$  ein Untervektorraum eines fixierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V = (V, +, \cdot, 0)$ . Dann ist  $U = (U, +, \cdot, 0)$  auch ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, wobei die Operationen  $+$  und  $\cdot$  auf  $U \times U$  bzw.  $\mathbb{K} \times U$  eingeschränkt werden.

*Beweis:* Wir beweisen die geforderten Bedingungen:

(1)  $0 \in U$ . (eigentlich  $0_V \in U$ )

Wähle  $x \in U$  als Element von  $U \neq \emptyset$ . Dann gilt:

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot x - 0 \cdot x \\ &= (0 \cdot x + 0 \cdot x) - 0 \cdot x && \text{(Nach obiger Gleichung)} \\ &= 0 \cdot x + (0 \cdot x - 0 \cdot x) && \text{(Assoziativität)} \\ &= 0 \cdot x + 0 \\ &= 0 \cdot x \end{aligned}$$

Da  $0 \in \mathbb{K}$  und  $x \in U$  und  $U$  abgeschlossen unter  $\cdot$  ist, gilt:  $0 = 0 \cdot x \in U$

(2) Für  $x \in U$  ist  $-x \in U$ :

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot x \\ &= (1 + (-1)) \cdot x \\ &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x \\ &= x + (-1) \cdot x \end{aligned}$$

Nach dem obigen Satz ist das additiv Inverse eindeutig, so dass gelten muss:  
 $-x = (-1) \cdot x \in U$ .

Aus diesen Existenzaussagen folgt, dass  $U$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.  $\square$

**Satz 2.12.** *Es seien  $U_1, U_2$  Untervektorräume des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ . Dann ist  $U_1 \cap U_2$  ein Untervektorraum von  $V$ .*

*Beweis:* Wir hatten gezeigt, dass  $0 \in U_1$  und  $0 \in U_2$ . Damit ist  $0 \in U_1 \cap U_2$  und somit  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Betrachte beliebige  $x, y \in U_1 \cap U_2$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Da  $U_1$  und  $U_2$  Untervektorräume sind, ist  $x + y \in U_1, \lambda \cdot x \in U_1$  und  $x + y \in U_2, \lambda \cdot x \in U_2$ . Damit ist  $x + y \in U_1 \cap U_2$  und auch  $\lambda \cdot x \in U_1 \cap U_2$ .  $\square$

Wir können nun Varianten der Eingangsfrage des Abschnittes noch einmal aufgreifen:

**Beispiel 2.13.** Es gibt drei grundsätzliche Arten von Unterräumen der reellen Ebene. Zunächst finden wir sofort den trivialen Unterraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, bzw. dem gesamten Raum. Echt dazwischen liegen nur noch die Ursprungsgeraden.

**Beispiel 2.14.** Die reelle Achse als reeller Vektorraum hat nur die beiden trivialen Untervektorräume (Nullraum und  $\mathbb{R}$  selbst) als Unterräume. Unterräume des reellen Vektorraums  $\mathbb{C}$  sind daher zunächst  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ , aber auch alle Teilmengen, die Ursprungsgeraden entsprechen, wenn man die komplexen Zahlen als reelle Ebene auffasst.

Wir rechnen noch ein weiteres konkretes Beispiel durch und definieren:

**Definition 2.15.** *Sei  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  die Menge aller Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , das heißt:*

$$\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

*Wir wissen bereits, dass wir  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  als Vektorraum ansehen können, das heißt es gilt:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

**Beispiel 2.16.** Setze  $U = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für } x \in \mathbb{R}\}$ . Dann ist  $U \subseteq \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ein Untervektorraum.

Wir zeigen die Unterraumeigenschaften:

(a)  $U \neq \emptyset$ :

Für die Nullabbildung  $0(x) = 0$  gilt insbesondere  $0(x) = 0(-x)$ , also auch  $0 \in U$ .

(b) Abgeschlossenheit bzgl. “+”:

Zu zeigen gilt:  $f, g \in U \Rightarrow f + g \in U$ . Seien also  $f, g \in U$ . Es gilt also  $f(x) = f(-x)$  und  $g(x) = g(-x)$ .

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= f(-x) + g(-x) \quad f, g \in U \\ &= (f + g)(-x)\end{aligned}$$

(c) Abgeschlossenheit bzgl. “·”:

Sei  $f \in U$ , also  $f(x) = f(-x)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(-x) = (\lambda \cdot f)(-x)$$

**Beispiel 2.17.** Wir versuchen jetzt an einem konkreten Beispiel den Schnitt zweier Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$  zu berechnen:

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Dann können wir den Schnitt  $U_1 \cap U_2$  mit dem Ansatz:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen und gelangen zu dem folgenden homogenen LGS:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jetzt können wir die Lösungsmenge dieses LGS angeben:

$$L = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \frac{3}{17}x_3, \quad x_2 = \frac{1}{3}x_3 \right\}$$

und erhalten unseren gewünschten Schnitt  $U_1 \cap U_2 = U_2$ , indem wir uns anschauen, was man alles mit den aus  $L$  erhaltenen Koeffizienten an Vektoren erzeugen kann. Da unter diesen Bedingungen das  $x_3$  frei wählbar ist, muss der komplette Untervektorraum  $U_2$  den Schnitt bilden.

\* \* \*

**Aufgabe 2.18.** Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ ?

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x + 7y - 8z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 1, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \cdot y \cdot z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 = z^2, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

### 3. GRUPPEN, RINGE, KÖRPER

Wenn wir uns die bekannten Zahlbereiche mit den dazugehörigen Operationen anschauen, so können wir Eigenschaften erkennen, die immer wieder auftauchen – etwa die Kommutativität der Addition. Um hier Ordnung in die Begrifflichkeiten zu bringen, führen wir der Reihe nach Strukturbegriffe ein, die immer wieder gemeinsam auftretende Eigenschaften zusammenfassen.

**Definition 3.1.** Für eine Menge  $A$  heißt eine Abbildung  $\circ: A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, a') \mapsto a \circ a'$  Verknüpfung auf  $A$ . Eine Verknüpfung heißt

- assoziativ, wenn für alle  $a, b, c \in A$  gilt  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ;
- kommutativ, wenn für alle  $a, b \in A$  gilt  $a \circ b = b \circ a$ .

**Beispiel 3.2.** Die Addition und Multiplikation sind assoziative und kommutative Verknüpfungen auf  $\mathbb{R}$ . Die Subtraktion  $a \circ b = a - b$  ist weder assoziativ noch kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} 0 \circ (0 \circ 1) &= 0 - (0 - 1) = 1 \neq -1 = (0 - 0) - 1 = (0 \circ 0) \circ 1 \\ 1 \circ 0 &= 1 - 0 = 1 \neq -1 = 0 - 1 = 0 \circ 1 \end{aligned}$$

Man kann mit vollständiger Induktion zeigen, dass bei einer assoziativen Verknüpfung von  $n$  Elementen Klammern weggelassen werden können.

**Definition 3.3.** Ist  $A$  eine Menge mit einer Verknüpfung " $\circ$ ", so heißt  $e \in A$  neutrales Element oder Einselement, wenn für alle  $a \in A$

$$e \circ a = a \circ e = a.$$

Gibt es so ein  $e$ , so ist es eindeutig bestimmt, denn ist  $e'$  auch ein neutrales Element, so gilt  $e' = e' \circ e = e$ .

**Beispiel 3.4.** Sei  $M$  eine beliebige (nicht-leere) Menge und  $A = \{f \mid f: M \rightarrow M\}$ , so ist  $\text{id}_M: M \rightarrow M$ ,  $m \mapsto m$  das neutrale Element bezüglich der Komposition. Dies sieht man wie folgt: Für alle  $f \in A$  gilt  $f \circ \text{id}_M = f$  und  $\text{id}_M \circ f = f$ , da für alle  $m \in M$  gilt  $(f \circ \text{id}_M)(m) = f(\text{id}_M(m)) = f(m)$  und  $(\text{id}_M \circ f)(m) = \text{id}_M(f(m)) = f(m)$ .

**Definition 3.5.** Es sei  $A$  eine Menge mit einer Verknüpfung " $\circ$ " und einem neutralen Element  $e$ . Ist  $a \in A$ , so heißt  $b \in A$  inverses Element oder Inverses von  $a$ , wenn  $a \circ b = b \circ a = e$  gilt. Existiert für  $a$  ein Inverses, so heißt  $a$  invertierbar oder Einheit.

**Bemerkung 3.6.** Bezüglich "+" besitzt  $\mathbb{Z}$  als neutrales Element die Zahl 0 und es ist sogar jedes  $a \in \mathbb{Z}$  invertierbar. Bezüglich "." ist in  $\mathbb{Z}$  die Zahl 1 das neutrale Element, aber nur die Zahlen 1 und -1 sind invertierbar.

**Satz 3.7.** Ist  $A$  eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung " $\circ$ " und einem neutralen Element  $e$ , so gibt es zu jedem invertierbaren Element  $a \in A$  genau ein  $b \in A$  mit  $a \circ b = e$  und  $b \circ a = e$ .

*Beweis:* Sind  $b, b'$  Inverse von  $a$ , so gilt  $b = e \circ b = (b' \circ a) \circ b = b' \circ (a \circ b) = b' \circ e = b'$ .

☒

Das unter den Voraussetzungen von Satz 3.7 eindeutig bestimmte Inverse von  $a$  wird mit  $a^{-1}$  bezeichnet.

## Gruppen.

**Definition 3.8.** Ist  $G$  eine Menge und " $\circ$ " eine Verknüpfung auf  $G$ , so heißt  $G$  Gruppe (bzgl. " $\circ$ "), wenn gilt

- (a) " $\circ$ " ist assoziativ.
- (b) Es existiert ein neutrales Element  $e \in G$ .
- (c) Jedes  $g \in G$  ist invertierbar.

Ist weiterhin " $\circ$ " kommutativ, so heißt  $G$  abelsche Gruppe.

**Beispiel 3.9.** Offensichtlich bildet  $\mathbb{Z}$  bezüglich "+" eine abelsche Gruppe. Darüber hinaus bildet  $\mathbb{R}$  zusammen mit "." keine Gruppe; dagegen ist  $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bezüglich "." eine abelsche Gruppe.

**Achtung:** Eine Verknüpfung " $\circ$ " auf  $G$  bedeutet, dass  $\circ : G \times G \rightarrow G$ , insbesondere ist eine Verknüpfung immer abgeschlossen innerhalb der Menge und kann also nicht aus der Grundmenge  $G$  herausführen.

**Satz 3.10.** Ist  $M$  eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung " $\circ$ " und einem neutralen Element  $e$ , so ist die Menge  $G = \{g \mid g^{-1} \in M\}$  eine Gruppe.

Ist  $M$  selbst eine Gruppe, so gilt offenbar  $M = G$ .

*Beweis von Satz 3.10:* Wir zeigen zunächst, dass die auf  $M$  gegebene Verknüpfung " $\circ$ " auch eine Verknüpfung auf  $G$  ist – eigentlich zeigen wir dies für die Einschränkung von " $\circ$ " auf  $G \times G$ . Wir weisen also nach, dass für alle  $a, b \in G$  stets gilt  $a \circ b \in G$ : Seien  $a, b$  aus  $G$ , so sind diese invertierbar, also folgt  $a^{-1}, b^{-1} \in M$ . Wegen

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) &= (a \circ (b \circ b^{-1})) \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1} \\ &= a \circ a^{-1} = e \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} (b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) &= (b^{-1} \circ (a^{-1} \circ a)) \circ b = (b^{-1} \circ e) \circ b \\ &= b^{-1} \circ b = e \end{aligned}$$

ist  $a \circ b$  invertierbar, also  $a \circ b \in G$ .

Die restlichen drei Gruppeneigenschaften folgen unmittelbar: Die Aussage  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  gilt sogar für alle  $a, b, c \in M$ , insbesondere für  $G \subseteq M$ . Wegen  $e \circ e = e$  gilt  $e \in G$  und  $e$  ist damit insbesondere das neutrale Element von  $G$ . Schließlich gilt für

alle  $a \in G$  jeweils  $a \circ a^{-1} = e$  und  $a^{-1} \circ a = e$ . Also ist auch  $a^{-1}$  in  $M$  invertierbar, das heißt  $a^{-1} \in G$  und  $a$  ist das Inverse von  $a^{-1}$ . ☒(Satz 3.10)

Wir haben sogar etwas mehr im letzten Beweis gezeigt: Für invertierbare Gruppenelemente  $a, b$  gilt  $(a^{-1})^{-1} = a$  sowie  $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ .

**Ringe.** Wir führen nun eine etwas mächtigere Struktur ein – den Ring.

**Definition 3.11.** Ist  $R$  eine Menge mit den Verknüpfungen “+” und “·”, so heißt  $(R, +, \cdot)$  Ring, wenn gilt

- (a)  $R$  ist bzgl. “+” eine abelsche Gruppe,
- (b) “·” ist assoziativ,
- (c) Es gelten die Distributivgesetze, das heißt, für alle  $a, b, c \in R$  gilt  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  und  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ .

Ist weiterhin “·” kommutativ, so heißt  $R$  kommutativer Ring.

Hat ein Ring  $R$  ein neutrales Element bezüglich “·”, so heißt  $R$  Ring mit Eins und dann heißt weiterhin  $a \in R$  invertierbar oder *Einheit*, wenn  $a$  bezüglich “·” invertierbar ist.

Wir führen folgende Vereinbarungen ein:

- Punktrechnung geht vor Strichrechnung, das heißt, um Produkte werden keine Klammern gesetzt.
- Das neutrale Element eines Ringes bezüglich “+” wird mit dem Symbol “0” bezeichnet.
- Ist  $R$  ein Ring mit Eins, so wird das neutrale Element bezüglich “·” mit dem Symbol “1” bezeichnet. In diesem Falle ist

$$E(R) := \{a \in R \mid a \text{ Einheit in } R\}$$

eine Gruppe bezüglich der Multiplikation (siehe Satz 3.7) und wird als *Einheitengruppe* bezeichnet.

- Für alle  $a \in R$  bezeichnet  $-a$  das (additive) Inverse von  $a$  bezüglich “+”. Für alle  $a, b \in R$  definiert man weiterhin  $a - b := a + (-b)$ .

Wir wissen, dass die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Eins bilden und es gilt  $E(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ .

Beachten Sie, dass die Angabe der neutralen Elemente (sofern existent) mit den Symbolen 0 und 1 lediglich ein symbolischer Akt ist. Welche Ring-Elemente dann letztendlich hinter diesen Symbolen stehen, geht dabei aus dem Kontext hervor.

**Beispiel 3.12.** Wir können etwa eine einelementige Menge  $R := \{0\}$  betrachten und auf eindeutige Art und Weise eine Addition und Multiplikation einführen, nämlich:

$$0 + 0 = 0 \quad \text{und} \quad 0 \cdot 0 = 0$$

Wie Sie aber sehen können, ist in diesem Fall das einzige Element sowohl das neutrale Element der Addition als auch der Multiplikation, so dass in diesem Fall (in diesem Ring  $R$ )  $0 = 1$  gilt.

Solche pathologischen Fälle möchten wir insbesondere mit der nächsten Definition ausschließen:

**Definition 3.13.** *Ist  $K$  ein kommutativer Ring mit Eins, so heißt  $K$  Körper, wenn  $0 \neq 1$  und jedes  $a \in K$  mit  $a \neq 0$  eine Einheit ist.*

**Bemerkung 3.14.** Wir können feststellen, dass bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation die bekannten Zahlbereiche  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  (und  $\mathbb{C}$ ) kommutative Ringe mit Eins sind. Darüber hinaus sind  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  (und  $\mathbb{C}$ ) sogar Körper,  $\mathbb{Z}$  aber nicht.

Wir werden jetzt exemplarisch interessante Eigenschaften in Ringen untersuchen. Beachten Sie, dass die Eigenschaften, die wir jetzt nachweisen, in beliebigen (kommutativen) Ringen (mit Eins) gelten.

**Satz 3.15.** *Sei  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dann erfüllt  $R$  für beliebige  $\lambda \in R$  die folgenden Bedingungen:*

- (a)  $0 \cdot \lambda = 0$
- (b)  $(-1) \cdot \lambda = -\lambda$
- (c)  $-(-\lambda) = \lambda$
- (d)  $(-1) \cdot (-1) = 1$

*Beweis:* Wir beweisen die erste Behauptung mit der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
 0 \cdot \lambda &= \lambda \cdot 0 && \text{(Kommutativität der Mult.)} \\
 &= \lambda \cdot 0 + 0 && \text{(Neutrales Element der Add.)} \\
 &= \lambda \cdot 0 + (\lambda \cdot 0 + (-\lambda \cdot 0)) && \text{(Inverses El. der Add.)} \\
 &= (\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0) + (-\lambda \cdot 0) && \text{(Assoziativität der Add.)} \\
 &= \lambda \cdot (0 + 0) + (-\lambda \cdot 0) && \text{(Distributivität)} \\
 &= \lambda \cdot 0 + (-\lambda \cdot 0) && \text{(Neutrales Element der Add.)} \\
 &= 0 && \text{(Inverses Element der Add.)}
 \end{aligned}$$

Für die zweite Behauptung lässt sich ähnlich argumentieren:

$$\begin{aligned}
 (-1) \cdot \lambda &= (-1) \cdot \lambda + 0 && \text{(Neutrales Element der Add.)} \\
 &= (-1) \cdot \lambda + (\lambda + (-\lambda)) && \text{(Inverses Element der Add.)} \\
 &= ((-1) \cdot \lambda + \lambda) + (-\lambda) && \text{(Assoziativität der Add.)} \\
 &= ((-1) \cdot \lambda + \lambda \cdot 1) + (-\lambda) && \text{(Neutrales El. der Mult.)} \\
 &= (\lambda \cdot (-1) + \lambda \cdot 1) + (-\lambda) && \text{(Kommutativität der Mult.)} \\
 &= (\lambda \cdot ((-1) + 1)) + (-\lambda) && \text{(Distributivität)} \\
 &= \lambda \cdot 0 + (-\lambda) && \text{(Inverses Element der Add.)} \\
 &= 0 \cdot \lambda + (-\lambda) && \text{(Kommutativität der Mult.)} \\
 &= 0 + (-\lambda) && \text{(nach (1))}
 \end{aligned}$$

$$= -\lambda \quad (\text{Neutrales Element der Add.})$$

Die restlichen beiden Teile bleiben eine Übungsaufgabe.  $\square$

Abschließend stellen wir fest, dass wir auch die bekannten binomischen Formeln allgemein wie folgt in beliebige Ringe übertragen können:

**Satz 3.16.** *Sei  $(R, +, \cdot, 0, 1)$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dann gilt für alle  $\lambda$  und  $\mu$  in  $R$*

- (a)  $(\lambda + \mu) \cdot (\lambda + \mu) = \lambda \cdot \lambda + (1 + 1)\lambda \cdot \mu + \mu \cdot \mu$
- (b)  $(\lambda + (-\mu)) \cdot (\lambda + (-\mu)) = \lambda \cdot \lambda + -(1 + 1) \cdot \lambda \cdot \mu + \mu \cdot \mu$
- (c)  $(\lambda + \mu) \cdot (\lambda + (-\mu)) = \lambda \cdot \lambda + (-\mu \cdot \mu)$

*Beweis:* Wir beschränken uns darauf, die erste Aussage zu beweisen. Die restlichen beiden bleiben eine (leichte) Übungsaufgabe.

Es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot (\lambda + \mu) &= (\lambda + \mu) \cdot \lambda + (\lambda + \mu) \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot (\lambda + \mu) + \mu \cdot (\lambda + \mu) \\ &= \lambda \cdot \lambda + (\lambda \cdot \mu + \mu \cdot \lambda) + \mu \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot \lambda + (\mu \cdot \lambda + \mu \cdot \lambda) + \mu \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot \lambda + (\mu \cdot \lambda \cdot 1 + \mu \cdot \lambda \cdot 1) + \mu \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot \lambda + (\mu \cdot \lambda \cdot (1 + 1)) + \mu \cdot \mu \\ &= \lambda \cdot \lambda + (1 + 1) \cdot \mu \cdot \lambda + \mu \cdot \mu \end{aligned}$$

$\square$

**Teilbarkeit und modulare Arithmetik.** Bisher haben wir die bekannten Zahlbereiche betrachtet, die alle unendlich sind. Wir werden uns jetzt endlichen Ringen und Körpern widmen, die insbesondere in der Informatik zu Kodierungszwecken eine Anwendung finden. Aber zunächst werden wir grundlegende Begriffe klären und arbeiten dabei innerhalb der ganzen Zahlen.

**Definition 3.17.** *Seien  $m$  und  $n$  ganze Zahlen. Dann definieren wir “ $m$  teilt  $n$ ”, wenn es ein  $l \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $m \cdot l = n$ . Wir schreiben in diesem Fall “ $m$  ist Teiler von  $n$ ” bzw.  $m|n$ .*

**Satz 3.18.** *Es gelten folgende einfache Eigenschaften:*

- (a) *Für jede ganze Zahl  $m$  gilt  $1|m$  und  $m|m$ .*
- (b) *Für alle ganzen Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit  $a|b$  und  $b|c$  gilt  $a|c$ .*

*Beweis:* Die Aussagen in (a) sind offensichtlich wahr, da  $1 \cdot m = m$  und  $m \cdot 1 = m$ . Wir zeigen die zweite Behauptung: Wegen  $a|b$  existiert ein  $l_1 \in \mathbb{Z}$  mit  $a \cdot l_1 = b$ . Wegen  $b|c$  existiert  $l_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $b \cdot l_2 = c$ . Also gilt  $c = b \cdot l_2 = (a \cdot l_1) \cdot l_2 = a \cdot (l_1 \cdot l_2) = a \cdot l$ , wobei  $l = l_1 \cdot l_2$ . Damit ist  $a|c$  bewiesen.  $\square$

**Definition 3.19.** Sei  $p$  eine natürliche Zahl, dann heißt  $p$  eine *Primzahl*, wenn  $p \neq 0$ ,  $p \neq 1$  und für alle  $t$  mit  $t|p$  gilt:  $t = 1$  oder  $t = p$ .

Der nächste Satz wird uns die so genannte Division mit Rest garantieren, die wir im Folgenden ausnutzen werden.

**Satz 3.20.** Sei  $n$  eine natürliche Zahl,  $n \neq 0$ . Dann gibt es für jede ganze Zahl  $a$  eindeutig bestimmte ganze Zahlen  $q$  und  $r$ , so dass  $a = q \cdot n + r$  gilt, mit  $0 \leq r < n$ .

*Beweis:* Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Wie Sie sich leicht klarmachen können, ist  $\mathbb{Z} = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \{m \in \mathbb{Z} \mid q \cdot n \leq m \leq (q+1) \cdot n\}$ .

Sei nun  $a \in \mathbb{Z}$ , so gibt es also ein  $q \in \mathbb{Z}$  mit  $q \cdot n \leq a \leq (q+1) \cdot n$ . Definieren wir für dieses  $q$  nun  $r := a - q \cdot n$ , so gilt  $a = q \cdot n + r$  und  $0 \leq r < n$ . Letzteres ergibt sich sofort, wenn Sie von  $q \cdot n \leq a \leq (q+1) \cdot n$  die Zahl  $q \cdot n$  subtrahieren.  $\square$

Das heißt, dass wir jede natürliche Zahl durch  $n$  mit Rest  $r$  teilen können; dabei bezeichnet  $r$  den *Rest von  $a$  modulo  $n$*  und dieser wird mit  $[a]_n$  bezeichnet:

$$[a]_n := \{r \mid a = q \cdot n + r \quad q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq r < n\}$$

Wenn  $n$  im Kontext fixiert ist, schreiben wir manchmal auch nur  $[a]$ .

**Definition 3.21.** Seien  $a, b$  ganze Zahlen und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann sei

$$a \equiv b \pmod{n},$$

wenn  $n$  ein Teiler der Differenz  $a - b$  ist.

Wenn " $a \equiv b \pmod{n}$ " gilt, spricht man dies als " $a$  ist kongruent zu  $b$  modulo  $n$ ". Insbesondere bedeutet es, dass  $a$  und  $b$  denselben Rest modulo  $n$  haben.

Mithilfe der Division mit Rest, können wir nun Operationen auf einer endlichen Menge (der Reste) einführen.

**Definition 3.22.** Sei  $n$  eine natürliche Zahl,  $n \geq 2$ . Wir definieren die Menge  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  und auf ihr folgende zwei Verknüpfungen:

- Die Addition modulo  $n$  ist die folgende Operation

$$\oplus_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad a \oplus_n b = [a + b]_n.$$

- Die Multiplikation modulo  $n$  ist die folgende Operation

$$\otimes_n : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad a \otimes_n b = [a \cdot b]_n.$$

**Beispiel 3.23.** Diese modulare Arithmetik kennen Sie aus Ihrem täglichen Leben. Betrachten Sie etwa die Tageszeit. Dann ist dies formal die Addition modulo 24; so ist etwa  $20 \oplus_{24} 8 = 4$  (Uhr). Oder betrachten Sie einfache 8-Bit Mikroprozessoren; diese benutzen die Arithmetik modulo  $2^8 (= 256)$ . Dabei gilt  $100 \oplus_{256} 156 = 0$ , das heißt, dass das additive Inverse von 100 bezüglich dieser Addition 156 ist und somit die Gleichung " $-100 = 156$ " gilt.

**Satz 3.24.** Für beliebige  $n$  ist  $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes, 0, 1)$  ein kommutativer Ring mit Eins. Dabei ist  $\mathbb{Z}_n$  genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl ist.

*Beweis:* Der Nachweis der Ringeigenschaften ist einfaches Nachrechnen. Für die zusätzliche Körpereigenschaft betreffs existierender Inversen zeigen wir nun beide geforderten Richtungen der Äquivalenz: Sei zunächst  $n = p$  eine Primzahl, sowie  $a \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0$ . Wegen  $a \neq 0$  ist  $p$  kein Teiler von  $a$ . Da  $p$  eine Primzahl ist, haben  $a$  und  $p$  keine gemeinsamen Teiler außer der Eins und es existieren  $x, y \in \mathbb{Z}$  mit  $ax + py = 1$ . (Die Existenz von  $x, y$  garantiert uns ein weiteres Theorem, auf welches wir hier nicht weiter eingehen werden) Insbesondere heißt das aber, dass gilt  $ax = -py + 1$  und somit auch

$$a \cdot [x] = [a] \cdot [x] = [ax] = [-py + 1] = [p \cdot (-y) + 1] = 1.$$

Somit ist  $[x]_p$  das gewünschte multiplikative Inverse zu  $a$  in  $\mathbb{Z}_p$ . Wegen  $1 \neq 0$  ist  $\mathbb{Z}_p$  damit ein Körper.

Sei nun andererseits  $n$  keine Primzahl. Gilt  $n = 1$ , so folgt  $0 = 1$ , das heißt, das neutrale Element der Addition ist gleich dem neutralen Element der Multiplikation. Somit ist  $\mathbb{Z}_1$  kein Körper.

Sei daher im Folgenden  $n > 1$ . Dann existieren  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $n = a \cdot b$ ,  $1 < a < n$  und  $1 < b < n$ , da  $n$  keine Primzahl ist. Also gilt  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  und  $a \otimes b = [a] \otimes [b] = [a \cdot b] = [n] = 0 \notin E(\mathbb{Z}_n)$ . Folglich ist  $a$  oder  $b$  keine Einheit in  $\mathbb{Z}_n$ , da wir schon aus dem Beweis von Satz 3.10 wissen, dass sonst  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  gelten würde und damit  $0$  invertierbar wäre. Damit ist  $\mathbb{Z}_n$  insbesondere kein Körper.  $\square$

## 4. KOMPLEXE ZAHLEN

Wie Sie wissen, besitzen quadratische Gleichungen nicht immer eine (reelle) Lösung, wie etwa die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \text{ oder äquivalent } x^2 = -1.$$

Um u.a. trotzdem mit Lösungen von solchen Gleichungen rechnen zu können, führte Euler 1777 eine neue Zahl  $i$  ein. Für dieses  $i$  gilt dann per Definition:

$$i^2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Man bezeichnet diese neue Zahl  $i$  als *imaginäre Einheit*. Offensichtlich ist  $i$  keine reelle Zahl.

**Definition der komplexen Zahlen.** Wir führen ganz naiv, ausgehend von dieser neuen Zahl, die so genannten komplexen Zahlen ein, indem wir zunächst mit  $i$  rechnen, als würden die Gesetze gelten, die wir von den reellen Zahlen her kennen. So können wir beispielsweise Vielfache dieser imaginären Einheit bilden, indem wir eine reelle Zahl  $b$  an  $i$  heran multiplizieren, etwa  $b \cdot i$  oder kurz  $bi$  bzw.  $ib$ . Weiterhin können wir gemischte Summen bilden: Die Summe aus einer reellen Zahl  $a$  und einer rein imaginären Zahl  $b \cdot i$  heißt dann *komplexe Zahl*. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet und wir definieren noch den Realteil und Imaginärteil einer komplexen Zahl:

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{wobei} \quad \operatorname{Re}(z) := a \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) := b$$

Wir vereinbaren, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie sowohl im Realteil, als auch im Imaginärteil übereinstimmen. Insbesondere gilt, dass für  $0 = b = \operatorname{Im}(z)$  die komplexe Zahl  $z$  reell ist; auf diese Weise haben wir unsere bekannten Zahlen in den neuen Zahlbereich eingebettet:  $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ .

Eigentlich haben wir bisher nur die Zahlenmengen ineinander eingebettet; es wäre sehr schön, wenn sich die Operationen auch übertragen lassen würden, das heißt, dass die komplexe Addition und Multiplikation so definiert wird, dass sie eine Fortführung der reellen ist – mit anderen Worten: Wenn wir die komplexen Operationen auf die reellen Zahlen einschränken, sollten wir wieder unsere bekannten reellen Verknüpfungen erhalten. Außerdem wäre es wünschenswert, dass die Fortsetzung der uns bekannten Operationen auf den neuen Zahlbereich dennoch eine schöne Struktur hervorbringt: Unser Ziel ist es, die komplexen Zahlen als Körper zu definieren.

Diese Ziele vor Augen definieren wir die gewünschten Verknüpfungen wie folgt – zunächst die *komplexe Addition*.

Für  $z_1 := a + i \cdot b$  und  $z_2 := c + i \cdot d$  setze:

$$z_1 + z_2 := (a + c) + i \cdot (b + d) \in \mathbb{C}.$$

Damit ist  $+$  :  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  offensichtlich eine Fortsetzung der reellen Addition, denn für  $b = d = 0$  sind  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0$  und  $z_1 +_{\mathbb{C}} z_2 = z_1 +_{\mathbb{R}} z_2$ . In diesem Sinne verzichten wir auf die Indizierung beim Operationszeichen.

Die *komplexe Multiplikation* ist für  $z_1 := a + i \cdot b$  und  $z_2 := c + i \cdot d$  gegeben durch

$$z_1 \cdot z_2 := (ac - bd) + i \cdot (ad + bc) \in \mathbb{C}.$$

Wie man leicht sieht, ist auch  $\cdot$  :  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Fortsetzung der reellen Multiplikation. Es ist eine leichte Übungsaufgabe nachzurechnen, dass folgender Satz gilt:

**Satz 4.1.** *Die Struktur  $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$  der komplexen Zahlen ist ein Körper, wobei  $0 := 0 + i \cdot 0$  und  $1 := 1 + i \cdot 0 = 1$ . Insbesondere ist der Körper  $\mathbb{C}$  eine Erweiterung des Körpers  $\mathbb{R}$  (inklusive der Verknüpfungen).*

Im Folgenden verzichten wir –aufgrund der erfolgreichen Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen– auf die formale Unterscheidung der neutralen Elemente und stellen fest:  $0 = 0$  und  $1 = 1$ .

Bevor wir nun die Division komplexer Zahlen behandeln, führen wir den dabei nützlichen Begriff der Konjugierten einer komplexen Zahl ein: Für  $z = a + i \cdot b$  nennen wir  $\bar{z} := a - i \cdot b$  die *Konjugierte* zu  $z$ . Diese Operation hat beispielsweise folgende Eigenschaften, die man leicht als Übungsaufgabe nachrechnet:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Wir betrachten nun die Division zweier komplexer Zahlen.

Betrachte für  $z = a + i \cdot b$  mit  $z \neq 0$  die komplexe Zahl  $z' := \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{z}$ . Beachten Sie, dass insbesondere  $a^2 + b^2 \neq 0$  gilt und weiterhin:

$$z \cdot z' = z' \cdot z = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \bar{z} \cdot z = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (a^2 + b^2) = 1$$

Damit ist  $z'$  das multiplikative Inverse von  $z$  und wir bezeichnen im Folgenden  $z'$  mit  $z^{-1}$  oder  $\frac{1}{z}$ .

Die *Division komplexer Zahlen* können wir jetzt wie folgt einführen:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 : z_2 := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} (= z_1 \cdot z_2^{-1})$$

Insbesondere gilt:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} \cdot z} = \frac{1}{\bar{z} \cdot z} \cdot \bar{z},$$

wobei  $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$  für  $z = a + ib$  eine reelle Zahl ist, so dass man diese Formel bequem für die Berechnung komplexer Inversen ausnutzen kann.

Schauen wir uns ein Beispiel an und berechnen:  $\frac{3-2i}{4+5i}$ . Dann gilt:

$$\frac{(3-2i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{12-15i-8i+10i^2}{16-25i^2} = \frac{12-10-23i}{16+25}$$

$$= \frac{2 - 23i}{41} = \frac{2}{41} - i \cdot \frac{23}{41}$$

Insbesondere gilt für den Real- und Imaginärteil dieser komplexen Zahl:  $\operatorname{Re}\left(\frac{3-2i}{4+5i}\right) = \frac{2}{41}$  und  $\operatorname{Im}\left(\frac{3-2i}{4+5i}\right) = -\frac{23}{41}$ . Beachten Sie, dass der Imaginärteil einer komplexen Zahl immer eine reelle Zahl ist; es gilt für  $z = a + ib$  stets:  $\operatorname{Re}(z) = a$  und  $\operatorname{Im}(z) = b$ , wobei  $a$  und  $b$  reelle Zahlen sind.

\* \* \*

**Komplexe quadratische Gleichungen.** Als eine erste Anwendung komplexer Zahlen betrachten wir *quadratische Gleichungen* und suchen nach Lösungen. Zur Erinnerung: Eine quadratische Gleichung über den reellen Zahlen hat allgemein die Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wobei  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$ . Aus der Theorie der reellen Zahlen kennen wir die Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sofern  $D := b^2 - 4ac \geq 0$ . Hierbei wird  $D$  als *Diskriminante* bezeichnet.

Mithilfe der komplexen Zahlen können wir Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen, beispielsweise ist  $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = \pm 2i$ . Dieses Argument zeigt auch, dass für  $z = \sqrt{a}$  mit  $a < 0$  stets gilt:  $z = \pm i \cdot \sqrt{-a}$ .

Man kann leicht zeigen, dass sich dies auch für den Fall einer negativen Diskriminante bei quadratischen Gleichungen ausnutzen lässt; in diesem Fall (wenn  $D < 0$ ) finden wir auch die beiden komplexen Lösungen:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Man kann sogar noch mehr zeigen: Diese Lösungsformel gilt auch für komplexe Koeffizienten  $a, b, c$ . Allerdings muss man dann ggf. die Quadratwurzel einer komplexen Zahl berechnen und dies kann aufwendig sein.

In diesem Zusammenhang möchte ich den folgenden Satz erwähnen, der grundlegend ist:

**Satz 4.2** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jede polynomielle Gleichung  $n$ -ten Grades hat genau  $n$  komplexe Lösungen (Vielfachheiten mitgezählt).*

\* \* \*

**Komplexe Zahlen als reelle Ebene.** Kommen wir zu einem anderen Thema und befassen uns mit der *Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen*: Wir können eine komplexe Zahl  $z = a + ib$  mit einem geordneten Paar reeller Zahlen  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  identifizieren, das heißt, wir können folgende Abbildung angeben:

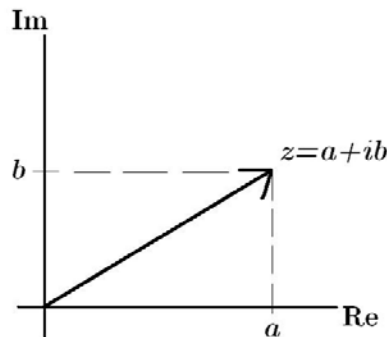
$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad a + ib \mapsto (a, b)$$

Diese Abbildung bildet eine komplexe Zahl  $z$  auf das Paar  $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$  ab und ist somit insbesondere bijektiv. Die Operationen “+” und “·” sehen in dieser Darstellung wie folgt aus:

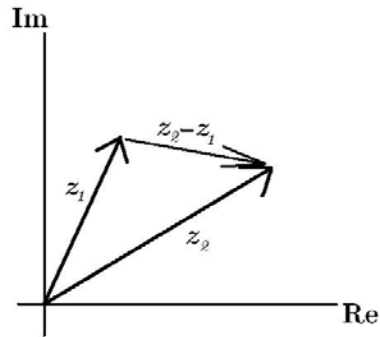
$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Insbesondere sieht man leicht, dass gilt:  $1 \mapsto (1, 0)$  und  $i \mapsto (0, 1)$ .

Mithilfe dieser Überlegung können wir uns eine geometrische Darstellung komplexer Zahlen überlegen. Da eine komplexe Zahl genau einem Paar von reellen Zahlen entspricht, können wir versuchen, komplexe Zahlen in eine Ebene einzuzichnen – die so genannte Gaußsche Zahlenebene:



Dabei interpretieren wir eine komplexe Zahl entweder als den Punkt  $(a, b)$  in der Ebene oder als den dazugehörigen so genannten *Ortsvektor*. Im Folgenden werden wir beides parallel verwenden, vorzugsweise aber mit den Ortsvektoren arbeiten. Diese Art der Sichtweise können wir insbesondere ausnutzen, wenn wir die *Addition* geometrisch interpretieren wollen, wie etwa im folgenden Bild dargestellt (hier sogar der spezielle Fall der *Subtraktion*, denn es gilt:  $z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$ ).

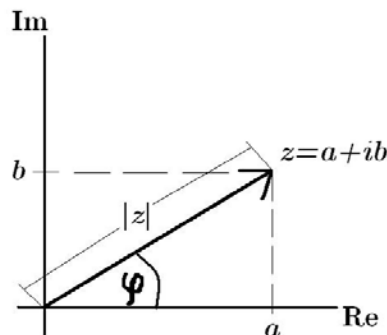


**Komplexe Zahlen als Polarkoordinaten.** Wenn wir uns die Multiplikation geometrisch überlegen wollen, dann ist eine andere Sichtweise der komplexen Zahlen besser geeignet: die *Darstellung der komplexen Zahlen durch Polarkoordinaten*.

Zunächst definieren wir den *Betrag* einer komplexen Zahl  $z = a+ib$ . Dieser ist gegeben durch:

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$$

Wenn Sie sich überlegen, dass in der Darstellung mittels Ortsvektoren immer ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, welches aus den beiden Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $|z|$  besteht, dann wird Ihnen auch klar, dass der Betrag einer komplexen Zahl gerade der Länge des Ortsvektors entspricht. Schauen wir uns dafür folgende Abbildung an:



Der Ortsvektor eines Punktes  $(a, b)$  kann auch durch den Winkel  $\varphi$  und die Länge des Ortsvektors charakterisiert werden – was wiederum einfach eine andere Sichtweise der komplexen Zahlen ist.

Dabei gilt –aufgrund des Kosinussatzes im rechtwinkligen Dreieck– die Gleichung  $a = |z| \cdot \cos \varphi$  und entsprechend  $b = |z| \cdot \sin \varphi$  wegen des Sinussatzes. Somit gilt insbesondere

$$z = a + ib = |z| \cdot \cos \varphi + i \cdot |z| \cdot \sin \varphi = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

In der Vorlesung über Analysis werden Sie die komplexe Exponentialfunktion kennenlernen und beweisen, dass folgendes gilt:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Dann gilt offenbar auch:  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ .

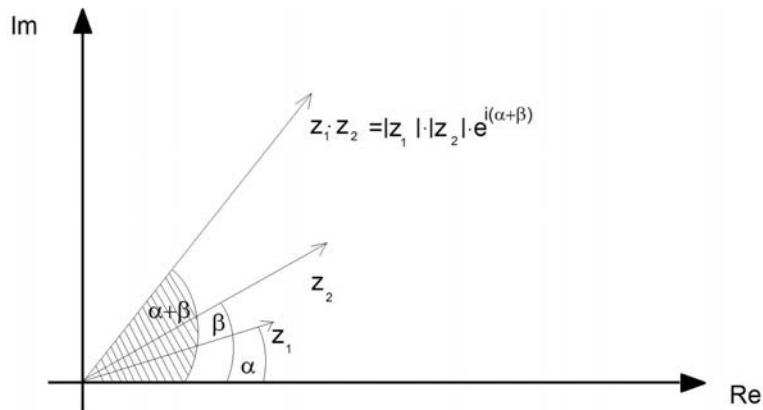
Damit haben Sie eine weitere Darstellung komplexer Zahlen gefunden. Wir können einer komplexen Zahl  $z = a + ib$  mit  $z \neq 0$  auf eindeutige Art und Weise das Paar  $(|z|, \varphi)$  zuordnen, wobei  $\varphi$  der zum Ortsvektor gehörende Winkel entsprechend der obigen Abbildung ist. Dieser Winkel wird dabei derart gewählt, dass  $-\pi < \varphi \leq \pi$  gilt; damit werden die beiden Halbkreise beschrieben. Dass wir hier nicht einen Vollkreis (also  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) nutzen, hat technische Gründe.

Schauen wir uns die nicht ganz einfache *Umwandlung in Polarkoordinaten* an: Es sei dafür eine komplexe Zahl  $z = a + ib$  gegeben. Dann gilt:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  und den gewünschten Winkel erhalten wir durch:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{|z|}, & \text{für } b \geq 0 \\ \arccos\left(-\frac{a}{|z|}\right) - \pi, & \text{für } b < 0 \end{cases}$$

Mit dieser Darstellung wird auch die geometrische Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen einfacher, denn es gilt:

$$(|z_1| \cdot e^{i\alpha}) \cdot (|z_2| \cdot e^{i\beta}) = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$$



Wir erkennen, dass sich die Winkel bei der Multiplikation addieren, das heißt, der eine Ortsvektor wird um den Winkel des anderen Ortsvektors gedreht, wobei sich die Längen der Ortsvektoren multiplizieren.

**Beispiel 4.3.** Jetzt sind wir auch dazu in der Lage, die  $n$ -te Wurzel einer komplexen Zahl zu berechnen:

Sei  $z \in \mathbb{C}$  dann können wir  $z$  in Polarkoordinaten darstellen  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$  und dann die Wurzel ziehen:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z| \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

Wenn wir nun noch  $e^{i2\pi+\varphi} = e^{i\varphi}$  beachten, kommen wir auf die Werte  $z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$  für  $k = 0, \dots, n-1$ . Man überprüft das durch einfaches Nachrechnen:

$$z_k^n = \sqrt[n]{|z|^n} \cdot \left( e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \right)^n = |z| \cdot e^{i\varphi+2k\pi} = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

Wir haben also alle  $n$ -ten Wurzeln von  $z$  gefunden und wissen wegen des Fundamentalsatzes der Algebra, dass es keine weiteren Lösungen der Gleichung  $x^n - z = 0$  geben kann.

\*   \*   \*

**Anwendungen.** Abschließend noch eine kurze Bemerkung zu den *Anwendungen* komplexer Zahlen: Komplexe Zahlen werden beispielsweise in der Physik als sehr nützlich angesehen und verdienen daher den Namen “imaginäre Zahlen” eigentlich nicht (allerdings ist dieser historisch gewachsen und so bleibt man natürlich dabei). Die komplexen Zahlen werden in der Physik u.a. in der Quantentheorie und Relativitätstheorie angewendet, um Schwingungsvorgänge oder Phasenverschiebungen zu untersuchen.

## 5. LINEARKOMBINATIONEN UND BASEN

Um Vektorräume im Allgemeinen verstehen zu können, werden wir diese etwas tiefer analysieren, um mithilfe neuer Begrifflichkeiten Zusammenhänge besser verstehen zu können.

**Linearkombinationen und lineare Unabhängigkeit.** Wir haben bei Vektoren im bekannten Raum  $\mathbb{R}^2$  bereits gesehen, dass wir jeden beliebigen Punkt in der Ebene durch Addition von gestauchten bzw. gestreckten Versionen von zwei gegebenen Vektoren erzeugen können, sofern die Ausgangsvektoren nicht auf einer Geraden liegen. Dieses Phänomen untersuchen wir als Erstes:

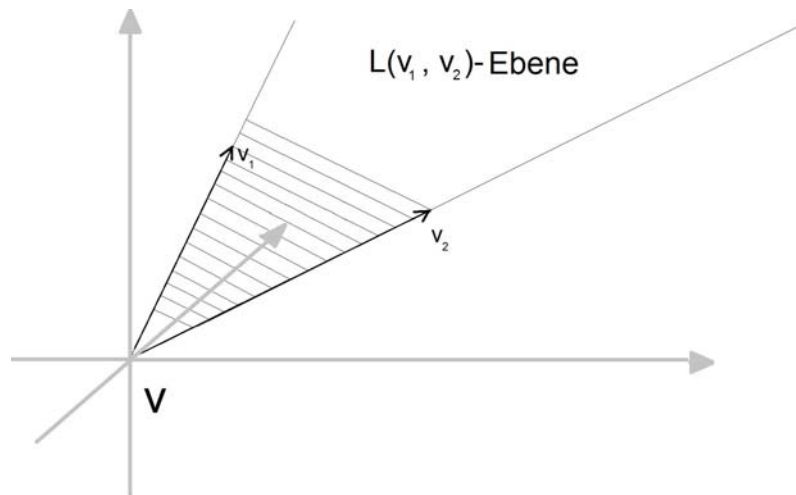
**Definition 5.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Ein  $v \in V$  ist eine *Linearkombination* (kurz: *LK*) von  $v_1, \dots, v_n$ , wenn es  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  gibt, sodass

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Die Körperelemente  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  heißen *Koeffizienten* dieser Linearkombination.

Die Menge  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \subseteq V$  aller Linearkombinationen von  $v_1, \dots, v_n$  heißt *Lineare Hülle* von  $v_1, \dots, v_n$ .

Im Fall  $n = 0$  setzen wir  $\mathcal{L}(\emptyset) := \{0\}$ .



**Satz 5.2.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dann ist  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  ein Untervektorraum von  $V$ .

*Beweis:* Zunächst einmal gilt, dass  $0 \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  ist und daher  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \neq \emptyset$ . (Klar per Definition für  $n = 0$ , für  $n \neq 0$  setze in der Linearkombination  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .)

Es bleibt die Abgeschlossenheit bezüglich der Vektorraum-Addition und Skalarmultiplikation zu zeigen:

Bzgl. “+”: Seien  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  und  $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} v + w &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \mu_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Analog gilt  $\lambda v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ . □

Geometrisch ist die lineare Hülle  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  der kleinste Unterraum von  $V$ , der die erzeugenden Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  enthält.

[Bild]

**Definition 5.3.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann heißt  $V$  *endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Folge  $(v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren in  $V$  gibt, sodass  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V$  gilt.

Beachten Sie, dass ein endlich erzeugter Vektorraum nicht notwendig endlich ist. Dies hängt gravierend vom Grundkörper ab. So ist beispielsweise der Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  offenbar endlich erzeugt, aber nicht endlich. Endliche Vektorräume werden etwa in Satz 5.18 betrachtet.

**Definition 5.4.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Das  $n$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  heißt *linear unabhängig* (kurz: *l.u.*), wenn für alle Darstellungen

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

gilt:  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ .

Ist das  $n$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_n)$  nicht linear unabhängig, so sagen wir, dass es *linear abhängig* ist. Wir vereinbaren: für  $n = 0$  sei das  $0$ -Tupel  $() = \emptyset$  immer linear unabhängig.

Diese Definition wird im ersten Moment häufig unterschätzt. Beachten Sie folgenden praktischen Algorithmus zur Überprüfung: Bei gegebenen Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  betrachten Sie das zugehörige homogene LGS

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

in den Unbekannten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und überprüfen, ob es nur genau eine Lösung, nämlich die triviale Lösung, gibt.

**Beispiel 5.5.** Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  im  $\mathbb{R}^3$  sind linear abhängig,

da gilt:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (-1) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = 0$$

Lineare Unabhängigkeit kann wie folgt charakterisiert werden:

**Satz 5.6.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und seien  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig genau dann, wenn für alle  $i \leq n$  gilt:  $v_i$  ist nicht Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ .

*Beweis:* Wir beweisen zuerst “ $\Rightarrow$ ”:

Sei  $(v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig. Betrachte  $i \leq n$  beliebig. Angenommen  $v_i$  wäre eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ , Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , sodass

$$\begin{aligned} v_i &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j v_j \end{aligned}$$

Dann gilt:  $0 = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j v_j + (-1) v_i$ . Damit haben wir einen Koeffizienten, der nicht 0 ist ( $0 \neq -1$ ) und dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der  $v_1, \dots, v_n$ .

Es bleibt “ $\Leftarrow$ ” zu zeigen: Sei also für alle  $i \leq n$ ,  $v_i$  keine Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ . Angenommen  $(v_1, \dots, v_n)$  wären linear abhängig. Wähle Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , sodass  $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  und es existiert ein  $i \leq n$  mit  $\lambda_i \neq 0$ .

Dann ist  $(-\lambda_i) v_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_j v_j$  und damit auch  $v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$ . Das ist eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  und somit ein Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Kommen wir zum zentralen Begriff einer Basis eines Vektorraums:

**Definition 5.7.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren, dann ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , falls  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind und  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V$ .

**Satz 5.8.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basis  $(v_1, \dots, v_n)$ . Für alle Vektoren  $v \in V$  existiert genau ein  $n$ -Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , sodass  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ . Wir nennen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  die Darstellung von  $v$  in der Basis  $v_1, \dots, v_n$ .

*Beweis:* Betrachte ein  $v \in V$ . Da  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = V$ , existiert ein Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , sodass  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ . Angenommen es gäbe außerdem die Darstellung  $v = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i$ . Dann gilt:

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda'_i) v_i$$

(In dieser Gleichungskette werden massiv die Vektorraumaxiome angewendet.) Dies ist eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors, denn bei den zwei verschiedenen Darstellungen von  $v$  existiert (mindestens) ein Index  $i \leq n$  mit  $\lambda_i \neq \lambda'_i$ , also insbesondere  $\lambda_i - \lambda'_i \neq 0$  und dies ist ein Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Definition 5.9.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und sei  $\mathbb{K}$  ein Körper, dann ist

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ mit } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ die kanonische Basis des}$$

Vektorraumes  $\mathbb{K}^n$ .

**Lemma 5.10.**  $(e_1, \dots, e_n)$  ist eine Basis des  $\mathbb{K}^n$ .

*Beweis:* Klar, denn zu zeigen ist  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{K}^n$  und die Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  sind linear unabhängig.

Betrachten wir dazu die Definition des  $\mathbb{K}^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$  und dieses Tupel entspricht gerade der Linearkombination  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ .

Für die lineare Unabhängigkeit müssen wir überprüfen, ob es für die Darstellung des Nullvektors als einzige Lösung  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$  gibt. Dies ist offensichtlich für die Linearkombination

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

\* \* \*

**Existenzsätze für Basen.** Bisher haben wir gesehen, welche Vorteile Basen haben, können uns aber noch nicht sicher sein, dass wir überhaupt in beliebigen Vektorräumen eine solche schöne Folge von Vektoren finden können. Zumindest für endlich-dimensionale Vektorräume wird diese Existenz durch die folgenden drei Sätze garantiert. In unendlich-dimensionalen Vektorräumen ist dies nicht so einfach zu erhalten, da dies gravierend von der zugrunde liegenden Mengenlehre abhängt (Stichwort: Zornsches Lemma bzw. Auswahlaxiom).

**Satz 5.11 (Basisergänzungssatz).** Sei  $V$  ein beliebiger Vektorraum. Sei die Folge  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig in  $V$ ,  $w_1, \dots, w_s \in V$  und

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) = V.$$

Dann gibt es Indizes  $i_1, \dots, i_k \leq s$ , sodass  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  eine Basis von  $V$  ist.

**Beachten Sie:** Jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums kann zu einer Basis ergänzt werden!

*Beweis:* Durch vollständige Induktion über  $s \in \mathbb{N}$ .

Induktionsanfang: Sei  $s = 0$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig in  $V$  und  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = V$ . Also ist  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Basis von  $V$ .

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Sei  $s \in \mathbb{N}$  und der Satz gelte für  $s \in \mathbb{N}$ .

Behauptung: Der Satz gilt dann auch für  $s + 1$ .

Betrachte  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig in  $V$ ,  $w_1, \dots, w_{s+1} \in V$  mit

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, w_{s+1}) = V.$$

Fall 1: Für alle  $i \in \{1, \dots, s + 1\}$  gilt:  $w_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ .

Dann ist jede Linearkombination der Vektoren

$v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, w_{s+1}$  eine Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  und es gilt:

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, w_{s+1}) = V.$$

Also ist  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Basis von  $V$ .

Fall 2: Es gibt ein  $i \in \{1, \dots, s + 1\}$  mit  $w_i \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ .

**Behauptung:**  $(v_1, \dots, v_r, w_i)$  ist linear unabhängig.

*Beweis der Behauptung:* Sei  $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda w_i$ . Wenn  $\lambda \neq 0$  wäre, dann gilt:  $w_i = -\frac{1}{\lambda}(\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j) \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ . Dies ist ein Widerspruch.

Also ist  $\lambda = 0$  und somit gilt  $\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = 0$ . Da  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig sind, gilt:  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . ☒(Beh.)

Weiter gilt (nach Umsortierung)

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, w_i, \underbrace{w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_s}_{s\text{-viele Elemente}}) = V.$$

Nach Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die letzten  $s$  Elemente existieren Indizes  $i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s + 1\}$ , sodass insgesamt die Folge  $(v_1, \dots, v_r, w_i, w_{i_2}, \dots, w_{i_k})$  eine Basis von  $V$  ist.

Damit ist die Aussage per vollständiger Induktion bewiesen. ☒

**Satz 5.12 (Basisexistenzsatz).** *Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $K$ -Vektorraum. Dann existiert eine Basis von  $V$ .*

*Beweis:* Wähle eine Folge von Vektoren  $(w_1, \dots, w_s)$  aus  $V$ , die  $V$  aufspannen:

$$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_s).$$

Die leere Folge  $() = \emptyset$  der Länge  $r = 0$  ist linear unabhängig in  $V$ . Nach dem Basisergänzungssatz mit  $r = 0$  existieren Indizes  $i_1, \dots, i_k \leq s$ , sodass  $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  eine Basis von  $V$  ist. Somit existiert eine Basis von  $V$ .  $\square$

**Satz 5.13 (Basisaustauschsatz).** *Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien  $(v_1, \dots, v_m)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  zwei Basen von  $V$ . Dann existiert für alle  $i \leq m$  ein  $j \leq n$ , sodass  $(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$  ist.*

*Beweis:* Betrachte ein beliebiges  $i \leq m$ .

- (1) Es gibt ein  $j \leq n$ , sodass  $w_j \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m)$ . Nehmen wir an, dass für alle  $j \leq n$  dies nicht der Fall wäre. Also gilt für beliebige  $j \leq n$ , dass  $w_j \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m)$ . Dann ist

$$V = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m).$$

Also ist  $v_i \in V$  und somit  $v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m)$ . Dies ist ein Widerspruch.

Wähle ein  $j \leq n$ , sodass  $w_j \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m)$ . Dann zeigt man ähnlich wie im Beweis des Basisergänzungssatzes:

- (2)  $(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$  ist linear unabhängig. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m, v_i) &\supseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) \\ &= V. \end{aligned}$$

Nach dem Basisergänzungssatz ist nun (entweder) die Folge

$$(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m, v_i)$$

oder die Folge  $(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$ . Da aber  $w_j \in V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$  gilt, ist die Folge  $(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m, v_i)$  linear abhängig und somit  $(v_1, \dots, v_{i-1}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$  die gewünschte Basis.  $\square$

\* \* \*

Wir nähern uns dem Dimensionsbegriff eines Vektorraums. Um diesen zu rechtfertigen, benötigen wir den folgenden

**Satz 5.14.** *Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und seien zwei beliebige Basen  $(v_1, \dots, v_m)$  und  $(w_1, \dots, w_n)$  von  $V$  gegeben. Dann ist  $m = n$ .*

*Beweis:* Angenommen, es gelte  $m \neq n$ . O.B.d.A. sei  $m > n$ . Dann definiere für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  rekursiv einen Index  $j(i) \in \{1, \dots, n\}$  als das kleinste  $j \leq n$ , sodass  $(w_{j(1)}, \dots, w_{j(i-1)}, w_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$  ist. Die Funktion  $i \mapsto j(i)$  ist nach dem Basisaustauschsatz wohldefiniert. Somit ist also  $(w_{j(1)}, \dots, w_{j(m)})$  eine Basis von  $V$ . Da  $m > n$  gilt, gibt es  $i, i' < m$ , sodass  $j(i) = j(i')$ . Somit enthält die Folge  $(w_{j(1)}, \dots, w_{j(m)})$  (mindestens) zwei gleiche Vektoren und ist damit linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch zur Basiseigenschaft.  $\square$

Schließlich können wir den Begriff der Dimension einführen.

**Definition 5.15.** Sei  $V$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann ist die Dimension von  $V$  die Anzahl  $n$  der Vektoren in einer Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ . In diesem Fall heißt  $V$  auch  $n$ -dimensional. Die Dimension von  $V$  wird mit  $\dim(V)$  (oder auch einfach  $\dim V$ ) bezeichnet.

Ein endlich erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum wird auch als endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum bezeichnet. Wenn  $V$  nicht endlich erzeugt ist, so ist  $V$  unendlich-dimensional. Wir schreiben hierfür auch kurz:  $\dim(V) = \infty$ .

Die Dimension von Untervektorräumen ist nicht größer als die des Grundraums:

**Satz 5.16.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist  $U$  ebenfalls endlich-dimensional und es gilt:

$$\dim(U) \leq \dim(V)$$

*Beweis:* Jede linear unabhängige Folge  $(v_1, \dots, v_r)$  in  $U$  kann nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis von  $V$  ergänzt werden. Also ist  $r \leq \dim(V)$ . Wähle nun eine linear unabhängige Folge  $(v_1, \dots, v_r)$  von Elementen in  $U$ , deren Länge maximal ist.

**Behauptung:** Dann gilt  $(v_1, \dots, v_r)$  ist eine Basis von  $U$ .

Angenommen nicht, dann gilt:  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_r) \neq U$ . Wähle ein  $u \in U$ , sodass  $u \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ . Betrachte eine Linearkombination  $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_r \cdot v_r + \lambda \cdot u = 0$ . Dann ist  $\lambda = 0$ , da  $u \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r)$ . Da  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig ist, gilt:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

Damit ist  $(v_1, \dots, v_r, u)$  linear unabhängig. Dies ist ein Widerspruch zur maximalen Länge der Folge  $(v_1, \dots, v_r)$ .  $\square$

Der folgende Satz wird uns das Rechnen mit Unterräumen erheblich erleichtern:

**Satz 5.17.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist

$$U \neq V \quad \text{genau dann, wenn} \quad \dim(U) < \dim(V).$$

*Beweis:* Wir zeigen zunächst “ $\Rightarrow$ ”:

Angenommen  $U \neq V$ . Wähle eine Basis  $(v_1, \dots, v_r)$  von  $U$ . Die Folge  $(v_1, \dots, v_r)$  ist linear unabhängig in  $V$ . Nach dem Basisergänzungssatz kann man diese Folge zu einer Basis  $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$  von  $V$  ergänzen. Da  $U \neq V$  ist, gilt  $s \neq 0$ . Damit gilt

$$\dim(U) = r < r + s = \dim(V).$$

“ $\Leftarrow$ ” ist klar. □

Beachten Sie: Da jeder Untervektorraum auch ein Vektorraum ist, können wir über seine Dimension sprechen.

Der Satz 5.17 lässt sich effektiv einsetzen, wenn man beispielsweise zeigen möchte, dass zwei Unterräume gleich sind. Seien also konkret  $U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$ . Wir möchten die Gleichheit  $U_1 = U_2$  zeigen. Dann reicht es zu zeigen, dass  $U_1 \subseteq U_2$  und  $\dim(U_1) = \dim(U_2)$ . Damit sind offenbar beide Unterräume gleich.

Der folgende Satz gibt die Anzahl der Elemente eines endlich-dimensionalen Vektorraums zu einem endlichen Körper an:

**Satz 5.18.** *Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $K$  habe  $k$  Elemente. Dann hat  $V$  genau  $k^n$ -viele Elemente.*

*Beweis:* Die Elemente des Vektorraums  $V$  entsprechen eindeutig den  $n$ -Tupeln  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  aus  $K$ . (Basisdarstellung zur fixierten Basis.) Es gibt  $k^n$ -viele derartiger  $n$ -Tupel. □

**Beispiel 5.19.** Bei den Vektorräumen ist entscheidend, welcher Körper zugrunde liegt. Es ist also für einen Körper  $K$  die Struktur  $K$  insbesondere ein  $K$ -Vektorraum, aber auch ein  $K'$ -Vektorraum für jeden Teilkörper  $K' \subseteq K$ .

So ist  $\mathbb{C}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, sowie  $\mathbb{R}$  auch ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist. Beachten Sie, dass bei verschiedenen Grundkörpern sich die Längen der Basen, also die Dimensionen, ändern können.

Die Dimension des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}$  ist offenbar 1, denn sowohl die Folge  $(1)$  aber auch die Folge  $(i)$  ist jeweils eine Basis. Dagegen ist die Dimension der komplexen Zahlen als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum 2, denn wir haben etwa die Folge  $(1, i)$  als Basis. Die komplexen Zahlen als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum sind aus Gründen der Mächtigkeit nicht endlich dimensional. Eine Basis bildet etwa die Folge der irrationalen Zahlen ergänzt um die Elemente der Menge der Zahlen der Gestalt  $ir$  für irrationale Zahlen  $r$ .

Achtung!  $\mathbb{R}$  ist kein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, da in einem solchen Fall die Skalarmultiplikation nicht wohldefiniert ist (da z.B.  $i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$  gilt).

**Beispiel 5.20.** Betrachten Sie die Vektoren  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$ . Dann sind diese Vektoren linear unabhängig.

Dies gilt, weil: Sei  $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = 0$  eine beliebige, fixierte Linearkombination des Nullvektors, wobei  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Wir wollen zeigen, dass daraus folgt:  $a = b = c = 0$ . Zunächst formen wir um und erhalten:

$$b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} = -a \in \mathbb{Q}, \quad (-a)^2 = 2b^2 + 2bc \cdot \sqrt{6} + 3c^2 \in \mathbb{Q}$$

Fall 1: Seien  $b, c \neq 0$ . Dann gilt offenbar:

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2bc}((-a)^2 - 2b^2 - 3c^2) \in \mathbb{Q},$$

allerdings ist  $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ . Dies führt zum Widerspruch.

Fall 2: Sei  $b \neq 0$  und  $c = 0$ . Somit erhalten wir:

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q},$$

allerdings ist  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Dieses führt zum Widerspruch.

Fall 3: Sei  $b = 0$  und  $c \neq 0$ . In diesem Fall folgt:

$$\sqrt{3} = -\frac{a}{c} \in \mathbb{Q},$$

allerdings ist  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ , Widerspruch.

Damit müssen  $b, c = 0$  sein, also insgesamt:  $a = b = c = 0$ .

**Bemerkung 5.21.** Die Vektoren  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$  sind linear abhängig. Es gilt offenbar:

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1,$$

wobei die linke Seite der Gleichung als Element in  $V$  aufgefasst wird, die rechte Seite als skalare Multiplikation mit  $\sqrt{2} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$  und dem Element  $1 \in V$ . Analoges gilt für  $\sqrt{3}$ , wobei die linke Seite der Gleichung als Element in  $V$  aufgefasst wird, die rechte Seite als skalare Multiplikation mit  $\sqrt{2} \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$  und dem Element  $1 \in V$ . Analoges gilt für  $\sqrt{3}$ .

**Beispiel 5.22.** Jetzt kommt ein sehr wichtiger endlich-dimensionaler Vektorraum, nämlich der Vektorraum der Polynome  $n$ -ten Grades über dem Körper  $\mathbb{K}$ , den wir mit  $\mathbb{K}[x]$  bezeichnen wollen.

Dabei handelt es sich um alle Funktionen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

mit skalaren Vielfachen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{K}$ . Die einfachsten Vertreter dieser Klasse sind lineare Funktionen, etwa  $f(x) = ax + b$ , quadratische Funktionen, etwa  $f(x) = x^2$  oder auch kubische Funktionen, etwa  $f(x) = x^3$ , die Ihnen bestimmt schon aus der Schule vertraut sind.

Bitte machen Sie sich an dieser Stelle klar, dass es sich hier wirklich um einen Vektorraum handelt (die Summe und skalaren Vielfache von Polynomen sind wieder Polynome etc...). Wie bestimmt man nun eine Basis des Polynom(vektor)raums?

Als Erstes liegt es nahe die Menge der Monome bis zum Grad  $n$ , also

$$b_0(x) = x^0 = 1, \quad b_1(x) = x^1, \quad b_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad b_n(x) = x^n$$

als Basis zu vermuten. In der Tat gilt für jedes  $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = a_n \cdot b_n + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + \dots + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_0$$

also besitzt jedes  $p(x)$  eine Darstellung als Linearkombination der  $b_i$ . Die  $b_i$  sind auch wirklich linear unabhängig, denn:

$$\lambda_n \cdot b_n + \lambda_{n-1} \cdot b_{n-1} + \dots + \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_0 \cdot b_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$$

Damit haben wir gezeigt, dass die  $b_i$  eine Basis von  $\mathbb{K}[x]$  bilden.

Schauen wir uns jetzt die Polynome  $c_i(x) := (x+1)^i$ ,  $i = 0 \dots n$ , an. Bilden die  $c_i$  eine Basis des  $\mathbb{K}[x]$ ?

Dazu nehmen wir uns wieder ein beliebiges  $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ , wobei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0,$$

und multiplizieren die  $c_i$  aus:

$$\begin{aligned} c_0(x) &= (x+1)^0 = 1 \\ c_1(x) &= (x+1) \\ c_2(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ c_3(x) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ c_i(x) &= \mu_{i,i} x^i + \mu_{i,i-1} x^{i-1} + \dots + \mu_{i,0} x^0 \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt eine Darstellung von  $p(x)$  als Linearkombination der  $c_i$  erhalten möchten, dann müssen wir  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  finden, so dass:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \\ &= \lambda_n \cdot c_n + \lambda_{n-1} \cdot c_{n-1} + \dots + \lambda_1 \cdot c_1 + \lambda_0 \cdot c_0 \\ &= \lambda_n (\mu_{n,n} x^n + \mu_{n,n-1} x^{n-1} + \dots + \mu_{n,0}) + \\ &\quad \lambda_{n-1} (\mu_{n-1,n-1} x^{n-1} + \mu_{n-1,n-2} x^{n-2} + \dots + \mu_{n-1,0}) + \dots + \lambda_0 \cdot 1 \end{aligned}$$

Dadurch gelangen wir zu den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \mu_{1,0} + \lambda_2 \cdot \mu_{2,0} + \dots + \lambda_n \cdot \mu_{n,0} \\ a_1 &= \lambda_1 \cdot \mu_{1,1} + \lambda_2 \cdot \mu_{2,1} + \dots + \lambda_n \cdot \mu_{n,1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_n = \lambda_n \cdot \mu_{n,n}$$

Wir schreiben dies jetzt als LGS mit  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  als Unbekannte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \mu_{1,0} & \mu_{2,0} & \cdots & \mu_{n,0} & a_0 \\ 0 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} & \cdots & \mu_{n,1} & a_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_{n,n} & a_n \end{array}$$

Diesen Typ Gleichungssystem (Zeilenstufenform) haben wir uns aber bereits im Kapitel 1 angesehen. Man kann hier durch Auflösen des Systems von unten nach oben und von hinten nach vorne die  $\lambda_i$  bestimmen, da alle Pivotelemente nicht Null sind.

Darüberhinaus stellen wir mit diesem LGS schnell fest, dass die  $c_i$  linear unabhängig sind: Der Ansatz  $\lambda_0 \cdot c_0 + \lambda_1 \cdot c_1 + \dots + \lambda_n \cdot c_n = 0$  bringt uns mit der obigen Rechnung zu folgendem LGS:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \mu_{1,0} & \mu_{2,0} & \cdots & \mu_{n,0} & 0 \\ 0 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} & \cdots & \mu_{n,1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_{n,n} & 0 \end{array}$$

Daraus folgt aber wieder  $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_0 = 0$

**Beispiel 5.23.** Wir wollen das gerade Gelernte nun an einem praktischen Beispiel anwenden. Betrachten Sie die folgenden Polynome über  $\mathbb{R}$  und überprüfen Sie diese auf lineare Unabhängigkeit:

$$p_1(x) = 3x^2 + 2x + x \quad p_2(x) = 2x^2 + x + 2 \quad p_3(x) = x^2 + 2x + 4$$

Das Überprüfen der linearen Unabhängigkeit sollte für Sie bereits Routine sein:

$$0 = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = (3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)x + (2\lambda_2 + 4\lambda_3)$$

Denken Sie daran, dass die Monome  $x^2, x^1, x^0$  eine Basis unseres Polynomraumes sind und wir deshalb das Nullpolynom bzgl. dieser Basis nur durch  $0 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^0$  darstellen können. Dadurch gelangen wir zu folgenden Gleichungen:

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

oder als LGS:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

Wir erhalten  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , also sind unsere Polynome linear unabhängig.

**Beispiel 5.24.** Wir betrachten nun die Menge der  $n \times n$  quadratischen Zahlenschemata mit Einträgen in  $\mathbb{R}$ , wobei alle Zeilen- und Spaltensummen Null ergeben sollen. Nun überlegen Sie sich bitte, dass diese so definierten "Sudokus" einen Vektorraum bilden. Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

Dies ist ganz einfach: Um unsere Sudokus zu charakterisieren brauchen wir für jede Position in unserem Zahlenschema eine Variable und führen für alle Zeilen- und Spaltensummen eine Gleichung ein. Dadurch erhalten wir ein lineares homogenes Gleichungssystem mit  $n^2$  Unbekannten und  $2n$  Gleichungen. In unserem Gleichungssystem ist jede Zeile genau  $n^2$  lang und es stehen genau  $n$  Einsen an jeweils unterschiedlichen Stellen. Daraus folgt, dass wir dieses LGS in Zeilenstufenform bringen müssen und beim Berechnen der Lösung die Anzahl der frei wählbaren Unbekannten als die Dimension des Vektorraums erhalten.

Im Fall  $n = 3$  sieht das beispielsweise wie folgt aus: Wir starten mit unserem Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

und kommen auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 &= 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 0 \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 0 \end{aligned}$$

nach einigen Umformungsschritten erhalten wir:

$$\begin{array}{cccccccc|cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die Lösungsmenge dieses LGS ist somit:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

und wie Sie sicher schon festgestellt haben, sind die zu den  $\lambda$  gehörigen Vektoren eine Basis des Vektorraums, oder wenn wir diese in Form unserer Zahlenschemata schreiben wollen, sieht die Basis wie folgt aus:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 5.25.** Jetzt noch eine kleine Übung in Sachen Basisergänzungssatz: Wir wollen beispielsweise nachfolgende Menge von Vektoren zu einer Basis des  $\mathbb{R}^5$  ergänzen:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie fängt man an? – Ganz einfach: Als Erstes müssen wir überprüfen, ob die Vektoren linear unabhängig sind, sonst ist unser Unterfangen unmöglich: Man kann keine linear abhängige Menge von Vektoren zu einer Basis ergänzen, weil eine Basis immer aus linear unabhängigen Vektoren bestehen muss. Die ganze Idee besteht nun darin, solche Linearkombinationen unserer Ausgangsvektoren zu betrachten, die wir besonders einfach (durch kanonische Einheitsvektoren) zu einer Basis des  $\mathbb{R}^5$  ergänzen können.

Das Ganze wird Sie an die Zeilenstufenform erinnern, die wir aus dem Kapitel über Lineare Gleichungssysteme kennen. Das Gute an dieser maximalen Zeilenstufenform ist, dass wir nur Einsen und Nullen in den Zeilenvektoren stehen haben und bei diesen ist es besonders einfach eine Ergänzung zur Basis zu finden. Wenn wir beispielsweise

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

angeben würden, dann wäre die naheliegendste Ergänzung zu einer Basis durch folgende Vektoren gegeben:

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben nun unsere Ausgangsvektoren  $u_1, u_2, u_3$  als Zeilenvektoren in ein Gleichungssystem ohne rechte Seite:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Dieses bringen wir mit den uns erlaubten Umformungsschritten in Zeilenstufenform.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 0 & 8 & 0 & & 2 & 3 & 0 & 8 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & \rightsquigarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rightsquigarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Wir haben nun aus unseren Ausgangsvektoren eine Linearkombination (mit derselben linearen Hülle) erzeugt, welche wir auf recht einfache Art und Weise (nämlich durch kanonische Einheitsvektoren) ergänzen können. Insgesamt ergänzen wir also

$u_1, u_2, u_3$  durch

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des  $\mathbb{R}^5$ .

## 6. LINEARE ABBILDUNGEN

In diesem Zusammenhang betrachten wir Abbildungen zwischen Vektorräumen, die die Vektorraumstruktur respektieren. Diese Abbildungen sind in der Linearen Algebra so grundlegend wie Lineare Gleichungssysteme.

**Grundlagen Linearer Abbildungen.** Wir definieren, was wir als Homomorphismus zwischen den Vektorraumstrukturen verstehen. Diese Definition entspricht der Definition des bekannten Begriffs vom Homomorphismus zwischen allgemeinen Strukturen.

**Definition 6.1.** *Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$ . Dann ist die Abbildung  $f$  linear oder ein Homomorphismus von  $V$  nach  $W$ , wenn*

(a) für alle  $x, y \in V$  gilt:

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

(b) für alle  $x \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

**Satz 6.2.** *Seien  $V, W, X$  drei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$  und  $g : W \rightarrow X$  zwei lineare Abbildungen. Dann sind die beiden Abbildungen  $g \circ f : V \rightarrow X$  und  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  linear.*

*Beweis:* Betrachte  $x, y \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda \cdot x) &= g(f(\lambda \cdot x)) = g(\lambda \cdot f(x)) \\ &= \lambda \cdot g(f(x)) = \lambda \cdot (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

Es ist klar, dass  $\text{id}_V$  linear ist. □

**Beispiel 6.3.** Die anschaulichsten Beispiele für lineare Abbildungen finden sich in der 2- und 3-dimensionalen analytischen Geometrie.

(a) *Streckung* ("Zoomen"): Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und definiere die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; f(x) = \lambda \cdot x$$

durch Skalar-Multiplikation mit dem Faktor  $\lambda$ . Wir hatten bereits gesehen, dass die Skalar-Multiplikation mit  $\lambda$  eine Vergrößerung um den Faktor  $\lambda$  darstellt. Die Abbildung  $f$  ist linear, denn für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt unter Benutzung der Vektorraum-Axiome:

$$f(x + y) = \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y = f(x) + f(y)$$

und

$$f(\mu \cdot x) = \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x = (\mu \cdot \lambda) \cdot x = \mu \cdot (\lambda \cdot x) = \mu \cdot f(x).$$

- (b) *Komplexe Multiplikation:* Die komplexe Multiplikation war auf  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definiert durch

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$

Sei  $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$  und definiere die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; f(a, b) = (x, y) \cdot (a, b) = z \cdot (a, b).$$

Die Linearität der Abbildung  $f$  folgt ähnlich wie in (a) aus den Körper-Axiomen für  $\mathbb{C}$ .

- (c) *Drehung des  $\mathbb{R}^2$ :* Wir hatten gesehen, dass die Multiplikation mit der imaginären Einheit  $i$  einer Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  entspricht. Damit ist eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  um  $\frac{\pi}{2}$  linear. Auch Drehungen um andere Winkel sind lineare Abbildungen.

**Beispiel 6.4.** Betrachten wir die Abbildung  $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(x, y) = x + \sqrt{2}y$ . Hierbei fassen wir den Urbildraum  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$  als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum auf. Dann ist  $f$  linear.

Es ist zu zeigen:

- (i)  $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$  und  
(ii)  $f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

Zu (i):

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1 + x_2) + \sqrt{2}(y_1 + y_2) \\ &= x_1 + \sqrt{2}y_1 + x_2 + \sqrt{2}y_2 \\ &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

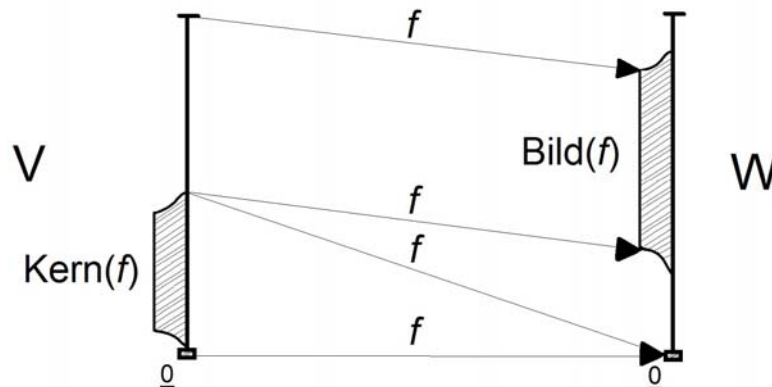
Zu (ii):

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda \cdot x + \sqrt{2}\lambda \cdot y \\ &= \lambda \cdot (x + \sqrt{2}y) \end{aligned}$$

$$= \lambda \cdot f \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

**Satz 6.5.** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:

- (a) Das Bild  $f[V]$  ist ein Untervektorraum von  $W$ . Man bezeichnet diesen auch als  $\text{Bild}(f)$ .
- (b) Das Urbild  $f^{-1}[\{0\}]$  ist ein Untervektorraum von  $V$ . Man nennt  $f^{-1}[\{0\}]$  auch den Kern der Abbildung  $f$  und bezeichnet ihn auch als  $f^{-1}(0)$  oder  $\text{Kern}(f)$ .



*Beweis:* Wir beweisen jeweils die Eigenschaften eines Untervektorraums:

- (a) Es gilt:  $0 = f(0) \in f[V]$ , also ist das Bild von  $f$  nicht leer. Betrachte beliebige  $x, y \in f[V]$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Wähle  $\bar{x}, \bar{y} \in V$  mit  $x = f(\bar{x})$  und  $y = f(\bar{y})$ . Dann gilt

$$x + y = f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y}) \in f[V],$$

und

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot f(\bar{x}) = f(\lambda \cdot \bar{x}) \in f[V].$$

- (b) Es gilt  $f(0) = 0$ , also  $0 \in f^{-1}[\{0\}]$ , also  $\text{Kern}(f) \neq \emptyset$ . Betrachte  $x, y \in \text{Kern}(f)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt  $0 = f(x) = f(y)$  und somit

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$$

also ist  $x + y \in \text{Kern}(f)$ . Ebenso gilt:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

also ist  $\lambda \cdot x \in \text{Kern}(f)$ .

□

**Definition 6.6.** Die Dimension des Bildes einer linearen Abbildung bezeichnet man als Rang dieser Abbildung, d.h. für  $f: V \rightarrow W$  linear schreiben wir kurz für den Rang

$$\text{Rg}(f) := \dim(\text{Bild}(f)).$$

Die Dimension des Kerns wird als **Defekt** bezeichnet, kurz:

$$\text{Df}(f) := \dim(\text{Kern}(f)).$$

Der folgende Satz hilft uns, wenn wir eine Basis des Bildes finden wollen:

**Satz 6.7.** Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ . Dann gilt:

$$\text{Bild}(F) = \mathcal{L}(F(v_1), \dots, F(v_n)).$$

*Beweis:*

Wir zeigen beide Inklusionen:

“ $\supseteq$ ” Sei  $v \in \mathcal{L}(F(v_1), \dots, F(v_n))$ . Dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , so dass

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = F\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \in \text{Bild}(F)$$

“ $\subseteq$ ” Sei  $v \in \text{Bild}(F)$ , das heißt es existiert ein  $\bar{v} \in V$  mit  $v = F(\bar{v})$ . Da  $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$  existieren  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  mit  $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ . Damit gilt

$$v = F(\bar{v}) = F\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i)$$

somit ist  $v \in \mathcal{L}(F(v_1), \dots, F(v_n))$ .

□

**Beispiel 6.8.** Sei  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind Basen von  $\text{Kern}(f)$  und  $\text{Bild}(f)$ .

**Bild**( $f$ ): Offenbar gilt  $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ . Nach Satz 6.7 gilt:

$$\text{Bild}(F) = \mathcal{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3)) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

Eine Basis bilden etwa  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Kern**( $f$ ): Später in diesem Kapitel werden wir den Dimensionssatz 6.17 beweisen, der besagt, dass die Summe des Rangs und des Defekts eines Homomorphismus gleich der Dimension des Urbild-Vektorraums ist:

$$\text{Df}(F) = \dim(\text{Kern}(F)) = \dim(V) - \dim(\text{Bild}(F)) = 3 - 2 = 1$$

Daher wüssten wir schon, welche Dimension die gesuchte Lösungsmenge hat, die wir jetzt durch das Lösen bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Sei etwa  $x_3$  beliebig gewählt. Dann gilt:  $x_2 = -2x_3$  und

$$x_1 = 0 - 3x_3 - 2x_2 = -3x_3 + 4x_3 = x_3,$$

so dass wir schließlich als Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems und somit auch als Kern der Abbildung  $F$  erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A, b) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3, x_2 = -2x_3\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Eine Basis des Kerns von  $F$  ist mit dem Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  gegeben.

Im Folgenden betrachten wir die Homomorphismen noch einen Schritt abstrakter: Wir führen Operationen auf der Menge der linearen Abbildungen ein und betrachten damit die Menge der Homomorphismen selbst als Vektorraum.

**Definition 6.9.** Seien  $V, W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Definiere die Struktur  $\text{Hom}(V, W) := (\text{Hom}(V, W), +, \cdot, 0)$  aller Homomorphismen von  $V$  nach  $W$

$$\text{Hom}(V, W) := \{f \mid f : V \rightarrow W \text{ linear}\}$$

Definiere die Addition “+” durch:

$$\begin{aligned} + : \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Definiere die skalare Multiplikation “ $\cdot$ ” durch:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

Definiere die Nullabbildung  $0 \in \text{Hom}(V, W)$  durch:

$$0(x) := 0$$

Beachten Sie, dass wir eigentlich schreiben müssten:

$$(f +_{\text{Hom}(V, W)} g)(x) = f(x) +_W g(x),$$

ebenso bei  $(\lambda \cdot_{\text{Hom}(V, W)} f)(x) = \lambda \cdot_W f(x)$  und  $0_{\text{Hom}(V, W)}(x) = 0_W$ . Aber wir unterdrücken diese Art der Signatur.

**Satz 6.10.** Seien  $V, W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, dann ist  $\text{Hom}(V, W)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

*Beweis:* Wir müss(t)en die Vektorraum-Axiome der Reihe nach prüfen. Exemplarisch zeigen wir die Kommutativität:  $f + g = g + f$ :

Diese ist allerdings klar, denn es gilt:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{per Definition}$$

$$\begin{aligned}
 &= g(x) + f(x) && W \text{ ist Vektorraum} \\
 &= (g + f)(x) && \text{per Definition}
 \end{aligned}$$

□

**Definition 6.11.** Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Homomorphismus. Dann definieren wir:

- (a)  $f$  ist ein *Monomorphismus*, wenn  $f$  injektiv ist.
- (b)  $f$  ist ein *Epimorphismus*, wenn  $f$  surjektiv ist.
- (c)  $f$  ist ein *Isomorphismus*, wenn  $f$  bijektiv ist.
- (d)  $f$  ist ein *Endomorphismus*, wenn  $V = W$  ist.
- (e)  $f$  ist ein *Automorphismus*, wenn  $f$  bijektiv und  $V = W$  ist.

**Satz 6.12.** Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Dann ist ebenfalls  $f^{-1} : W \rightarrow V$  ein Isomorphismus.

*Beweis:* Da  $f$  bijektiv ist, dürfen wir auch von der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  sprechen. Die Bijektivität von  $f^{-1} : W \rightarrow V$  ist klar. Wir zeigen, dass  $f^{-1}$  linear ist: Betrachte  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $w_0, w_1 \in W$ . Wegen der Surjektivität von  $f$  existieren  $v_0, v_1 \in V$  mit  $f(v_0) = w_0$  und  $f(v_1) = w_1$ , also gilt auch:  $v_i = f^{-1}(w_i)$  für  $i = 0, 1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(w_0 + w_1) &= f^{-1}(f(v_0) + f(v_1)) \\
 &= f^{-1}(f(v_0 + v_1)) && \text{wegen der Linearität von } f \\
 &= v_0 + v_1 \\
 &= f^{-1}(w_0) + f^{-1}(w_1)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\lambda \cdot w_0) &= f^{-1}(\lambda \cdot f(v_0)) \\
 &= f^{-1}(f(\lambda \cdot v_0)) && \text{Linearität von } f \\
 &= \lambda \cdot v_0 \\
 &= \lambda \cdot f^{-1}(w_0)
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 6.13.** Setze  $\text{Aut}(V) := \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ Automorphismus}\}$ . Mittels der Hintereinanderausführung von Funktionen  $\circ$  bildet

$$(\text{Aut}(V), \circ)$$

eine Gruppe, die so genannte *Automorphismengruppe*: Die notwendigen Eigenschaften Assoziativität, Existenz des neutralen Elements und von inversen Elementen sind klar.

\* \* \*

**Endliche Beschreibung von Homomorphismen.** Der große Vorteil von linearen Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen ist der, dass wir diese bereits endlich erfassen können, nämlich bereits durch Angabe der Bilder einer Basis:

**Satz 6.14.** *Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Seien  $w_1, \dots, w_n \in W$ . Dann existiert genau eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ , so dass für  $i = 1, \dots, n$  gilt:  $f(v_i) = w_i$ .*

*Beweis:* (Existenz) Für ein  $v \in V$  definieren wir  $f(v)$  wie folgt: Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mit  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ . Dann setze

$$f(v) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Basisdarstellung von  $v$  bezüglich  $(v_1, \dots, v_n)$  ist  $f$  wohldefiniert. Wir zeigen, dass  $f$  linear ist:

Betrachte  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $v, v' \in V$  und wähle  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$  mit  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$  und sei  $v' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot v_i$ . Dann gilt, dass

$$v + v' = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda'_i) \cdot v_i$$

und

$$\lambda \cdot v = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot \lambda_i) \cdot v_i$$

die eindeutigen Basisdarstellungen von  $v + v'$  und  $\lambda \cdot v$  sind. Damit gilt:

$$\begin{aligned} f(v + v') &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda'_i) \cdot f(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i) + \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot f(v_i) \\ &= f(v) + f(v') \end{aligned}$$

Analog folgt :  $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

(Eindeutigkeit) Angenommen  $f : V \rightarrow W$  und  $f' : V \rightarrow W$  sind lineare Abbildungen, für die gilt:  $f(v_i) = w_i = f'(v_i)$ . Wir müssen zeigen, dass  $f(v) = f'(v)$  für beliebiges  $v \in V$  ist.

Sei  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$  die Basisdarstellung von  $v$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f'(v_i) = f'(v) \end{aligned}$$

Damit gilt  $f = f'$ . □

\* \* \*

**Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume.** Wir werden jetzt einen Satz beweisen, der uns im Wesentlichen zeigt, dass es für festes  $n \in \mathbb{N}$  bis auf Isomorphie nur einen Vektorraum gibt, nämlich den  $\mathbb{K}^n$  selbst:

**Satz 6.15.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus*

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}^n$$

**Bemerkung 6.16.** Das ist hilfreich, weil  $V$  ein ganz beliebiger Vektorraum sein kann, der eine beliebig komplizierte Struktur haben kann. Dagegen kennen wir die Struktur  $\mathbb{K}^n$  als die Menge der  $n$ -dimensionalen Vektoren sehr gut, denn mit denen können wir konkret rechnen. Da wir hier einen Isomorphismus haben, können wir also anstatt auf  $V$  zu rechnen, mit Vektoren rechnen.

*Beweis von Satz 6.15:* Wähle eine Basis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ . Dann gibt es eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  (nach Satz 6.14) mit:

$$\text{Für } i = 1, \dots, n \text{ gilt } f(v_i) = e_i,$$

wobei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{K}^n$  ist.

Wir zeigen, dass  $f : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  bijektiv ist:

(Surjektivität) Betrachte  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f(v_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = f(v) \in \text{Bild}(f) \end{aligned}$$

(Injektivität) Betrachte  $v, v' \in V$  mit  $f(v) = f(v')$ . Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  und  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n \in \mathbb{K}$  mit  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$  und  $v' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i \cdot v_i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) \quad \text{siehe oben} \\ &= f(v) = f(v') = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i\right) \quad \text{nach Voraussetzung} \\ &= (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \end{aligned}$$

Also gilt  $\lambda_i = \lambda'_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und somit gilt:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = v'$$

☒(Satz 6.15)

\* \* \*

**Der Dimensionssatz.** Der folgende Satz wird uns noch oft hilfreich zur Seite stehen und erklärt uns, wie lineare Abbildungen mit den Dimensionen des Urbildraums umgehen: Entweder diese werden vom Kern geschluckt oder wir finden diese im Bild wieder.

**Satz 6.17** (Dimensionssatz). *Seien  $V, W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, wobei  $V$  endlich dimensional ist mit  $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$ , und  $f : V \rightarrow W$  linear. Dann gilt:*

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V),$$

das heißt, es gilt:  $\text{Df}(f) + \text{Rg}(f) = n$ .

**Beispiel 6.18.** Betrachten Sie die folgende Projektion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf die  $x$ - $y$ -Ebene, das heißt, es gilt  $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Dann ist dies eine lineare Abbildung. (Überlegen Sie sich dies!) Weiterhin sehen Sie, dass die  $z$ -Achse gerade den Kern dieser Abbildung ausmacht. Im Bild dagegen sind alle Vektoren der  $x$ - $y$ -Ebene. Somit wird der dreidimensionale Urbildraum zum einen in den eindimensionalen Kern und zum anderen in das zweidimensionale Bild aufgespalten – dies entspricht dem Dimensionssatz.

*Beweis von Satz 6.17:* Es ist  $\text{Kern}(f)$  ein Untervektorraum von  $V$  mit

$$\dim(\text{Kern}(f)) \leq \dim V.$$

Setze  $r := \dim(\text{Kern}(f))$ . Wähle eine Basis  $(v_1, \dots, v_r)$  von  $\text{Kern}(f)$ . Nach dem Basisergänzungssatz wähle  $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ , so dass die Folge  $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= \{f(v) \mid v \in V\} \\ &= \{f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\lambda_1 \cdot \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \lambda_r \cdot \underbrace{f(v_r)}_{=0} + \lambda_{r+1} \cdot f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n \cdot f(v_n) \mid \\ &\hspace{20em} \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathcal{L}(f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)) \end{aligned}$$

Offenbar erzeugen  $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$  das Bild von  $f$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$  linear unabhängig sind.

Setze dazu  $w_{r+1} := f(v_{r+1}), \dots, w_n := f(v_n)$  und betrachte Skalare  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , so dass  $\alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n = 0$ . Ziel ist es also zu zeigen, dass alle  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$  sind.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{r+1} w_{r+1} + \dots + \alpha_n w_n \\ &= \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n) \\ &= f(\alpha_{r+1} v_{r+1}) + \dots + f(\alpha_n v_n) \end{aligned}$$

$$= f(\underbrace{\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n}_{=:v})$$

Damit liegt  $v = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i$  im Kern von  $f$ , so dass wir eine Basisdarstellung durch  $(v_1, \dots, v_r)$  erhalten:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i = \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

Dies ist offenbar äquivalent zu der Gleichung:

$$0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r - \alpha_{r+1} v_{r+1} - \dots - \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i - \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i$$

Da  $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist, gilt:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

Damit ist  $(w_{r+1}, \dots, w_n)$  eine Basis von  $\text{Bild}(f)$  und es gilt schließlich wie gewünscht:

$$\text{Df}(f) + \text{Rg}(f) = r + (n - r) = n$$

☐(Satz 6.17)

**Beispiel 6.19.** Wir betrachten eine Abbildung  $f$  mit den Bedingungen  $f(v_1) = b_1$  und  $f(v_2) = b_2$  für  $v_1, v_2, b_1, b_2 \in V$ . Kann man  $f$  dann zu einem Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  ergänzen?

Dies ist nur dann möglich wenn wir noch zusätzliche Bedingungen an die Vektoren  $v_1, v_2, b_1, b_2$  stellen: Es kann im WorstCase sein, dass  $v_1 = \lambda v_2$  gilt. Dann muss auch  $b_1 = f(v_1) = f(\lambda v_2) = \lambda f(v_2) = \lambda b_2$  gelten. Andernfalls sind die Vektoren  $v_1, v_2$  linear unabhängig (der Leser überlege sich den trivialen Fall  $v_i = 0$  oder  $b_i = 0$  selbst) und wegen der gewünschten Linearität von  $f$  müssen auch  $b_1, b_2$  linear unabhängig sein.

Nun können wir aber mit dem Basisergänzungssatz zuerst einmal  $v_1, v_2$  und dann  $b_1, b_2$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen. Damit sind  $(v_1, \dots, v_n)$  und  $(b_1, \dots, b_n)$  Basen von  $V$  und durch die Festsetzung  $f(v_i) := b_i$  ist bereits eindeutig eine lineare Abbildung auf ganz  $V$  definiert.

\* \* \*

Wir nutzen die bisherigen Zusammenhänge zwischen diesen einzelnen neuen Begriffen, um zwei wesentliche Aussagen zu formulieren:

**Satz 6.20.** Für eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  gilt:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn  $\text{Kern}(f) = \{0\}$ .

*Beweis:* Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Monomorphismus. Angenommen, der Kern wäre nicht trivial — dann gäbe es einen Vektoren  $v \in \text{Kern}(f)$ , so dass  $v \neq 0$  gilt. Somit gilt aber auch  $f(0) = 0 = f(v)$ , ein Widerspruch zur Injektivität von  $f$ .

Sei nun umgekehrt  $f : V \rightarrow W$  linear und ihr Kern sei trivial. Angenommen,  $f$  wäre nicht injektiv. Dann gäbe es zwei Vektoren  $v_1, v_2 \in V$ ,  $v_1 \neq v_2$  und  $f(v_1) = f(v_2)$ . Somit gilt in diesem Fall:  $0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ , also liegt der Vektor  $v_1 - v_2$  im Kern der Abbildung und ist selbst vom Nullvektor verschieden. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

Und schliesslich beweisen mithilfe des Dimensionssatzes 6.17 den folgenden –aus meiner Sicht überraschenden– Zusammenhang:

**Satz 6.21.** *Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  einen Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  gilt:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn  $f$  surjektiv ist.*

*Beweis:* Sei der Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  gegeben. Nun gilt nach Satz 6.20 und der Dimensionsformel 6.17:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\text{ gdw. } \text{Kern}(f) = \{0\} \text{ gdw. } \text{Df}(f) = 0 \\ &\text{gdw. } \text{Rg}(f) = \dim(V) \text{ gdw. } f \text{ ist surjektiv} \end{aligned}$$

Beachten Sie, die letzte Äquivalenz gilt, da  $\text{Bild}(f)$  einen Unterraum von  $V$  bildet.  $\square$

**Beispiel 6.22.** Um den Umgang mit den neuen Begrifflichkeiten injektiv, surjektiv und bijektiv zu üben, schauen wir uns jetzt zwei interessante Endomorphismen auf dem Vektorraum aller Folgen  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  aus Elementen des Körpers  $K$  an:

$$\begin{aligned} f_1((x_1, x_2, x_3, \dots)) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ f_2((x_1, x_2, x_3, \dots)) &:= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Wir prüfen nun diese Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität. Beachten Sie, dass der hier betrachtete Vektorraum nicht endlich-dimensional ist und daher der Satz 6.21 nicht greift.

Das Ergebnis ist dennoch nicht überraschend:

Die Abbildung  $f_1$  ist injektiv, aber nicht surjektiv, da mit  $f_1((x_1, x_2, x_3, \dots)) = f_1((y_1, y_2, y_3, \dots))$  auch sofort für die Bilder gilt:  $(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, y_1, y_2, y_3, \dots)$ . Und somit offenbar auch  $(x_1, x_2, x_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ . Surjektivität liegt allerdings nicht vor, denn es existiert keine Folge  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  mit  $f_1((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (1, *, *, \dots)$ .

Bei  $f_2$  ist es genau andersherum. Man sieht leicht, dass  $f_2$  surjektiv und nicht injektiv ist, da für jedes  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$  gilt  $f_2((*, x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  aber aus

$f_2((x_1, x_2, x_3, \dots)) = f_2((y_1, y_2, y_3, \dots))$  folgt nur  $(x_2, x_3, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$  und nicht unbedingt  $x_1 = y_1$ .

\* \* \*

**Aufgabe 6.23.** Kann es auf einem endlich dimensionalen Vektorraum  $V$  solche Endomorphismen wie  $f_1$  und  $f_2$  aus dem vorherigen Beispiel geben? Das bedeutete also, Sie suchten eine lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow V$  die injektiv und nicht surjektiv oder nicht injektiv und surjektiv sind. Beweisen oder widerlegen Sie ihre Vermutung!

*Hinweis:* Beachten Sie Satz 6.20.

**Aufgabe 6.24.** Sei  $f : V \rightarrow W$  für  $V, W$  zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume. Man zeige: Aus  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  für alle  $x, y \in V$  folgt, dass  $f$  linear ist.

## 7. DIE WELT DER MATRIZEN

Matrizen, anfangs als endliche Folgen definiert, anschließend sofort als zweidimensionales Schema interpretiert, werden uns das (algebraische) Leben im Umgang mit linearen Abbildungen aber auch bei den Grundlagen in Form von Linearen Gleichungssystemen deutlich erleichtern.

**Darstellende Matrizen.** Zunächst wollen wir Homomorphismen zwischen  $\mathbb{K}^m$  und  $\mathbb{K}^n$  schematisch als Matrix darstellen und werden zeigen, dass wir dadurch keinem Informationsverlust unterliegen.

**Satz 7.1.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und sei  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine lineare Abbildung mit  $n, m \in \mathbb{N}$ . Sei weiterhin  $(e_1, \dots, e_m)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{K}^m$  und für  $i = 1, \dots, m$  sei

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix};$$

dabei schreiben wir die  $n$ -Tupel in  $\mathbb{K}^n$  aus rechnerischen Gründen als Spaltenvektoren.

Dann ist für Argumente  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$  der Funktionswert

$$f(v) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

gegeben.

*Beweis:* Sei  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ . Dann gilt offenbar:

$$v = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m x_i e_i.$$

Wegen der Linearität von  $f$  gilt:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i f(e_i)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(v) &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Der Satz 7.1 rechtfertigt die folgende

**Definition 7.2.** Sei  $K$  ein Körper und  $n, m \in \mathbb{N}$ . Eine  $n \times m$ -Matrix über  $K$  ist eine Folge  $M = (a_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$  von Elementen  $a_{ij} \in K$ . Wir schreiben die Matrix als zweidimensionales Schema wie folgt:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es sei  $\text{Mat}(n \times m, K)$  die Menge aller  $n \times m$ -Matrizen über  $K$ .

Die Elemente von  $\text{Mat}(n \times m, K)$  werden abkürzend bezeichnet als

$$(a_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$$

oder einfach als  $(a_{ij})_{ij}$  oder auch als  $(a_{ij})$ . Die Klammer  $()$  bei  $(a_{ij})$  steht also für die Folge und nicht etwa für einen einzelnen Eintrag. Hierbei nennen wir  $i$  und  $j$  die Laufindizes.

Für  $i = 1, \dots, n$  ist der **Zeilenvektor** (waagerechter Vektor)  $(a_{i1}, \dots, a_{im})$  die  $i$ -te Zeile von  $M$ .

Für  $j = 1, \dots, m$  ist der **Spaltenvektor** (senkrecht notierter Vektor)  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  die  $j$ -te

Spalte von  $M$ .

Ist die Matrix  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$  durch  $f(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$  wie in Satz 7.1

definiert, so nennen wir  $M$  die **darstellende Matrix** von  $f$ . Wir schreiben kurz

$$M = \text{DM}(f).$$

Die darstellende Matrix von  $f$  besteht also aus den Spaltenvektoren  $f(e_1), \dots, f(e_m)$ .

**Bemerkung 7.3. (Merkregel)** Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Bilder der Basisvektoren.

**Satz 7.4.** Für jede  $n \times m$ -Matrix  $M$  über  $\mathbb{K}$  gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ , sodass  $M$  die darstellende Matrix von  $f$  ist. Damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) &\rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K}) \\ f &\mapsto \text{DM}(f) \end{aligned}$$

eine Bijektion.

*Beweis:* Bisher haben wir gesehen, dass wir einer Abbildung  $f$  die darstellende Matrix  $\text{DM}(f)$  eineindeutig zuordnen konnten. Damit ist die Abbildung  $\text{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  injektiv.

Ebenso kann man einer Matrix  $M$  eine Abbildung  $f$  zuordnen, sodass schließlich gilt:  $M = \text{DM}(f)$ . Damit ist die Abbildung surjektiv. Dies werden wir später im letzten Abschnitt des Kapitels noch näher beleuchten.  $\square$

\* \* \*

**Matrizenrechnung.** Wir möchten mit Matrizen rechnen und führen daher zunächst einfache Operationen ein, die die Menge der Matrizen zum Vektorraum erheben. Ziel ist es, die Operationen so zu definieren, dass wir einen starken Zusammenhang zu dem Vektorraum der Homomorphismen zwischen dem  $\mathbb{K}^m$  und  $\mathbb{K}^n$  haben.

**Definition 7.5.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und sei  $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  die Menge aller  $n \times m$ -Matrizen über  $\mathbb{K}$ .

(a) Definiere die **Matrizenaddition** durch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

(b) Definiere die **skalare Multiplikation** durch:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

(c) Definiere die **Nullmatrix**  $0 \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  als:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Nullmatrix das neutrale Element der Matrizenaddition.

Damit haben wir eine skalare Multiplikation, eine Addition und ein neutrales Element definiert, so dass wir folgenden Satz beweisen können:

**Satz 7.6.** *Die Struktur  $(\text{Mat}(n \times m, \mathbb{K}), +, \cdot, 0)$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.*

*Beweis:* Offenbar ist die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1m}, a_{21}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm})$$

ein Isomorphismus zwischen  $(\text{Mat}(n \times m, \mathbb{K}), +, \cdot, 0)$  und  $\mathbb{K}^{n \cdot m}$ : Wir wissen bereits, dass  $\mathbb{K}^{n \cdot m}$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.  $\square$

An dieser Stelle können wir den Satz 7.4 verstärken und den bereits als Bijektion erkannten Zusammenhang zum Isomorphismus erweitern:

**Satz 7.7** (Isomorphissatz). *Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Abbildung*

$$\text{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K});$$

$$f \mapsto \text{DM}(f)$$

*(sogar) ein Isomorphismus von Vektorräumen.*

*Beweis:* Nach Satz 7.4 ist die Abbildung eine Bijektion. Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Wie wir wissen muss allgemein für die Linearität gelten:  $h(x + y) = h(x) + h(y)$  und  $\lambda \cdot h(x) = h(\lambda \cdot x)$ . In unserem Fall entspricht das  $h$  einer Abbildung zwischen  $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  und  $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ ,  $x$  und  $y$  sind Elemente aus dem Startraum, in unserem Fall also Abbildungen aus  $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ . Nennen wir die Abbildung aus dem Satz  $\Phi$  und Elemente aus  $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  mit  $f$  und  $g$ , so erhalten wir die Schreibweise:

$$\Phi : \text{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \rightarrow \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K}) ; \Phi(f) = \text{DM}(f)$$

Die erste Eigenschaft der Linearität, die wir zeigen müssen heißt also:

$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ . Wir wissen, dass  $\Phi(f) = \text{DM}(f)$  gilt und somit müssen wir zeigen:

$$(a) \text{DM}(f + g) = \text{DM}(f) + \text{DM}(g)$$

$$(b) \text{DM}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \text{DM}(f)$$

Zu (a): Seien  $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$  mit darstellenden Matrizen  $\text{DM}(f)$  und  $\text{DM}(g)$ .

Die Spalten von  $\text{DM}(f)$  sind gerade die Vektoren  $f(e_1), \dots, f(e_m)$  und die Spalten von  $\text{DM}(g)$  sind die Vektoren  $g(e_1), \dots, g(e_m)$ . Die Spalten von  $\text{DM}(f+g)$  sind die Vektoren  $(f+g)(e_1) \stackrel{(*)}{=} f(e_1) + g(e_1), \dots, (f+g)(e_m) \stackrel{(*)}{=} f(e_m) + g(e_m)$ . (\*) gilt wegen Linearität.

Nach Definition der Matrizenaddition ist damit

$$\text{DM}(f + g) = \text{DM}(f) + \text{DM}(g)$$

Zu (b): Sei  $f$  ein Homomorphismus aus  $\text{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$  mit darstellender Matrix  $\text{DM}(f)$  und sein  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die Spalten von  $\text{DM}(\lambda \cdot f)$  sind die Vektoren  $(\lambda \cdot f)(e_1) = \lambda \cdot f(e_1), \dots, (\lambda \cdot f)(e_m) = \lambda \cdot f(e_m)$ . Nach Definition der Skalarmultiplikation von Matrizen gilt damit wie gewünscht  $\text{DM}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \text{DM}(f)$ .  $\square$

\* \* \*

Wir werden jetzt eine Multiplikation von Matrizen einführen, sodass wir die Schreibweise des Beispiels 6.8 rechtfertigen:

$$F \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizenmultiplikation entspricht in der Sprache von Abbildungen der Hintereinanderausführung von Abbildungen. Betrachten wir zwei Homomorphismen  $f, g$  wie folgt:

$$\mathbb{K}^m \xrightarrow{f} \mathbb{K}^n \xrightarrow{g} \mathbb{K}^r$$

mit darstellenden Matrizen  $\text{DM}(g) = A = (a_{ik}) \in \text{Mat}(r \times n, \mathbb{K})$  und  $\text{DM}(f) = B = (b_{kj}) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ . Die darstellende Matrix von  $g \circ f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^r$  besteht dann aus den Spaltenvektoren  $(g \circ f)(e_j)$ :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) = g \left( \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \right) \\ &= g(b_{1j}e_1 + \dots + b_{nj}e_n) \\ &= b_{1j}g(e_1) + \dots + b_{nj}g(e_n) && \text{wegen Linearität} \\ &= b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix} + \dots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{rn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{1j}a_{11} + \dots + b_{nj}a_{1n} \\ \vdots \\ b_{1j}a_{r1} + \dots + b_{nj}a_{rn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ \vdots \\ a_{r1}b_{1j} + \dots + a_{rn}b_{nj} \end{pmatrix} && \text{Körperaxiome} \end{aligned}$$

Der  $i$ -te Koeffizient dieses Spaltenvektors ist von der Form:

$$a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Beachten Sie, dass diese Summe wirklich nur ein einzelnes Element aus der gesuchten Matrix ist, nämlich zu finden in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte.

Insgesamt ist die darstellende Matrix von der Form:

$$\text{DM}(g \circ f) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{km} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{rk} b_{k1} & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{rk} b_{km} \end{pmatrix}$$

Damit ist die folgende Definition motiviert:

**Definition 7.8.** *Definiere das Matrizenprodukt für zwei Matrizen*

$A = (a_{ik}) \in \text{Mat}(r \times n, \mathbb{K})$  und  $B = (b_{kj}) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  als

$$A \cdot B = AB = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{i=1, \dots, r; j=1, \dots, m} \in \text{Mat}(r \times m, \mathbb{K})$$

**Beispiel 7.9.** Allgemein gilt für Matrizen  $A, B \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{K})$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} \quad (\star)$$

Betrachte also zwei Matrizen  $A, B$  wie folgt:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A \end{aligned}$$

**Bemerkung 7.10.** Im Allgemeinen ist das Matrizenprodukt nicht kommutativ.

Folgendes Schema, welches wir am Beispiel vorführen, kann helfen, die Matrizenmultiplikation übersichtlicher und verständlicher darzustellen:

**Beispiel 7.11.** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Berechne nun das Matrizenprodukt  $A \cdot B$  wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

wobei

$$c_{11} := 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14, \quad c_{12} := 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20,$$

$$c_{21} := 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 10,$$

$$c_{22} := 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 16$$

sind.

Also ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Übrigens, analog lässt sich  $B \cdot A$  berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 11 & 10 & 9 \\ 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

und wir erkennen, dass das Produkt eine  $3 \times 3$ -Matrix ist, wobei  $A \cdot B$  dagegen eine  $2 \times 2$ -Matrix war.

**Satz 7.12.** Sei  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine lineare Abbildung und  $A = \text{DM}(f)$ , dann gilt für

$$\text{alle Spaltenvektoren } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ stets: } f(x) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \cdot x.$$

*Beweis:* Wegen (★) aus Beispiel 7.9 und Satz 7.1 ist die Behauptung klar.  $\square$

**Satz 7.13.** Seien  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $A, B, C$  Matrizen über  $\mathbb{K}$  mit geeigneten Dimensionen. Dann gelten folgende Rechengesetze:

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| (a) Assoziativität:        | $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ |
| (b) Distributivgesetz I :  | $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   |
| (c) Distributivgesetz II : | $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$   |

**Bemerkung 7.14.** Wir brauchen beide Distributivgesetze, da die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist. Außerdem benutzen wir auch hier die allgemeinen mathematischen Vereinbarungen wie „Punkt- vor Strichrechnung“.

*Beweis:* Wir nehmen nach Satz 7.7 jeweils an, dass  $A, B, C$  die darstellenden Matrizen von linearen Abbildungen  $f, g, h$  sind.

- (a) Dann ist  $B \cdot C$  die darstellende Matrix von  $g \circ h$  und  $A \cdot (B \cdot C)$  die darstellende Matrix von  $f \circ (g \circ h)$ . Analog ist  $(A \cdot B) \cdot C$  die darstellende Matrix von  $(f \circ g) \circ h$  und wegen der Gleichheit  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  gilt wie gewünscht  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ .
- (b) Es ist  $B + C$  die darstellende Matrix von  $g + h$  und  $A \cdot (B + C)$  die darstellende Matrix von  $f \circ (g + h)$ . Analog ist  $A \cdot B + A \cdot C$  die darstellende Matrix von  $f \circ g + f \circ h$ . Nun gilt für alle  $x$ :

$$\begin{aligned} (f \circ (g + h))(x) &= f((g + h)(x)) \\ &= f(g(x) + h(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(g(x)) + f(h(x)) \\
&= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) \\
&= (f \circ g + f \circ h)(x)
\end{aligned}$$

Damit gilt wie gewünscht:  $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$

(c) Folgt analog zu (b). ☒

**Bemerkung 7.15.** Die Gesetze aus Satz 7.13 können auch durch (mühseliges) Nachrechnen der formalen Definition der Matrixmultiplikation bewiesen werden.

**Definition 7.16.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper.

- (a) Eine Matrix  $A$  über  $\mathbb{K}$  heißt **quadratisch**, wenn es eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so dass  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ .
- (b) Die  **$n$ -dimensionale Einheitsmatrix** ist die darstellende Matrix der identischen Abbildung  $\text{id}_{\mathbb{K}^n}$ :

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Satz 7.17.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ . Dann gilt:

$$A \cdot E_m = A \quad \text{und} \quad E_n \cdot A = A.$$

*Beweis:* Klar, sowohl über die darstellenden Matrizen, als auch mittels der formalen Definition. ☒

**Definition 7.18.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  über  $\mathbb{K}$  heißt **invertierbar**, wenn es ein  $B \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  gibt mit  $A \cdot B = E_n$ .

Wenn es genau ein solches  $B$  gibt, so heißt  $B$  die **Inverse** zu  $A$  und wir schreiben  $B = A^{-1}$ .

**Satz 7.19.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ , dann gilt:

- (a) Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  invertierbar. Dann gibt es genau ein  $B$  mit  $A \cdot B = E_n$ .
- (b) Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  invertierbar. Dann gilt  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ .
- (c) Sei  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  invertierbar. Dann ist  $A^{-1}$  ebenfalls invertierbar und es gilt  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- (d) Seien  $A, B \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  invertierbar. Dann ist  $A \cdot B$  ebenfalls invertierbar und es gilt  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

*Beweis:* Wir identifizieren Homomorphismen von  $\mathbb{K}^n$  nach  $\mathbb{K}^n$  wieder nach Satz 7.7 mit ihren darstellenden Matrizen. Angenommen,  $A$  ist invertierbar und es gilt  $A \cdot B = E_n$  (Existenz von  $B$  ist nach Definition 7.18 gesichert). Dann gilt:

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{Bild}(A))$$

$$\begin{aligned} &\geq \dim(\text{Bild}(A \cdot B)) = \dim(\text{Bild}(E_n)) \\ &= \dim(\mathbb{K}^n) = n \end{aligned}$$

Wegen  $\text{Rg}(A) \leq n$  gilt daher  $\text{Rg}(A) = n$ . Damit ist die Abbildung  $A$  surjektiv (da nun  $\text{Bild}(A) \subseteq \mathbb{K}^n$ ,  $n$ -dimensional, also  $\text{Bild}(A) = \mathbb{K}^n$ ). Nach der Dimensionsformel gilt:  $\dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A)) = n$ , also  $\dim(\text{Kern}(A)) = 0$  und somit gilt  $\text{Kern}(A) = \{0\}$ . Nach Satz 6.20 ist  $A$  damit injektiv.

Insbesondere ist  $A$  also bijektiv, also ein Isomorphismus. Dieser besitzt eine Inverse Abbildung  $A^{-1}$  (im Sinne der Abbildungsinversen). Es sei  $C$  die darstellende Matrix von  $A^{-1}$ , das heißt  $C = \text{DM}(A^{-1})$ . Es gilt  $A \cdot C = C \cdot A = E_n$ . Ziel ist es zu zeigen:  $C = A^{-1}$ .

Für alle Vektoren  $x \in \mathbb{K}^n$  ist  $(A \cdot C)(x) = E_n(x) = x = (A \cdot B)(x)$ . Wegen der Injektivität von  $A$  gilt schließlich  $C(x) = B(x)$ , also  $C = B$ , und somit ist  $B$  die darstellende Matrix der zu  $A$  inversen Abbildung. Damit folgt Teil (a).

Die restlichen Eigenschaften folgen leicht, etwa wieder durch den Übergang von Matrizen zu Abbildungen mittels des Isomorphismus, gegeben durch Satz 7.7.  $\square$

\* \* \*

**Lineare Abbildungen und Matrizen.** Wir hatten Matrizen als darstellende Matrizen linearer Abbildungen motiviert und eingeführt, das heißt für eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  ist  $\text{DM}(f)$  eine Matrix. Eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  besitzt eine darstellende Matrix  $\text{DM}(f) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  und es gilt:

$$f(x) = \text{DM}(f) \cdot x,$$

wobei  $x$  als Spaltenvektor  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$  aufgefasst wird.

Umgekehrt definiert jede Matrix  $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  offenbar die Abbildung  $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ ;  $x \mapsto A \cdot x$ . Diese Abbildung ist linear, denn es gilt

$$A \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda(A \cdot x)$$

(andere Schreibweise dafür  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ ) und

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Ihre darstellende Matrix ist gerade die Matrix  $A = \text{DM}(A)$ , daher wird oftmals die so definierte Abbildung mit demselben Buchstaben  $A$  bezeichnet:

$$A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$$

Damit lassen sich von Abbildungen bekannte Begriffe auf  $A$  übertragen:

- $A(x) := A \cdot x$
- $A[X] := \{A \cdot x \mid x \in X\}$

- $A^{-1}[Y] := \{x \in \mathbb{K}^m \mid A \cdot x \in Y\}$
- $\text{Kern}(A) := A^{-1}[\{0\}]$

Damit können wir Matrizen als lineare Abbildungen und lineare Abbildungen mittels ihrer darstellenden Matrizen auch als Matrizen auffassen, so dass sich die jeweils bekannten Begriffe auch leicht übertragen.

**Beispiel 7.20.** Wir werden jetzt ein bisschen mit Endomorphismen und ihren darstellenden Matrizen experimentieren. Wir haben schon festgestellt, dass die darstellende Matrix einer linearen Abbildung  $f$  von der Basis von  $V$  abhängt. Das bedeutet, dass je nach Wahl der Basis von  $V$ , sich im Allgemeinen auch die darstellende Matrix von  $f$  unterscheiden wird. Uns interessiert deswegen eine möglichst gutartige Basis, so dass die darstellende Matrix von  $f$  eine eher einfache (zum Rechnen handliche) Form hat.

Sei also  $f$  ein Endomorphismus auf dem  $n$  dimensionalen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit  $1 + 1 \neq 0$  und es soll  $f^2 = id$  gelten.

Wir werden eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  angeben, so dass  $f$  bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix

$$\text{DM}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } k + r = n$$

besitzt.

Zuerst betrachten wir eine beliebige Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  und stellen fest, dass für jedes  $v_i$  folgendes gilt:

$$v_i = \frac{2 \cdot v_i + f(v_i) - f(v_i)}{2} = \frac{v_i + f(v_i)}{2} + \frac{v_i - f(v_i)}{2} =: a_i + b_i$$

Interessanterweise ist nun :

$$f(a_i) = f\left(\frac{v_i + f(v_i)}{2}\right) = \frac{f(v_i) + f^2(v_i)}{2} = \frac{v_i + f(v_i)}{2} = a_i \quad \text{und}$$

$$f(b_i) = f\left(\frac{v_i - f(v_i)}{2}\right) = \frac{f(v_i) - f^2(v_i)}{2} = -\frac{v_i - f(v_i)}{2} = -b_i$$

Sei o.B.d.A. die Folge der Vektoren  $a_1, \dots, a_r$  eine Basis des Untervektorraums:

$$U_a := \{x \mid x = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_n \cdot a_n \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

und analog die Folge der Vektoren  $b_1, \dots, b_k$  eine Basis des Untervektorraums:

$$U_b := \{x \mid x = \lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

An dieser Stelle ist es wichtig sich klar zu machen, dass  $U_a$  und  $U_b$  nur den Nullvektor als Schnittmenge haben. Angenommen  $v \in U_a \cap U_b$ , dann wäre  $f(v) = v$  und  $f(v) = -v$  also  $v = 0$ .

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_k$  eine Basis von  $V$  ist:

Jeder Vektor  $v \in V$  besitzt eine Darstellung bezüglich der Basis  $v_1, \dots, v_n$  und da wir diese Basis für die Konstruktion der  $a_i$  und  $b_i$  einfach nur zerlegt haben, besitzt er auch eine Darstellung bezüglich unserer  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_k$ .

Es bleibt also noch die lineare Unabhängigkeit unserer Vektoren zu zeigen:

Sei

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_r \cdot a_r + \lambda_{r+1} \cdot b_1 + \dots + \lambda_{r+k} \cdot b_k = 0$$

Angenommen,  $\lambda_1 \neq 0$  (die anderen Fälle folgen genauso), dann können wir umformen zu:

$$\underbrace{-\lambda_1 \cdot a_1 - \dots - \lambda_r \cdot a_r}_{=: a \in U_a} = \underbrace{\lambda_{r+1} \cdot b_1 + \dots + \lambda_{r+k} \cdot b_k}_{=: b \in U_b}$$

Daraus folgt, dass das so erhaltene Element im Schnitt liegt und für die rechte Seite der Gleichung muss  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+k} = 0$  gelten (da nur der Nullvektor im Schnitt liegt). Hierdurch erhalten wir auf der linken Seite eine Linearkombination der  $a_i$ 's, die Null ergibt, ohne dass alle Koeffizienten Null sind! Das ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der  $a_i$ 's.

Schließlich müssen Sie sich nur noch klar werden, wie die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich unserer neuen Basisvektoren aussieht:

$$\text{DM}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}$$

Dies liegt daran, dass in den ersten  $r$  Spalten das Bild der  $a_i$  steht, also  $f(a_i) = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot a_i + 0 + \dots + 0$  (deswegen  $E_r$ ) und für die restlichen Spalten das Bild der  $b_i$  mit  $f(b_i) = 0 + \dots + 0 - 1 \cdot b_i + 0 + \dots + 0$  (deswegen  $-E_k$ )

\* \* \*

**Aufgabe 7.21.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus auf dem  $n$  dimensionalen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  mit  $1 + 1 \neq 0$  und  $f^2 = f$ . Man zeige die Existenz einer Basis von  $V$ , so dass

$$\text{DM}(f) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, \text{ bzgl. dieser Basis}$$

Tipp: Überlegen Sie sich, wie die darstellende Matrix bezüglich den Vektoren  $f(b_1), \dots, f(b_l)$ , wobei die  $b_i$ 's hier eine Basis von  $\text{Bild}(f)$  sind, aussieht.

## 8. ANWENDUNGEN VON MATRIZEN

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst kurz mit einer Anwendung von Matrizen in der Informatik, den linearen Codes. Anschließend zeige ich Ihnen eine weitere klassische Anwendung von Matrizen in Form der Drehungen und Spiegelungen in der reellen Ebene und schließlich im letzten Teil wenden wir die Theorie der Matrizen auf die einzelnen elementaren Zeilenumformungen an, um diese als Matrizenmultiplikation darstellen zu können. Dies werden wir im nächsten Kapitel benutzen, um dann auf den Gaußschen Algorithmus zurückzukommen.

**Matrizen als Kodierwerkzeug: Lineare Codes.** Man kann Unterräume von endlich-dimensionalen Vektorräumen zur Kodierung binärer Informationen verwenden.

Wir sagen: Ein linearer  $(n, k)$ -Code  $C$  ist ein  $k$ -dimensionaler Unterraum von  $(\mathbb{Z}_2)^n$ . Jedes Element von  $C$  ist eine binäre Folge der Länge  $n$ . Die  $2^k$  Elemente von  $C$  sind in den  $2^n$  Elementen von  $(\mathbb{Z}_2)^n$  enthalten. Diese Unterräume entsprechen isomorphen Kopien von  $(\mathbb{Z}_2)^k$ .

Die Art der Lage des Unterraumes in  $(\mathbb{Z}_2)^n$  kann zur Fehlererkennung und teilweise auch zur Korrektur benutzt werden. So ist etwa  $\{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$  ein linearer  $(3, 1)$ -Code;  $(0, 0, 0)$  kodiert die 0 und  $(1, 1, 1)$  die 1. Wenn bei der Übertragung von Tripeln höchstens 1-Bit-Fehler erwartet werden, so ist eine Fehlerkorrektur möglich, indem die Tripel  $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  als 0 und schließlich  $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$  als 1 dekodiert werden.

Betrachten wir nun ein anderes Beispiel, den so genannten  $(7, 4)$ -Code. Eine mögliche Darstellung der Kodierung ist etwa durch die folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Wort  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^4$  wird durch den Vektor  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  kodiert.

Wir können auch eine Prüfmatrix erstellen, die so gewählt ist, dass sie auf Codewörter angewendet gleich 0 ist. Insbesondere gilt, dass bei fehlerhaften Übertragungen das Produkt mit der Prüfmatrix ungleich 0 ist und sogar bei 1-Bit-Fehlern die Stelle des Fehlers angibt:

So erhalten wir beispielsweise für den (7,4)-Code die folgende Prüfmatrix:

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix können wir wie folgt anwenden: Wenn  $c$  ein Codewort ist, welches durch einen Einfachfehler (1-Bit-Fehler)  $e$  in das Wort  $x := c + e$  verfälscht wurde, dann gilt:

$$H \cdot x = H \cdot (c + e) = \underbrace{H \cdot c}_{=0} + H \cdot e = H \cdot e.$$

Betrachten wir etwa das obige Beispiel, indem wir nun in die korrekte Lösung  $c :=$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zwei Fehler } e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ einarbeiten}$$

$$\text{und so } c + e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } c + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ erhalten.}$$

Mittels der Prüfmatrix erhalten wir schließlich die beiden Vektoren

$$H \cdot (c + e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } H \cdot (c + e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da die Einträge modulo 2 gesehen werden müssen, entsprechen die beiden Vektoren gerade den folgenden beiden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir ablesen, dass der erste Fehler an der Stelle

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 2$$

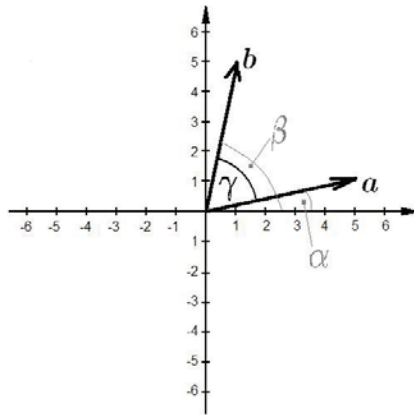
bzw. der zweite Fehler an der Position  $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 4$  liegt. Und dies entspricht genau der Position der 1 in den Fehlervektoren  $e_1$  bzw.  $e_2$ .

Mehr zu den linearen Codes lernen Sie in Ihren Informatik-Vorlesungen.

\* \* \*

Wir kommen nun zu zwei speziellen Matrizen vom Typ  $2 \times 2$ , den Drehungen und Spiegelungen.

**Matrizen als Drehungen in der reellen Ebene.** Betrachten Sie einen beliebigen Vektor  $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  und drehen diesen um den Winkel  $\gamma$ . Das Ergebnis sei der Vektor  $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Offenbar gilt  $\alpha + \gamma = \beta$ .



Entsprechend der Sinus- und Kosinussätze am rechtwinkligen Dreieck gilt:

$\sin(\alpha) = \frac{y_1}{|a|}$  ,  $\cos(\alpha) = \frac{x_1}{|a|}$  ,  $\sin(\beta) = \frac{y_2}{|b|}$  ,  $\cos(\beta) = \frac{x_2}{|b|}$ , wobei mit  $|a|$  und  $|b|$  die Länge der Vektoren  $a, b$  gemeint ist. Damit erhalten wir (mittels trigonometrischer Zusammenhänge):

$$\begin{aligned}
x_2 &= \cos(\beta) \cdot |b| \\
&= \cos(\alpha + \gamma) \cdot |b| \\
&= \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot |b| - \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \cdot |b| \\
&= \cos(\gamma) \cdot (\cos(\alpha) \cdot |a|) - \sin(\gamma) \cdot (\sin(\alpha) \cdot |a|) \quad (\text{es gilt } |a| = |b|) \\
&= \cos(\gamma) \cdot x_1 - \sin(\gamma) \cdot y_1
\end{aligned}$$

Darüber hinaus gilt:

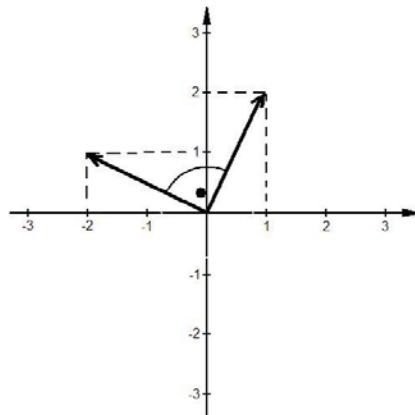
$$\begin{aligned}
y_2 &= \sin(\beta) \cdot |b| \\
&= \sin(\alpha + \gamma) \cdot |b| \\
&= \sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot |b| + \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \cdot |b| \\
&= \cos(\gamma) \cdot (\sin(\alpha) \cdot |a|) + \sin(\gamma) \cdot (\cos(\alpha) \cdot |a|) \quad (\text{es gilt } |a| = |b|) \\
&= \cos(\gamma) \cdot y_1 + \sin(\gamma) \cdot x_1
\end{aligned}$$

Mittels Matrixschreibweise ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

das heißt der Vektor  $a$  geht bei Anwendung der oben betrachteten linearen Abbildung  $D_\gamma := \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$  auf den Vektor  $b$  über. Diese Matrix  $D_\gamma$  nennt man auch die **Drehmatrix** zum Winkel  $\gamma$ .

**Beispiel 8.1.** Für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich  $D_{90^\circ} = D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .



Für die Drehmatrizen können wir die von Drehungen bekannten Eigenschaften nachrechnen:

**Satz 8.2.** Für Winkel  $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$  gilt:

$$D_{\varphi+\psi} = D_\varphi \cdot D_\psi$$

*Beweis:* Der Beweis ist klar. ☒

Aus dem letzten Satz ergeben sich sofort einfache trigonometrische Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 D_{\varphi+\psi} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} \\
 &= D_{\varphi} \cdot D_{\psi} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -\sin(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cos(\psi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) & -(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi) & \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2
 \end{aligned}$$

Damit ist  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$  die Inverse von  $D_{\varphi}$ .

Aus diesen algebraischen Überlegungen erhalten wir die folgenden (analytischen) Aussagen:

**Satz 8.3.** *Es gilt:*

- (a)  $\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)$
- (b)  $\sin(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)$
- (c)  $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
- (d)  $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

*Beweis:* Die ersten beiden Punkte haben wir bereits gesehen.

Für die Aussagen (c) und (d) beachten Sie, dass  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$  invers zur Matrix  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = D_{\varphi}$  ist.

Auf der anderen Seite ist aber die Drehung um den Winkel  $-\varphi$  ebenfalls invers zu  $D_\varphi$ , sodass gilt:

$$D_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

☒

Beachten Sie, dass wir hier in diesem Unterkapitel scheinbar einen Kreisschluß geschaffen haben: Wir haben mittels der trigonometrischen Additionstheoreme die Drehmatrix hergeleitet, um dann mit ihr die Additionstheoreme zu beweisen. Das ist natürlich keine logisch korrekte Schlussfolgerung. Das Dilemma löst sich allerdings rasch auf, indem wir die Drehmatrix anders herleiten: Wir hätten genauso gut die Drehmatrix angeben können und dann aufgrund der Eindeutigkeit einer lineare Abbildung auf einer Basis leicht überprüfen können, dass es sich wirklich um eine Drehung handelt. Ich habe dennoch diesen Weg hier gewählt, damit Sie schrittweise mit mir gemeinsam die Drehung herleiten – den anderen Weg werden wir gleich im Unterkapitel über Spiegelungen gehen.

\* \* \*

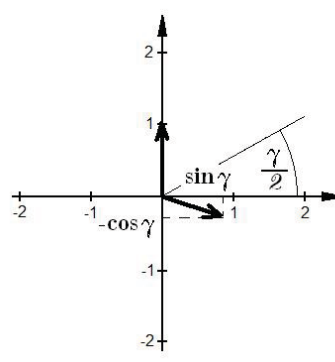
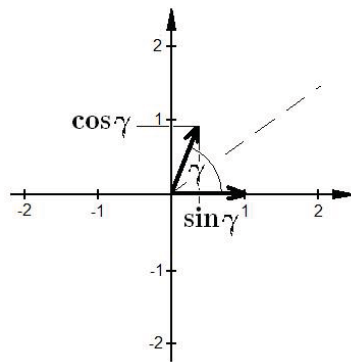
**Matrizen als Spiegelungen in der reellen Ebene.** Betrachte die Matrix

$$S_{\frac{\gamma}{2}} := \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix}.$$

Dies ist offenbar eine lineare Abbildung. Um zu verstehen, was  $S_{\frac{\gamma}{2}}$  macht, nutzen wir unser algebraisches Verständnis über lineare Abbildungen und schauen uns die Bilder der kanonischen Basis  $e_1$  und  $e_2$  an:

$$S_{\frac{\gamma}{2}}(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) \\ \sin(\gamma) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S_{\frac{\gamma}{2}}(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \end{pmatrix}$$



Die Bildkoordinaten für den ersten Basisvektor  $e_1$  lassen sich rasch ablesen – anders sieht es für das Bild von  $e_2$  aus.

Diese Koordinaten können wir aber auch schrittweise nachvollziehen: Betrachten Sie das rechtwinklige Dreieck, bestehend aus dem Bildvektor des zweiten Einheitsvektors und der  $x$ -Achse. Der Winkel zwischen Bildvektor und  $x$ -Achse beträgt  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ , denn der Winkel zwischen Spiegelachse und Ausgangsvektor beträgt gerade  $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$  und daher entspricht dies auch dem Winkel zwischen Spiegelachse und Bildvektor. Die Spiegelachse schließt aber mit der  $x$ -Achse einen Winkel von  $\frac{\gamma}{2}$  ein, so dass wir den gesuchten Winkel im Dreieck erhalten durch:  $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma$ .

Damit erhalten wir schließlich wieder mittels der Kosinus- bzw. Sinussätze wie oben das Folgende: Die  $x$ -Koordinate ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\gamma) \\ &= 0 \cdot \cos(\gamma) + 1 \cdot \sin(\gamma) = \sin(\gamma).\end{aligned}$$

Die  $y$ -Koordinate ist analog:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\gamma) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\gamma) \\ &= 0 \cdot \sin(\gamma) - 1 \cdot \cos(\gamma) = -\cos(\gamma)\end{aligned}$$

Damit ist  $S_{\frac{\gamma}{2}}$  in der Tat die Spiegelung an der Geraden zum Winkel  $\frac{\gamma}{2}$ , so dass wir die folgende Aussage beweisen können:

**Satz 8.4.** *Es gilt  $S_{\frac{\gamma}{2}} \cdot S_{\frac{\gamma}{2}} = E_2$ .*

*Beweis:*

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma) & \cos(\gamma)\sin(\gamma) - \sin(\gamma)\cos(\gamma) \\ \sin(\gamma)\cos(\gamma) - \cos(\gamma)\sin(\gamma) & \sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2\end{aligned}$$

□

Schließlich erhält man durch einfaches Nachrechnen den folgenden

**Satz 8.5.** *Die Verknüpfung zweier Spiegelungen ist eine Drehung:*

$$S_{\frac{\varphi}{2}} \cdot S_{\frac{\psi}{2}} = D_{\varphi-\psi}$$

Damit schließen wir unseren kurzen zwei-dimensionalen Exkurs. Wir kommen später im Kapitel über Eigenwerte noch einmal auf das Thema Drehungen und Spiegelungen zurück.

\* \* \*

Im ersten Kapitel haben wir bereits den Algorithmus zum Lösen von linearen Gleichungssystemen kennengelernt. Im nächsten Kapitel werden wir unsere Kenntnisse über Matrizen benutzen, um diesen wichtigen Algorithmus auch als geeignetes Produkt von Matrizen nachvollziehen zu können.

Wir zeigen daher jetzt, dass die bekannten **elementaren Zeilenumformungen** von Gleichungssystemen, konkret von den entsprechenden Koeffizientenmatrizen, bereits durch Matrizenmultiplikation realisiert werden können.

**Matrizen als Elementare Umformung: Vertauschen von zwei Zeilen.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $r < s < m$  natürliche Zahlen. Definiere nun die Matrix  $C(r, s)$ , gegeben als  $(c_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}$ , durch:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \text{ und } i \neq r, i \neq s \\ 1, & \text{falls } i = r \text{ und } j = s \\ 1, & \text{falls } i = s \text{ und } j = r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit hat  $C(r, s)$  die folgende Form:

$$C(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ & & & \vdots & 1 & & & 0 \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & & & 1 & \vdots \\ & & & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ & & & & & & & 1 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung von  $C(r, s)$  ist wie gewünscht:

$$C(r, s) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten  $\sum_{j=1}^m c_{ij}a_{jk}$  des Matrizenprodukts lassen sich folgendermaßen bestimmen: Für  $i \leq m$ ,  $i \neq r$ ,  $s$  besteht die  $i$ -te Zeile aus den Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^m c_{ij}a_{jk} = c_{ii}a_{ik} = a_{ik}.$$

Die  $r$ -te Zeile besteht somit aus den Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^m c_{rj}a_{jk} = c_{rs}a_{sk} = a_{sk}$$

umgekehrt gilt dies für die  $s$ -te Zeile. Damit ist gezeigt:

**Satz 8.6.** *Für eine beliebige Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$  ergibt sich das Matrizenprodukt  $C(r, s) \cdot A$  aus  $A$  durch Vertauschen der  $r$ -ten Zeile mit der  $s$ -ten Zeile. Weiterhin gilt*

$$C(r, s) \cdot C(r, s) = E_m.$$

Damit ist  $C(r, s)$  invertierbar und es gilt  $C(r, s)^{-1} = C(r, s)$ .

**Matrizen als Elementare Umformung: Skalarmultiplikation einer Zeile.**

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Seien  $n$  und  $r \leq m$  natürliche Zahlen sowie  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Definiere die Matrix  $D(r, \lambda) = (d_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}$  durch:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und } i \neq r \\ \lambda & \text{falls } i = j = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Matrix  $D(r, \lambda)$  arbeitet wie gewünscht, denn für beliebig gegebene Matrizen  $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$  gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 & \ddots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \dots & \lambda a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Denn die Koeffizienten des Produkts  $\sum_{j=1}^m d_{ij}a_{jk}$  ergeben sich wie folgt:  
Für  $i \leq m, i \neq r$  besteht die  $i$ -te Zeile aus den Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^m d_{ij}a_{jk} = d_{ii}a_{ik} = a_{ik}$$

und an der  $r$ -ten Zeile

$$\sum_{j=1}^m d_{rj}a_{jk} = d_{rr}a_{rk} = \lambda a_{rk}.$$

Damit ist gezeigt:

**Satz 8.7.** Für  $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$  ergibt sich das Matrizenprodukt  $D(r, \lambda) \cdot A$  aus  $A$  durch Multiplikation der  $r$ -ten Zeile mit dem Faktor  $\lambda$ . Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  gilt

$$D(r, \lambda) \cdot D(r, \mu) = D(r, \lambda \cdot \mu).$$

Für  $\lambda \neq 0$  ist  $D(r, \lambda)$  invertierbar und es gilt  $D(r, \lambda)^{-1} = D(r, \lambda^{-1})$   
(da  $D(r, \lambda \cdot \lambda^{-1}) = D(r, 1) = E_m$ ).

**Matrizen als Elementare Umformung: Addition zweier Zeilen.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \leq m$ ,  $r \neq s$  und sei  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Definiere die Matrix  $E(r, s, \lambda) = (e_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, m}$  durch

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ \lambda & \text{falls } i = r \text{ und } j = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Matrix ist von derselben Gestalt wie die Einheitsmatrix  $E_m$ , außer dass  $e_{rs} = \lambda$  ist:

$$E(r, s, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \dots & \lambda & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ . Dann ist:

$$E(r, s, \lambda) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + \lambda a_{s1} & \dots & a_{rn} + \lambda a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten  $\sum_{i=1}^m e_{ij}a_{jk}$  des Matrizenprodukts lassen sich wie folgt berechnen: Für  $i \leq m$ ,  $i \neq r$  besteht die  $i$ -te Zeile aus den Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^m e_{ij}a_{jk} = e_{ii}a_{ik} = a_{ik}$$

und die  $r$ -te Zeile besteht aus den Koeffizienten

$$\sum_{j=1}^m e_{rj}a_{jk} = e_{rr}a_{rk} + e_{rs}a_{sk} = a_{rk} + \lambda a_{sk}.$$

**Satz 8.8.** Für  $A \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$  ergibt sich das Matrizenprodukt  $E(r, s, \lambda) \cdot A$  aus  $A$  durch Addition des  $\lambda$ -fachen der  $s$ -ten Zeile zur  $r$ -ten Zeile. Weiterhin gilt

$$E(r, s, \lambda) \cdot E(r, s, \mu) = E(r, s, \lambda + \mu).$$

Dann ist  $E(r, s, \lambda)$  invertierbar und es gilt  $E(r, s, \lambda)^{-1} = E(r, s, -\lambda)$   
(da  $E(r, s, \lambda + (-\lambda)) = E(r, s, 0) = E_m$ ).

Zusammenfassend halten wir fest:

**Definition 8.9.** Eine elementare Zeilenumformung ist eine der in den obigen Abschnitten beschriebenen Matrizenumformungen:

- Das Vertauschen zweier Zeilen (durch Anwendung von  $C(r, s)$ ).
- Die Multiplikation einer Zeile mit einem skalaren Faktor ungleich 0 (durch Anwendung von  $D(r, \lambda)$ ).
- Die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen (durch Anwendung von  $E(r, s, \lambda)$ ).

Die Hintereinanderausführung von elementaren Zeilenumformungen entspricht der sukzessiven Linksmultiplikation mit invertierbaren Matrizen der obigen Typen  $C$ ,  $D$  und  $E$ .

Matrizen der Gestalt  $C$ ,  $D$  und  $E$  heißen **Elementarmatrizen**.

\* \* \*

**Aufgabe 8.10.** Warum gibt die Prüfmatrix  $H$  (aus dem obigen Beispiel) die Stelle eines 1 Bit Fehlers an? Tipp: Multiplizieren Sie  $H$  mit allen kanonischen Einheitsvektoren und betrachten Sie hinterher die Struktur des Resultats.

## 9. MATRIZEN UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme aus Sicht der Matrizenrechnung. Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Für  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$  ist das lineare Gleichungssystem über  $\mathbb{K}$  von der Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu der Matrixgleichung  $A \cdot x = b$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Man nennt die Matrix  $A$  die Koeffizientenmatrix und

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems  $A \cdot x = b$ . Diese Schreibweise hatten wir bereits im ersten Kapitel gesehen. Wir können nun Eigenschaften von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der Matrizenrechnung ausdrücken.

- Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  heißt **homogen**, wenn  $b = 0$  ist
- und **inhomogen**, wenn  $b \neq 0$  ist.
- Für das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  heißt

$$\text{Lös}(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = b\} = A^{-1}[\{b\}]$$

Lösungsmenge.

- Das lineare Gleichungssystem heißt **lösbar**, wenn  $b \in \text{Bild}(A)$ .

**Geometrie der Lösungsmengen.** Sehen wir uns den Zusammenhang zwischen Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen und Untervektorräumen an:

**Satz 9.1.** *Betrachte das Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  mit  $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ . Dann gilt:*

- (a) *Die Lösungsmenge des homogenen Systems  $A \cdot x = 0$  ist*

$$\text{Lös}(A, 0) = A^{-1}[\{0\}] = \text{Kern}(A).$$

*Die Lösungsmenge ist ein Untervektorraum des  $\mathbb{K}^m$ .*

- (b) *Das homogene Gleichungssystem  $(A, 0)$  besitzt immer eine Lösung, nämlich den Nullvektor.*
- (c) *Wenn  $(A, b)$  lösbar ist und  $z \in \text{Lös}(A, b)$ , dann ist*

$$\text{Lös}(A, b) = z + \text{Lös}(A, 0) := \{z + x \mid x \in \text{Lös}(A, 0)\}.$$

*Beweis:* Die ersten zwei Punkte sind klar. Wir zeigen (c):

Zu zeigen ist  $\text{Lös}(A, b) = z + \text{Lös}(A, 0)$ . Wir zeigen die Gleichheit der beiden Mengen durch beide Inklusionen:

“ $\subseteq$ ” Betrachte  $y \in \text{Lös}(A, b)$ . Dann ist  $A \cdot y = b, A \cdot z = b$ . Insbesondere gilt:  $A \cdot (-z) = -A \cdot z = -b$  und daher:

$$0 = b - b = b + (-b) = A \cdot y + A \cdot (-z) = A \cdot (y + (-z)) = A \cdot (y - z)$$

Somit ist  $y - z \in \text{Kern}(A)$  und da  $\text{Kern}(A) = \text{Lös}(A, 0)$  ist, ist  $y \in z + \text{Lös}(A, 0)$  (da  $y \in z + \text{Kern}(A)$ ).

“ $\supseteq$ ” Betrachte  $y \in z + \text{Lös}(A, 0)$ . Wähle  $x \in \text{Lös}(A, 0)$  mit  $y = z + x$ . Dann gilt:

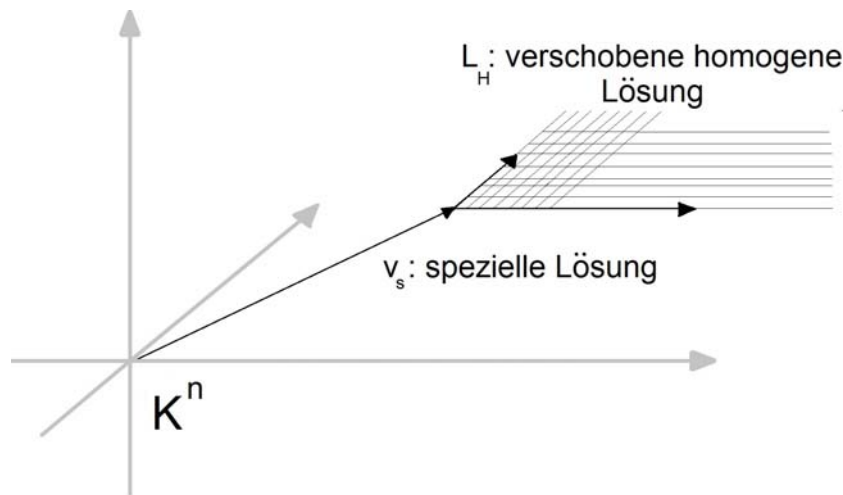
$$A \cdot y = A \cdot (z + x) = A \cdot z + A \cdot x = b + 0 = b$$

Somit ist  $y \in \text{Lös}(A, b)$ .

⊠

Damit sind Lösungsmengen von homogenen linearen Gleichungssystemen stets Untervektorräume des Grundraums. Über  $\mathbb{R}^2$  bedeutet dies, dass wir die triviale Lösung, also den Nullraum  $\{0\}$ , eine Ursprungsgerade, also einen 1-dimensionalen Untervektorraum, oder den gesamten Raum erhalten, da es nur einen 2-dimensionalen Untervektorraum gibt.

Lösungsmengen von inhomogenen linearen Gleichungssystemen sind um einen Vektor verschobene Untervektorräume.



Wir zeigen umgekehrt, dass sich die geometrischen Grundelemente wie Punkte, Geraden, Ebenen usw. in allgemeiner Lage als Lösungsmengen darstellen lassen. Damit

lassen sich geometrische Aufgaben wie die Berechnung von Schnittmengen von Geraden, Ebenen usw. auf die Lösung linearer Gleichungssysteme zurückführen.

**Satz 9.2.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $m \in \mathbb{N}$  und  $U$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{K}^m$ .

- (a) Es gibt ein homogenes lineares Gleichungssystem  $(A, 0)$ , sodass  $U = \text{Lös}(A, 0)$ .  
 (b) Sei  $z \in \mathbb{K}^m$ . Dann gibt es ein lineares Gleichungssystem  $(A, b)$ , sodass

$$z + U = \{z + x \mid x \in U\} = \text{Lös}(A, b).$$

*Beweis:*

- (a) Nach dem Basisexistenzsatz wähle eine Basis  $(v_1, \dots, v_l)$  von  $U$ . Nach dem Basisergänzungssatz wähle  $v_{l+1}, \dots, v_m$ , so dass  $(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_m)$  eine Basis von  $\mathbb{K}^m$  ist. Wir definieren die folgende lineare Abbildung  $A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^{m-l}$  durch die Angabe der Bilder der obigen Basisvektoren:

$$\begin{aligned} A(v_1) &= \dots = A(v_l) = 0, \\ A(v_{l+1}) &= e_1, \quad A(v_{l+2}) = e_2, \quad \dots, \quad A(v_m) = e_{m-l}, \end{aligned}$$

wobei  $e_1, \dots, e_{m-l}$  die kanonische Basis von  $\mathbb{K}^{m-l}$  ist.

*Behauptung.* Dann ist  $U = \text{Kern}(A)$ .

*Beweis der Behauptung:* Wir zeigen beide Inklusionen:

“ $\subseteq$ ” Betrachte ein  $x \in U$ . Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ , sodass gilt  $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i$ .  
 Dann haben wir:

$$A \cdot x = A \cdot \left( \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \cdot A(v_i) = 0,$$

also ist  $x \in \text{Kern}(A)$ .

“ $\supseteq$ ” Sei  $x \in \text{Kern}(A)$ . Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  mit  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ .  
 Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= A \cdot x = A \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i A(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^l \lambda_i \underbrace{A(v_i)}_{=0} + \sum_{i=l+1}^m \lambda_i A(v_i) \\ &= \lambda_{l+1} e_1 + \dots + \lambda_m e_{m-l} \end{aligned}$$

Da die kanonische Basis  $e_1, \dots, e_{m-l}$  linear unabhängig ist, gilt:

$$\lambda_{l+1} = \dots = \lambda_m = 0.$$

Damit ist  $x = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_l) = U$ . Indem wir  $A$  als Matrix in  $\text{Mat}(m-l \times m, \mathbb{K})$  auffassen, ist  $(A, 0)$  ein homogenes Lösungssystem mit

$$U = \text{Kern}(A) = \text{Lös}(A, 0). \quad \square(\text{Beh.})$$

(b) Setze  $b := A(z)$ . Dann ist  $z \in \text{Lös}(A, b)$ . Nach Satz 7.1 gilt

$$z + U = z + \text{Lös}(A, 0) = \text{Lös}(A, b).$$

□

Auf dem Weg zum Gaußschen Algorithmus betrachten wir folgende Definition:

**Definition 9.3.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ .

(a) Die Matrix  $A$  heißt **obere Dreiecksmatrix**, wenn  $A$  quadratisch ist und für  $i, j \leq n$  mit  $i > j$  gilt:  $a_{ij} = 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(b) Die Matrix  $A$  heißt **Diagonalmatrix**, wenn  $A$  quadratisch ist und für alle  $i, j \leq n$  mit  $i \neq j$  gilt:  $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(c) Die Matrix  $A$  heißt **Zeilenstufenmatrix** (kurz: ZSM), wenn für  $i < i' \leq n$  gilt: wenn  $j(i)$  das kleinste  $j$  mit  $a_{ij} \neq 0$  ist und wenn  $j(i')$  das kleinste  $j$  mit  $a_{i'j} \neq 0$  ist, dann ist  $j(i) < j(i')$ , d.h. das Pivotelement der oberen Zeile  $i$  steht weiter links als das Pivotelement der unteren Zeile  $i'$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \underline{a_{1j(1)}} & \dots & a_{1j(2)} & a_{1j(3)} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \underline{a_{2j(2)}} & a_{2j(3)} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \underline{a_{3j(3)}} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

oder schematisch, wenn wir  $*$  als Zeichen für beliebige Körperelemente und  $\#$  als Zeichen für invertierbare Körperelemente benutzen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\#} & \dots & * & * & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \underline{\#} & * & \dots & \dots \\ & & & & 0 & \underline{\#} & \dots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  ist von quadratischer, oberer Dreiecksform, Diagonal- bzw. Zeilenstufenform, wenn die Koeffizientenmatrix  $A$  von der entsprechenden Form ist.

\* \* \*

**Gaußscher Algorithmus.** Um ein beliebiges lineares Gleichungssystem zu lösen, wird das System in ein System in Zeilenstufenform mit gleicher Lösungsmenge transformiert. Dieses wird dann wie bisher gelöst. Grundlage dieses Verfahrens sind die folgenden Sätze:

**Satz 9.4.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $(A, b), (A', b')$  lineare Gleichungssysteme über  $\mathbb{K}$ , so dass die erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A', b')$  durch eine Folge elementarer Zeilenumformungen aus  $(A, b)$  hervorgeht. Dann ist

$$\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(A', b').$$

*Beweis:* Wähle ein Produkt  $P = F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_r$  von Elementarmatrizen, sodass  $A' = P \cdot A$  und  $b' = P \cdot b$ . Wir wissen, dass  $P$  als elementare Zeilenumformung invertierbar ist, sodass gilt:

$$P^{-1} = (F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_r)^{-1} = F_r^{-1} \cdot \dots \cdot F_2^{-1} \cdot F_1^{-1}$$

Insgesamt definiert  $P$  eine injektive Abbildung. Damit gilt also:

$$\begin{aligned} \text{Lös}(A, b) &= \{x \mid Ax = b\} \\ &= \{x \mid P \cdot A \cdot x = P \cdot b\} \\ &= \text{Lös}(P \cdot A, P \cdot b) \end{aligned}$$

□

**Satz 9.5.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $A \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$ . Dann lässt sich  $A$  durch eine Folge von elementaren Zeilenumformungen in eine Matrix  $A'$  in Zeilenstufenform umformen.

*Beweis:* Klar, nach dem früheren Kapitel über lineare Gleichungssysteme. □

\* \* \*

**Algorithmus zum Invertieren von Matrizen.** Das Invertieren einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$  entspricht der Lösung des Systems von Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem der Gestalt

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{jk} = 1$$

beziehungsweise

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{jk} = 0$$

Das Gleichungssystem hat  $m^2$  viele Unbekannte  $x_{jk}$  und  $m^2$  viele Gleichungen.

Wir stellen ein Verfahren zum Invertieren von  $A$  vor, das die von der Gaußelimination bekannten Zeilenumformungen auf effiziente Weise ausnutzt. Wenn die Matrix durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführt werden kann, dann existieren elementare Zeilenumformungen  $F_1, \dots, F_l$  mit

$$F_1 \cdot \dots \cdot F_l \cdot A = E_m.$$

(Klar: Wenn  $A$  invertierbar ist, dann lässt sich  $A$  mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführen.)

Wir wissen bereits, dass dann das Produkt  $F_1 \dots F_l$  invers zu  $A$  ist, das heißt es gilt:

$$A^{-1} = F_1 \cdot \dots \cdot F_l = F_1 \cdot \dots \cdot F_l \cdot E_m$$

Also: Man erhält daher dieses Produkt, indem man die elementaren Zeilenumformungen wie bei  $A$  parallel auf die Einheitsmatrix  $E_m$  anwendet.

**Beispiel 9.6.** Betrachte die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist die Inverse  $A^{-1}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \rightsquigarrow & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & \rightsquigarrow & \dots & \rightsquigarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}$$

Damit ist die Matrix  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$  die Inverse der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Der Algorithmus Schritt für Schritt:

- links steht  $A$ , rechts steht  $E_m$
- solange umformen, bis  $E_m$  links steht
- dann steht rechts  $A^{-1}$

\* \* \*

**Aufgabe 9.7.** Invertieren Sie die nachfolgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9.8.** Zeigen Sie, dass die  $2 \times 2$  Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

genau dann invertierbar ist, wenn  $ad - bc \neq 0$

**Aufgabe 9.9.** Wann ist die Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

invertierbar und wie sieht ihre Inverse aus?

Tipp: Konstruieren Sie die Inverse der  $2 \times 2$  Blockmatrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dann lässt sich die Inverse von  $B$  aus 2 Blockmatrizen “zusammenbauen”.

## 10. KOORDINATENTRANSFORMATION

Oft kann man durch Wahl geeigneter Koordinaten Berechnungen und Argumente vereinfachen. Im Kontext von Vektorräumen werden durch die Darstellung von Vektoren in einer Basis Koordinaten definiert.

**Basiswechsel.** Zunächst überlegen wir uns, wie man die Koordinaten ein und desselben Vektors aber bezüglich verschiedener Basen leicht übertragen kann.

**Definition 10.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und seien  $B = (v_1, \dots, v_m)$  und  $C = (w_1, \dots, w_m)$  Basen von  $V$ . Die **Transformationsmatrix** des Basiswechsels von  $B$  nach  $C$  ist die Matrix  $T_C^B = (t_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ , so dass für alle Spaltenindizes

$j < m$  die Spalte  $\begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{pmatrix}$  die Darstellung von  $v_j$  in der Basis  $C = (w_1, \dots, w_m)$  ist:

$$v_j = \sum_{i=1}^m t_{ij} w_i = t_{1j} w_1 + \dots + t_{mj} w_m,$$

das heißt  $\begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{mj} \end{pmatrix}$  sind gerade die Koordinaten der Basisdarstellung des Vektors  $v_j$  bezüglich  $C$ .

Diese Transformationsmatrizen verdienen ihren Namen, wie der folgende Satz zeigen wird:

**Satz 10.2.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basen  $B = (v_1, \dots, v_m)$  und  $C = (w_1, \dots, w_m)$  und der Transformationsmatrix  $T_C^B = (t_{ij})$ . Sei  $z \in V$  und seien  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  und  $(\mu_1, \dots, \mu_m)$  die Darstellungen des Vektors  $z$  in den Basen  $B$  bzw.  $C$

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i.$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = T_C^B \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

*Beweis:* Mithilfe der Definition der Transformationsmatrix gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i w_i &= \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^m t_{i1} \cdot w_i + \dots + \lambda_m \cdot \sum_{i=1}^m t_{im} \cdot w_i \\ &= \sum_{j=1}^m (\lambda_1 \cdot t_{j1} + \dots + \lambda_m \cdot t_{jm}) \cdot w_j \\ &= \sum_{j=1}^m (t_1 \lambda_1 + \dots + t_m \lambda_m) w_j \end{aligned}$$

Da  $C$  eine Basis ist und die Darstellung bzgl. einer Basis eindeutig ist, gilt:

$$\mu_j = t_{j1}\lambda_1 + \dots + t_{jm}\lambda_m$$

Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Die Transformationsmatrizen erfüllen einfache, zu erwartende Eigenschaften:

**Satz 10.3.** Sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Basen  $B, C$  und  $D$ . Dann gilt:

- (a)  $T_B^B = E_m$
- (b)  $T_D^B = T_D^C \cdot T_C^B$
- (c)  $T_B^C = (T_C^B)^{-1}$

*Beweis:* Klar nach Definition 10.1 und Satz 10.2  $\square$

**Beispiel 10.4.** Sei  $V = \mathbb{K}^m$  und  $B$  die kanonische Basis  $(e_1, \dots, e_m)$ . Weiterhin sei

$C = (w_1, \dots, w_m)$  eine Basis von  $V$ . Für  $j \leq m$  ist der Vektor  $w_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ \vdots \\ w_{mj} \end{pmatrix}$  seine

eigene Darstellung in der kanonischen Basis. Daher ergibt sich die Transformationsmatrix für den Wechsel von  $C$  nach  $B$  als

$$T_B^C = (w_1 \dots w_m) = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & \dots & w_{mm} \end{pmatrix}$$

das heißt die Basis  $C$  ist im wesentlichen die Transformationsmatrix von der Basis  $C$  zur kanonischen Basis  $B$ . Die Matrix  $T_C^B$  erhalten wir nach dem Satz 10.3 durch Invertieren von  $T_B^C$ .

**Beispiel 10.5.** Seien  $C = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $D = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  zwei beliebige und

$K = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  die kanonische Basis. Wollen wir beispielsweise den Vektor

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  bezüglich der Basen  $K, C$  und  $D$  darstellen, so gilt:

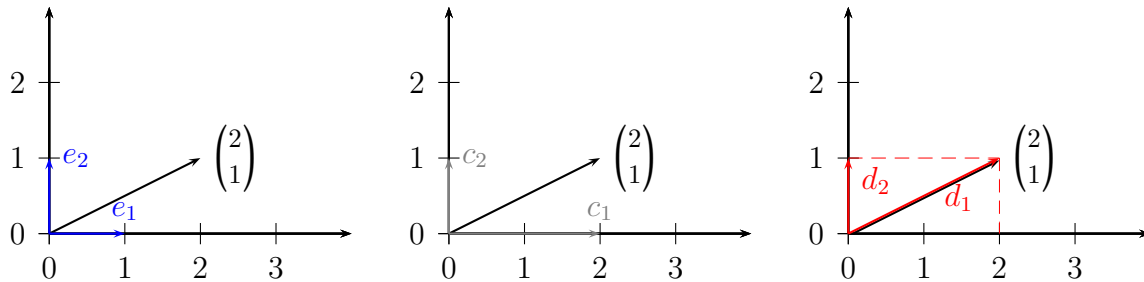
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{bzgl. } K \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{bzgl. } C \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{bzgl. } D \end{aligned}$$

oder kurz:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_D$

**Bemerkung 10.6.** Wir können diese Koordinatenzuweisung auch als Abbildung darstellen: Sei dafür etwa  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_K$  der gegebene Vektor. Dann hat, wie wir gerade gesehen haben,  $v$  bezüglich der Basis  $D$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Somit können wir eine Koordinatenabbildung  $K_D^{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieren, wobei einem Vektor  $v$  des Vektorraums seine Koordinaten in  $\mathbb{R}^2$  zugeordnet werden:

$$v \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_D^{\mathbb{R}^2}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemein bildet daher eine Koordinatenabbildung  $K_B^V$  bezüglich einer Basis  $B$  eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  in den  $\mathbb{K}^n$  ab, indem einem Vektor  $v \in V$  seine Koordinaten bezüglich der Basis  $B$  zugeordnet werden:  $K_B^V : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ .



- Ziel:  $T_C^K \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einfach zu bestimmen ist  $T_K^C$ , denn es gilt:  $T_K^C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Wir invertieren nun  $T_K^C$  um  $T_C^K$  zu erhalten:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & \rightsquigarrow & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

also gilt:  $T_C^K = (T_K^C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und damit:

$$T_C^K \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

- Ziel:  $T_D^K \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einfach zu bestimmen ist  $T_K^D$ , denn es gilt:  $T_K^D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Wir invertieren nun  $T_K^D$  um  $T_D^K$  zu erhalten:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & \rightsquigarrow & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & & 1 & 1 & 0 & 1 & \rightsquigarrow & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

also gilt:  $T_D^K = (T_K^D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$  und damit:

$$T_D^K \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

• Ziel:  $T_D^C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir benutzen die Eigenschaft (b) aus Satz 10.3:

$$T_D^C = T_D^K \cdot T_K^C,$$

wobei  $K$  die kanonische Basis ist. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$T_D^C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

**Bemerkung 10.7.** Wir können jetzt alle Basen ineinander überführen. Manchmal ist der Umweg über die kanonische Basis sinnvoll, da dies in der Praxis meist einfacher ist.

\* \* \*

**Darstellende Matrizen von linearen Abbildungen bezüglich beliebiger Basen.** Motivation: Wir möchten nicht nur von Homomorphismen des  $K^n$  in den  $K^m$  darstellende Matrizen haben, sondern von linearen Abbildungen zwischen beliebigen Vektorräumen (und beliebigen Basen).

**Definition 10.8.** Sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen  $K$ -Vektorräumen. Sei  $B = (v_1, \dots, v_m)$  eine Basis für  $V$  und  $C = (w_1, \dots, w_n)$

eine Basis für  $W$ . Dann definiere  $DM_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n \times m, K)$

als die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$  durch: für  $j \leq m$  ist

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \dots + a_{nj}w_n.$$

Das bedeutet, dass jeweils die Spalte  $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  die Darstellung von  $f(v_j)$  in der Basis

$C$  ist.

**Bemerkung 10.9.** Der bereits definierte Begriff der darstellenden Matrix ist hier ein Spezialfall für  $V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m$  und  $B$  und  $C$  jeweils die kanonische Basis. Insbesondere bleibt auch die Merkregel 7.3 zur Aufstellung der darstellenden Matrix allgemein erhalten, wobei Sie die –wie in der Definition angegeben– Bilder der  $B$ -Basisvektoren in den Koordinaten der Basis  $C$  darstellen müssen!

Das Verhalten der darstellenden Matrizen können wir sehr einfach mittels Transformationsmatrizen zeigen:

**Satz 10.10.** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen. Seien  $B = (v_1, \dots, v_m)$  und  $B' = (v'_1, \dots, v'_m)$  Basen von  $V$  und  $C = (w_1, \dots, w_n)$  und  $C' = (w'_1, \dots, w'_n)$  Basen für  $W$ . Dann gilt:

$$\text{DM}_{B',C'}(f) = T_{C'}^C \cdot \text{DM}_{B,C}(f) \cdot T_B^{B'}$$

*Beweis:* Betrachte  $j \leq m$ . Es sei  $e_j$  der  $j$ -te kanonische Basisvektor von  $\mathbb{K}^m$ . Dann ist  $\text{DM}_{B',C'}(f) \cdot e_j$  die Darstellung von  $f(v'_j)$  bezüglich der Basis  $C'$ . Andererseits ist  $T_B^{B'} \cdot e_j$  die Darstellung von  $v'_j$  in der Basis  $B$ . Dann ist

$$\text{DM}_{B,C}(f) \cdot (T_B^{B'} \cdot e_j)$$

die Darstellung von  $f(v'_j)$  in der Basis  $C$ .

$$T_{C'}^C \cdot (\text{DM}_{B,C}(f) \cdot (T_B^{B'} \cdot e_j))$$

ist dann die Darstellung von  $f(v'_j)$  in der Basis  $C'$ . Damit gilt:

$$\text{DM}_{B',C'}(f) \cdot e_j = (T_{C'}^C \cdot \text{DM}_{B,C}(f) \cdot T_B^{B'}) \cdot e_j$$

Also sind die Matrizen spaltenweise identisch. □

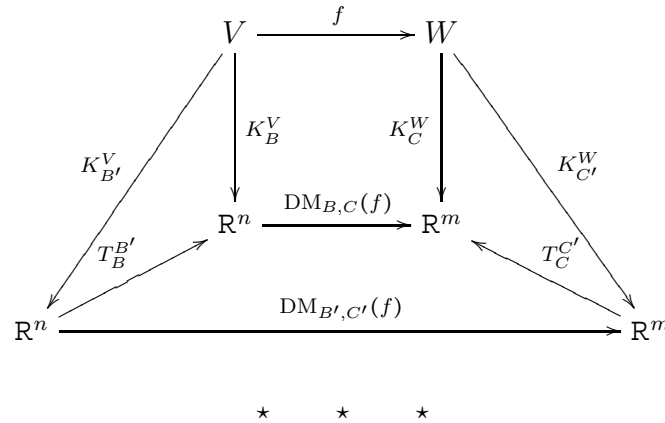
**Bemerkung 10.11.** Mittels des obigen Satzes erhalten wir durch den Übergang zur kanonischen Basis schnell allgemeine darstellende Matrizen, denn für  $V = \mathbb{K}^m, W = \mathbb{K}^n$  und  $K_m, K_n$  die kanonischen Basen gilt:

$$\text{DM}_{B',C'}(f) = T_{C'}^{K_n} \cdot \text{DM}(f)_{K_n}^{K_m} \cdot T_{K_m}^{B'}$$

**Bemerkung 10.12.** Das im Satz 10.10 dargestellte Transformationsverhalten der darstellenden Matrizen können wir durch ein kommutatives Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{DM}_{B',C'}(f)} & W \\ T_B^{B'} \downarrow & & \uparrow T_{C'}^C \\ V & \xrightarrow{\text{DM}_{B,C}(f)} & W \end{array}$$

Zusammenfassend erhalten wir für einen Endomorphismus  $f : V \rightarrow W$  zu zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V, W$  mit Basen  $B, B'$  für  $V$  bzw.  $C, C'$  für  $W$  und dazugehörigen Koordinatenabbildungen  $K_B^V, K_{B'}^V$  bzw.  $K_C^W, K_{C'}^W$  sowie Koordinatentransformationsmatrizen  $T_B^{B'}$  bzw.  $T_{C'}^C$  (von Koordinatendarstellungen bezüglich der Basis  $B'$  bzw.  $C'$  in die Darstellung betreffs der Basis  $B$  bzw.  $C$ ) folgendes Diagramm:



Langfristiges Ziel: Möglichst einfache Darstellung von Matrizen, das heißt durch geschickte Wahl der Basen möchten wir möglichst viele Nullen in der darstellenden Matrix erzeugen können.

Eine Teillösung liefert bereits der folgende Satz:

**Satz 10.13.** Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung vom  $m$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $V$  in den  $n$ -dimensionalen  $K$ -Vektorraum  $W$  vom Rang:  $\text{Rg}(f) = \dim(\text{Bild}(f)) = r$ . Dann existieren Basen  $B = (v_1, \dots, v_m)$  von  $V$  und  $C = (w_1, \dots, w_n)$  von  $W$ , so dass

$$\text{DM}_{B,C}(f) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

wobei  $r$  viele Einsen auf der Hauptdiagonalen der oben links entstandenen Blockmatrix stehen und sonst nur Nullen.

Warum ist dies nur eine Teillösung? Schließlich brauchen wir doch genau  $r$  Einsen, da  $\text{Rg}(f) = r$ , und ansonsten haben wir bereits nur Nullen! Das Problem ist, dass wir für die Vektorräume  $V, W$  Basen  $B, C$  wählen mussten, die im Allgemeinen nicht gleich sind, selbst wenn  $V = W$  ist. In diesem Fall möchten wir aber eigentlich auch  $B = C$  haben. Wir werden innerhalb des Beweises sehen, dass wir dies aber nicht erwarten können.

*Beweis von Satz 10.13:* Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt:

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = m$$

Setze  $s = \dim(\text{Kern}(f)) = m - r$ . Wir benutzen die Idee aus dem Beweis des Dimensionssatzes 6.17. Wähle eine Basis  $(v_{r+1}, \dots, v_m)$  von  $\text{Kern}(f)$ . Nach dem Basisergänzungssatz wähle  $v_1, \dots, v_r \in V$ , sodass  $B = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m)$  eine Basis

von  $V$  ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Bild}(f) &= \{f(v) \mid v \in V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_m)\} \\
 &= \{f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_m v_m) \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\} \\
 &= \{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) + \lambda_{r+1} f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_m f(v_m) \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\} \\
 &= \{\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) + 0 + \dots + 0 \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\} \\
 &= \mathcal{L}(f(v_1), \dots, f(v_r))
 \end{aligned}$$

Setze  $w_1 := f(v_1), \dots, w_r := f(v_r)$ . Wir wissen bereits aus dem Dimensionssatzes, dass  $(w_1, \dots, w_r)$  linear unabhängig sind. Nach dem Basisergänzungssatz wähle  $w_{r+1}, \dots, w_n \in W$ , sodass  $C = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n)$  eine Basis für  $W$  ist.

Für  $j = 1, \dots, r$  ist  $f(v_j) = w_j$  und damit ist  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  mit einer 1 an der  $j$ -ten Stelle die Darstellung von  $f(v_j)$  in der Basis  $C$ .

Für  $j = r + 1, \dots, m$  ist  $f(v_j) = 0$ , da diese Vektoren im Kern der Abbildung  $f$  liegen, sodass  $(0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0)$  die Darstellung von  $f(v_j)$  in der Basis  $C$  ist. Nach Definition gilt dann wie erwünscht

$$\text{DM}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☒(Satz 10.13)

**Bemerkung 10.14.** Wie wir im Beweis gesehen haben, können wir nicht von  $B = C$  ausgehen, da  $B$  durch den Basisergänzungssatz gewählt wurde und  $C$  durch Bildwerte gegeben ist, also beide nicht hinreichend frei wählbar sind.

Dies ist nur eine Teillösung des Problems, wenn man den Anspruch hat, dass im Falle eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  (d.h.  $V = W$ ) die Basen  $B$  und  $C$  auch gleich gewählt werden sollen. Der Beweis zeigt, dass die konkrete Wahl von  $B$  notwendig war, um mittels des Kerns die unteren Nullen zu erzeugen, sowie die Wahl von  $C$  mittels der Bilder der Basis  $B$  (teilweise) notwendig war, um die Einsen im oberen Teil zu erhalten. Wenn man allerdings nicht auf die gleiche Wahl von  $B$  und  $C$  angewiesen ist, ist die Aussage des Satzes offenbar optimal.

\* \* \*

**Darstellende Matrizen von Endomorphismen.** Wir beschäftigen uns nun mit Endomorphismen.

**Definition 10.15.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ . Sei  $B = (v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$ . Dann definiere die darstellende Matrix von  $f$  bezüglich  $B$  als

$$DM_B(f) := DM_{B,B}(f) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K}).$$

Die folgende Definition führt hilfreiche Begriffe ein.

**Definition 10.16.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$  eine Matrix über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

(a) Die Matrix  $A^t = (a_{ij}^t) \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ , sodass für alle  $i \leq m$  und  $j \leq n$  gilt

$$a_{ij}^t = a_{ji}$$

ist die **transponierte Matrix** von  $A$ . Das heißt die transponierte Matrix ist eine Spiegelung der Ausgangsmatrix an der Hauptdiagonalen.

(b) Die Matrix  $A$  heißt **symmetrisch**, wenn

$$A^t = A$$

gilt. Offenbar sind symmetrische Matrizen quadratisch.

Offensichtlich ist jede Diagonalmatrix symmetrisch. Symmetrische Matrizen und Matrizen ähnlicher Gestalt spielen eine wichtige Rolle in den Anwendungen der Linearen Algebra. Wir werden am Ende des Themas Diagonalisierung darauf eingehen.

Wir zeigen nun, dass wir bereits die bekannten Spiegelungen durch geeignete Wahl der Basen durch Basistransformation auf eine symmetrische Form bringen können.

**Beispiel 10.17.** Die darstellende Matrix einer Spiegelung lässt sich durch geeignete Basistransformationen auf eine einfachere Form bringen: Wähle dazu einen Vektor  $u_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , der nicht auf Spiegelachse und der Achse senkrecht dazu liegt. Sei

$$\begin{aligned} u_1 &= S_{\frac{\gamma}{2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\gamma) + b \cdot \sin(\gamma) \\ a \cdot \sin(\gamma) - b \cdot \cos(\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das Spiegelbild von  $u_0$ . Nach Wahl von  $u_0$  ist  $C = (u_0, u_1)$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^2$  und somit eine Basis. Wenn  $B = (e_1, e_2)$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet, so sind die Transformationsmatrizen

$$T_B^C = (u_0 \ u_1) = \begin{pmatrix} a & a \cdot \cos(\gamma) + b \cdot \sin(\gamma) \\ b & a \cdot \sin(\gamma) - b \cdot \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_C^B = (T_B^C)^{-1}.$$

Im Fall, dass  $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist, das heißt wir schließen aus, dass die Spiegelachse gerade die  $x$ - oder  $y$ -Achse ist, gilt:

$$T_B^C = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_C^B = (T_B^C)^{-1} = \frac{1}{\sin(\gamma)} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die darstellende Matrix  $DM_C(f)$ . Nach dem Transformationssatz gilt:

$$\begin{aligned} DM_C(f) &= T_C^B \cdot DM_B(f) \cdot T_B^C \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \\ 0 & \frac{1}{\sin(\gamma)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & -\cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \\ 0 & \frac{1}{\sin(\gamma)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 1 \\ \sin(\gamma) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir hätten  $DM_C(f)$  auch einfacher bestimmen können, indem wir verstehen, dass die Spiegelung die beiden Vektoren  $u_0$  und  $u_1$  vertauscht, das heißt es gilt:

$$f(u_0) = u_1 \quad \text{und} \quad f(u_1) = u_0.$$

Insbesondere muss gelten:

$$DM_C(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DM_C(f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist wegen der Eindeutigkeit einer linearen Abbildung auf einer Basis klar, dass  $DM_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist. Diese darstellende Matrix ist symmetrisch.

**Beispiel 10.18.** Wir setzen unsere Betrachtungen des letzten Beispiels fort: Eine andere Darstellung einer Spiegelung erhalten wir, indem wir eine Basis aus einem Vektor  $v_0$  der Spiegelachse und einem hierzu senkrechten Vektor  $v_1$  bilden. Nehmen wir weiterhin an, dass beide Vektoren normiert sind, d.h. sie haben die Länge 1. (Siehe diesbezüglich auch die Bemerkung nach der Definition 14.2.) Der senkrechte Vektor

lässt sich nun durch Drehung um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  mit der Drehmatrix  $D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

berechnen. Sei  $v_0 = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}$  und  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) \\ \sin(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\gamma}{2}) \\ \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}$ .

Setze die Basis  $D$  an als  $D = (v_0, v_1)$ . Dann gilt für die Transformationsmatrizen:

$$T_B^D = (v_0 v_1) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & -\sin(\frac{\gamma}{2}) \\ \sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix  $T_D^B$  ist dann die Drehmatrix für den Winkel  $\frac{-\gamma}{2}$ :

$$T_D^B = (T_B^D)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{-\gamma}{2}) & -\sin(\frac{-\gamma}{2}) \\ \sin(\frac{-\gamma}{2}) & \cos(\frac{-\gamma}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\gamma}{2}) & \sin(\frac{\gamma}{2}) \\ -\sin(\frac{\gamma}{2}) & \cos(\frac{\gamma}{2}) \end{pmatrix}$$

Schließlich gilt:

$$\text{DM}_D(f) = T_D^B \cdot \text{DM}_B(f) \cdot T_B^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies hätte man auch wieder schnell durch Überlegung entscheiden können, denn die Basisvektoren werden wie folgt abgebildet:

$$f(v_0) = v_0 \text{ und } f(v_1) = -v_1.$$

Im nächsten Kapitel werden wir diese Art der Beziehung schätzen lernen, nämlich dass  $f(v_0) = 1 \cdot v_0$  und  $f(v_1) = (-1) \cdot v_1$  gilt.

**Beispiel 10.19.** Wir wollen nun Eigenschaften eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  untersuchen, die unabhängig von der gewählten Basis von  $V$  sind: Betrachten Sie die Situation, dass  $f(v) = \lambda v$  für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt, wobei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist. Wir werden zeigen, dass dann auch  $\text{DM}_B(f) \cdot (v)_B = \lambda \cdot (v)_B$  für eine beliebige Basis  $B$  gilt. Hierbei ist  $(v)_B$  die Darstellung von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ . Somit ist in der Gleichung das Skalar  $\lambda$  unabhängig von der Basiswahl im Vektorraum  $V$ .

Nehmen wir daher an, es gelte  $\text{DM}_B(f) \cdot (v)_B = \lambda \cdot (v)_B$ . Wir zeigen, dass dann auch für eine beliebige andere Basis  $C$  gilt:  $\text{DM}_C(f)(v)_C = \lambda(v)_C$ .

Dies zeigen wir nur mithilfe unserer Kenntnisse über Basiswechsel:

$$\text{DM}_C(f) \cdot (v)_C = \underbrace{T_C^B \cdot \text{DM}_B(f) \cdot T_B^C}_{\text{DM}_C(f)} \cdot \underbrace{T_C^B \cdot (v)_B}_{(v)_C} = T_C^B \cdot \text{DM}_B(f) \cdot (v)_B = \lambda \cdot T_C^B \cdot (v)_B = \lambda(v)_C$$

**Beispiel 10.20.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ ,  $K$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$  und  $\text{DM}_B(f)$  symmetrisch für eine Basis  $B$  von  $V$  ( $V$  sei ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum). Wir betrachten die folgende Frage: Ist dann  $\text{DM}_C(f)$  für eine beliebige Basis  $C$  von  $V$  auch symmetrisch?

Im Allgemeinen ist diese Aussage nicht richtig, aber für Orthonormalbasen (ONB) können wir die Aussage beweisen. Dieser Begriff ist neu, aber wir werden uns bei der Hauptachsentransformation noch ausgiebig mit Orthonormalbasen beschäftigen. An dieser Stelle soll Ihnen folgende Eigenschaft einer Orthonormalbasis  $B$  reichen:

$$(T_K^B)^{-1} = (T_K^B)^t.$$

Wie Sie wissen, gilt die Gleichung:  $T_B^C = T_B^K T_K^C$ . Wenn man jetzt noch die Matrixrechenregeln  $(AB)^t = B^t A^t$  und  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$  für quadratische Matrizen kennt, dann erhält man:

$$(T_B^C)^{-1} = (T_B^K T_K^C)^{-1} = (T_K^C)^{-1} (T_B^K)^{-1} = (T_K^C)^t (T_B^K)^t = (T_B^K T_K^C)^t$$

Wir beweisen jetzt die Symmetrie der Matrix  $\text{DM}_C(f)$  direkt:

$$\text{DM}_C(f)^t = ((T_B^C)^{-1} \cdot \text{DM}_B(f) \cdot T_B^C)^t$$

$$\begin{aligned}
&= (T_B^C)^t \cdot ((T_B^C)^{-1} \cdot \text{DM}_B(f))^t \\
&= (T_B^C)^t \cdot (\text{DM}_B(f))^t \cdot ((T_B^C)^{-1})^t \\
&= (T_B^K T_K^C)^t \cdot \text{DM}_B(f) \cdot (T_B^K \cdot T_K^C) \\
&= (T_B^C)^{-1} \cdot \text{DM}_B(f) \cdot (T_B^C) \\
&= \text{DM}_C(f)
\end{aligned}$$

\*   \*   \*

**Aufgabe 10.21.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $B$  eine beliebige Basis von  $V$ . Dann definieren wir:

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

für eine  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1..n}$  und

$$\text{Spur}(f) := \text{Spur}(\text{DM}_B(f)) = \sum_{i=1}^n (\text{DM}_B(f))_{ii}$$

Zeigen Sie, dass der letzte Ausdruck wohldefiniert (unabhängig von der Basis  $B$ ) ist!

Anleitung: Sie müssen zeigen, dass

$$\text{Spur}(\text{DM}_B(f)) = \text{Spur}(\text{DM}_C(f))$$

für jede andere Basis  $C$  von  $V$  gilt. Beweisen Sie dazu die Gleichung

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

und dann verwenden Sie

$$\text{DM}_C(f) = (T_B^C)^{-1} \cdot \text{DM}_B(f) \cdot T_B^C.$$

## 11. EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Es ist offenbar vorteilhaft die darstellende Matrix eines Endomorphismus  $f$  in Diagonalform zu bringen:

$$\text{DM}_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K}),$$

da wir insbesondere mit einer solchen Darstellung viel einfacher rechnen können: Wir sparen bereits bei der Darstellung Speicherplatz und beim Umgang Rechenzeit.

Man sieht leicht, dass für die Vektoren  $v_i$  der Basis  $C = (v_1, \dots, v_m)$  gilt

$$f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i. \quad (*)$$

**Grundlegende Begriffe.** Das Ziel des Diagonalisierens können wir folgendermaßen mithilfe der Wahl einer geeigneten Basis formalisieren:

**Definition 11.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann ist  $f$  *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis  $C$  von  $V$  gibt, so dass  $\text{DM}_C(f)$  eine Diagonalmatrix ist.

Bereits durch die obige Einleitung ist offenbar die Gleichung  $(*)$  von besonderer Bedeutung.

**Definition 11.2.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus.

- (a) Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  heißt *Eigenwert* von  $f$ , wenn es ein  $v \in V \setminus \{0\}$  gibt mit  $f(v) = \lambda \cdot v$ .
- (b) Ein Vektor  $v \in V$  heißt *Eigenvektor* von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ , wenn  $v \neq 0$  und  $f(v) = \lambda \cdot v$ .

Damit erhalten wir sofort den folgenden

**Satz 11.3.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann ist  $f$  genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis  $C$  von  $V$  gibt, deren Vektoren Eigenvektoren von  $f$  sind.

*Beweis:*

" $\Rightarrow$ " Sei  $f$  diagonalisierbar. Wähle eine Basis  $C = (v_1, \dots, v_m)$  von  $V$ , so dass die darstellende Matrix von  $f$  von der Gestalt

$$\text{DM}_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

ist. Für alle  $i \leq m$  gilt also  $f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$ . Somit ist jedes  $v_i$  ein Eigenvektor von  $f$ .

" $\Leftarrow$ " Sei also  $C = (v_1, \dots, v_m)$  eine Basis von  $V$ , die aus Eigenvektoren besteht. Wähle  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  aus  $\mathbb{K}$ , so dass für alle  $i \leq m$  gilt:

$$f(v_i) = \lambda_i \cdot v_i$$

Damit haben wir wie gewünscht die Diagonalform

$$DM_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

□

**Eigenwerte und Eigenvektoren an bekannten Beispielen.** Wir betrachten bekannte Endomorphismen des  $\mathbb{R}^2$  und deren Bezüge zu Eigenwerten und -vektoren.

**Beispiel 11.4.** Wie bereits im Beispiel 10.18 gesehen, lässt sich eine Spiegelung des  $\mathbb{R}^2$  in eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  diagonalisieren.

**Beispiel 11.5.** Eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\gamma$  besitzt nur dann einen Eigenvektor  $v$ , falls der Drehwinkel ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  (also von 180 Grad) ist. In diesem Fall ist  $f$  diagonalisierbar und die entsprechende Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  oder ihr Negatives  $-E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Beispiel 11.6.** Betrachte schließlich eine Scherung  $h$  des  $\mathbb{R}^2$  mit darstellender Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Endomorphismus  $h$  besitzt einen Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit zugehörigen Eigenwert 1, das heißt es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren Eigenvektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  von  $h$  sind skalare Vielfache von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , denn aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$

folgt:

- (i)  $a + b = \lambda \cdot a$  und
- (ii)  $b = \lambda b$

Hierfür betrachten wir folgende Fallunterscheidung: Wir wissen, dass Eigenvektoren ungleich dem Nullvektor sind und unterscheiden daher formal zwei Fälle:

- Fall  $b \neq 0$ . Nach (ii) muss wegen  $b = \lambda b$  also  $\lambda = 1$  sein. Nach (i) gilt:  $a + b = a$ . Dies stimmt nur für  $b = 0$  und dies ist nun aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Falls und daher kann dieser nicht eintreten. Es bleibt also der
- Fall  $b = 0$ : Dann muss  $a \neq 0$  gelten. Aus der ersten Formel (i) folgt somit:  $a = \lambda a \Rightarrow \lambda = 1$

Insgesamt gilt also:  $\lambda = 1$  und  $b = 0$ .

Damit spannen die Eigenvektoren von  $h$  nur den eindimensionalen Untervektorraum  $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$  auf und es gibt keine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , die nur aus Eigenvektoren von  $h$  besteht. Nach Satz 11.3 gilt also: Die Scherung  $h$  ist nicht diagonalisierbar.

**Beispiel 11.7.** Betrachten wir die Matrix  $A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Diese Matrix hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$ . Wir berechnen die dazugehörigen Eigenvektoren. Dazu müssen wir das Lineare Gleichungssystem der Gestalt  $A \cdot v = \lambda_1 \cdot v$  lösen. Dies ist etwa äquivalent zu

$$0 = Av - \lambda_1 v = A \cdot v - \lambda_1 \cdot E_2 \cdot v = (A - \lambda_1 \cdot E_2) \cdot v.$$

Somit haben wir das Problem auf das Lösen eines homogenen, linearen Gleichungssystems (bzw. des Berechnens des Kerns einer geeigneten linearen Abbildung) reduziert.

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 \cdot E_2 &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anwendung des Gaußschen Algorithmus liefert:

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & \rightsquigarrow & 0 & 0 \end{array}$$

Das heißt  $b$  ist frei wählbar und  $a - \frac{1}{2}b = 0$ , also  $a = \frac{1}{2}b$ . Somit ist die Lösungsmenge die Folgende:

$$\text{Lös}(A - \lambda_1 E_2, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

und eine Basis ist etwa für  $b = 2$  gegeben durch den Vektor  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Die Probe ergibt tatsächlich:

$$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot v_1$$

Analoge Rechnungen ergeben für  $\lambda_2 = 3$ :

$$0 = A \cdot v - \lambda_2 \cdot v = (A - \lambda_2 E_2)v :$$

$$\begin{aligned}
 A - \lambda_2 \cdot E_2 &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Anwendung des Gaußschen Algorithmus liefert:

$$\begin{array}{cc|cc}
 1 & -1 & & 1 & -1 \\
 2 & -2 & \rightsquigarrow & 0 & 0
 \end{array}$$

das heißt  $b$  ist frei wählbar und es gilt  $a - b = 0$ , also  $a = b$ . Die Lösungsmenge ist dann

$$\text{Lös}(A - \lambda_2 E_2, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

und eine Basis ist etwa für  $b = 1$  gegeben durch den Vektor  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Eigenräume zu Eigenwerten.** Wir haben nun verstanden, was Eigenvektoren sind und können schließlich die Ideen aus dem letzten Beispiel vertiefen. Wir interessieren uns daher als Nächstes, wie man die Eigenvektoren berechnen kann – vorausgesetzt, dass wir bereits Eigenwerte gegeben haben. Dabei hilft die folgende Charakterisierung enorm:

**Satz 11.8.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann gilt für einen Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ :*

$$\begin{aligned}
 &v \text{ ist genau dann Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } \lambda, \\
 &\text{wenn } v \in \text{Kern}(f - \lambda \cdot \text{Id}_V).
 \end{aligned}$$

*Beweis:*  $v$  ist Eigenvektor von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$

$$\Leftrightarrow f(v) = \lambda \cdot v$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(v) - \lambda \cdot v = f(v) - (\lambda \cdot \text{Id}_V)(v) = (f - \lambda \cdot \text{Id}_V)(v)$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{Kern}(f - \lambda \cdot \text{Id}_V) \quad \square$$

Beachte die Analogie im Beweis zu der Umformung im letzten Beispiel 11.7.

Offenbar sind die obigen Kerne des verschobenen Endomorphismus  $A$  von Interesse, so dass wir diese gesondert bezeichnen:

**Definition 11.9.** *Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann heißt*

$$E(\lambda) := \text{Kern}(f - \lambda \cdot \text{Id}_V)$$

der *Eigenraum* von  $f$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts  $\lambda$  ist die Dimension von  $E(\lambda)$ .

**Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren.** Unser Ziel ist es also, die oben genannten Eigenräume zu bestimmen, da sich hier die Eigenvektoren befinden. Wünschenswert ist allerdings nach dem Satz 11.3 letztendlich eine Gesamtbasis des Ausgangsraums  $V$ , bestehend nur aus Eigenvektoren. Auf dem Wege zu diesem Ziel hilft uns der folgende Satz, der besagt, dass Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind. Dies ist ein erster Schritt in die richtige Richtung.

**Satz 11.10.** *Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Seien  $v_1, \dots, v_r$  Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig.*

*Beweis:* Durch Induktion über  $r$ :

Induktionsanfang: Die Behauptung gilt für  $r = 0$ , weil das 0-Tupel nach Definition linear unabhängig ist.

Induktionsschritt:

Voraussetzung: Die Aussage gilt für  $r$ .

Behauptung: Die Aussage gilt auch für  $r + 1$ .

Angenommen  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$  sind Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ .

Ziel:  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$  sind linear unabhängig.

Seien dazu (nach Definition)  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \in K$  mit

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (*)$$

gegeben.

Noch zu zeigen:  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \alpha_{r+1} = 0$

Wende dazu  $f$  auf diese Gleichung an. Da  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$  Eigenvektoren sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1) + \dots + f(\alpha_r v_r) + f(\alpha_{r+1} v_{r+1}) &= f(0) \\ \Leftrightarrow \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_r f(v_r) + \alpha_{r+1} f(v_{r+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} &= 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung (\*) mit  $\lambda_{r+1}$  ergibt:

$$\alpha_1 \lambda_{r+1} v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_{r+1} v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \quad (***)$$

Subtraktion von (\*\*\*) von (\*\*) ergibt:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  linear unabhängig. Also gilt:

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \dots = \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$$

Da die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$  paarweise verschieden sind, gilt

$$\lambda_1 - \lambda_{r+1} \neq 0, \dots, \lambda_r - \lambda_{r+1} \neq 0.$$

Somit folgt:  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ . Da  $v_{r+1}$  ein Eigenvektor ist, gilt  $v_{r+1} \neq 0$  und somit wie gewünscht nach (\*) auch  $\alpha_{r+1} = 0$ . Damit ist alles per Induktion bewiesen.  $\square$

Aus dem letzten Satz folgt sofort:

**Satz 11.11.** *Sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Dann besitzt  $f$  höchstens  $m$  verschiedene Eigenwerte.*

*Beweis:* Bei  $m + 1$  vielen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$  wähle jeweils dazugehörige Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_{m+1}$ . Nach dem letzten Satz 11.10 ist  $v_1, \dots, v_{m+1}$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren im  $m$ -dimensionalen Vektorraum. Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Wir können sogar die Aussage über die lineare Unabhängigkeit wie folgt verstärken:

**Satz 11.12.** *Sei  $V$  ein  $m$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  paarweise verschiedene Eigenwerte von  $f$  mit geometrischen Vielfachheiten  $m_1, \dots, m_r$ . Für  $i \leq r$  sei  $(v_1^i, \dots, v_{m_i}^i)$  eine Basis des Eigenraums  $E(\lambda_i)$ . Dann gilt:*

(a) *Das System*

$$\left( \underbrace{v_1^1, \dots, v_{m_1}^1}_{\text{Basis } E(\lambda_1)}, \underbrace{v_1^2, \dots, v_{m_2}^2}, \dots, \underbrace{v_1^r, \dots, v_{m_r}^r} \right)$$

*ist linear unabhängig.*

(b) *Für die Summe der geometrischen Vielfachheiten gilt:*

$$m_1 + \dots + m_r \leq m$$

(c) *Der Endomorphismus  $f$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn*

$$m_1 + \dots + m_r = m.$$

*Beweis:* zu (a). Wir betrachten eine Darstellung des Nullvektors und hierfür konkret Skalare  $\alpha_j^i \in \mathbb{K}$ , so dass

$$\alpha_1^1 v_1^1 + \dots + \alpha_{m_1}^1 v_{m_1}^1 + \dots + \alpha_1^r v_1^r + \dots + \alpha_{m_r}^r v_{m_r}^r = 0$$

Wir sehen, dass die Teilsummen

$$\alpha_1^i v_1^i + \dots + \alpha_{m_i}^i v_{m_i}^i$$

selbst Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_i$  oder eben der Nullvektor sind. Wenn derartige Teilsummen aber ungleich Null wären, so wären sie linear abhängige Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, im Widerspruch zu Satz 11.10. Also gilt für alle  $i \leq r$ , dass

$$\alpha_1^i = \dots = \alpha_{m_i}^i = 0.$$

Damit sind aber wie gewünscht alle Skalare  $\alpha_j^i = 0$  und somit ist das System

$$(v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^r, \dots, v_{m_r}^r)$$

linear unabhängig.

zu (b). Da  $V$  die Dimension  $m$  besitzt, hat dieses System als Folge linear unabhängiger Vektoren in  $V$  höchstens  $m$  Elemente und wir erhalten:

$$m_1 + \dots + m_r \leq m.$$

zu (c). Wir zeigen beide Richtungen der geforderten Äquivalenz. Angenommen, dass  $m_1 + \dots + m_r = m$  gilt, dann ist

$$(v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, v_1^2, \dots, v_{m_2}^2, \dots, v_1^r, \dots, v_{m_r}^r)$$

sogar eine Basis von  $V$ . Diese Basis besteht aus Eigenvektoren und nach Satz 11.3 ist  $f$  diagonalisierbar.

Umgekehrt sei nun  $f$  diagonalisierbar. Nach Satz 11.3 wähle eine Basis  $C = (v_1, \dots, v_m)$  aus Eigenvektoren. Für  $i \leq r$  sei  $n_i$  die Anzahl der Vektoren aus  $C$ , deren Eigenwerte  $\lambda_i$  ist. Dann ist  $n_i \leq m_i$  und

$$m = n_1 + \dots + n_r \leq m_1 + \dots + m_r \leq m$$

und damit ist

$$m_1 + \dots + m_r = m.$$

□

**Vorläufige Strategie des Diagonalisierens.** Damit zeichnet sich eine Strategie für das Diagonalisieren eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  ab — wir kommen am Ende des folgenden Kapitels noch einmal im Detail darauf zurück:

Man bestimme alle Eigenwerte von  $f$ , das heißt alle  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ , für die gilt:

$$\text{Kern}(f - \lambda_i \cdot \text{Id}_V) \neq \{0\}$$

Dann bestimme man eine Basis des Eigenraums  $E(\lambda_i)$  durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(f - \lambda_i \cdot \text{Id}_V)(x) = 0.$$

Wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume gleich der Dimension von  $V$  ist, erhalten wir eine Diagonalisierung von  $f$  und wir erhalten eine Diagonaldarstellung

von  $f$  in der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix},$$

in der jeder Eigenwert von  $f$  entsprechend seiner geometrischen Vielfachheit auftritt.

Sie sehen insbesondere, dass wir fast am Ziel sind: Wir können bis auf eine kleine Blackbox am Anfang des Algorithmus bereits Matrizen diagonalisieren (sofern möglich). Das Einzige, was wir noch lernen müssen, ist Eigenwerte zu bestimmen.

Diese Fähigkeit werden wir im folgenden Kapitel erlernen.

\* \* \*

**Beispiel 11.13.** Wir wollen jetzt die Menge der diagonalisierbaren  $2 \times 2$  Matrizen über  $\mathbb{R}$  untersuchen:

Sei  $f : V \rightarrow V$  gegeben durch  $DM_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  für eine Basis  $B$  von  $V$ . Man kann zeigen, dass die Menge der diagonalisierbaren Endomorphismen  $f$  entweder zwei unterschiedliche Eigenwerte besitzt oder ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Um dies zu beweisen nehmen wir an, dass  $f$  diagonalisierbar ist und es genau einen Eigenwert hat. Weiterhin starten wir mit unserem gewohnten Ansatz:

$$\begin{aligned} DM_B(f) \cdot (v)_B = \lambda \cdot (v)_B &\Leftrightarrow DM_B(f) \cdot (v)_B - \lambda \cdot (v)_B = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot (v)_B = 0 \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für irgendein  $v \neq 0$  erfüllt ist, darf die Matrix  $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$  nicht invertierbar sein (sonst würde man  $v = 0$  ausrechnen)! Sie wissen bereits, dass dies genau dann erfüllt ist wenn  $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ .

Dann gibt es genau ein  $\lambda$ , welches die Gleichung  $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$  erfüllt, da jede weitere Lösung ebenfalls ein Eigenwert wäre und wir nach Voraussetzung nur einen haben.

Somit folgt aus der Gleichung  $ad + \lambda^2 - \lambda(a + d) - bc = 0$  mittels der Lösungsformel sofort  $\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc}$  und wegen der Eindeutigkeit muss nun  $\lambda_1 = \lambda_2$ , also  $\sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc} = 0$  gelten.

Als Nächstes können wir sukzessiv alle Koeffizienten berechnen. Es gilt:

$$0 = \frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc = \frac{1}{4}(a-d)^2 + bc$$

und somit  $a = \pm 2\sqrt{-bc} + d$ . Schließlich daher  $\lambda = a \pm \sqrt{bc}$  und wegen der Eindeutigkeit von  $\lambda$  erhält man  $\sqrt{bc} = 0$  und folglich  $\lambda = d$ . Also insgesamt:

$$\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Was wir dazu wissen müssen ist zunächst einmal:

**Beispiel 11.14.** Unter dem Annulator eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  versteht man die Menge aller Polynome  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0$  für welche gilt:

$$p(f)v := a_n f^n(v) + \dots + a_1 f^1(v) + a_0 v = 0$$

Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ ,  $V$  ein 2-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  für  $B$  eine beliebige Basis von  $V$ . Man kann zeigen, dass

$$p_f(\lambda) := (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

ein Element des Annulators ist.

Überlegen Sie sich, dass  $p_f(\lambda)$  wohldefiniert, also unabhängig von der Basis  $B$  ist.

Wir werden dies zuerst für den Fall, dass  $f$  diagonalisierbar ist beweisen:

Angenommen  $f$  ist diagonalisierbar. Das bedeutet, dass  $v = c_1 v_1 + c_2 v_2$ ,  $\forall v \in V$  und Eigenvektoren  $v_1, v_2$ . Wir beweisen jetzt  $p_f(f)v = 0$  direkt:

$$\begin{aligned} p_f(f)v &= p_f(f)(c_1 v_1 + c_2 v_2) \\ &= c_1 p_f(f)v_1 + c_2 p_f(f)v_2 \\ &= c_1 (f^2(v_1) - (a+d)f(v_1) + (ad-bc)v_1) + c_2 (f^2(v_2) - (a+d)f(v_2) + (ad-bc)v_2) \\ &= c_1 \underbrace{(\lambda_1^2 - (a+d)\lambda_1 + ad-bc)}_{\star} v_1 + c_2 \underbrace{(\lambda_2^2 - (a+d)\lambda_2 + ad-bc)}_{\star\star} v_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

weil  $\star = \star\star = 0$ . Wir haben nämlich im vorherigen Beispiel gesehen, dass aus  $\lambda_i$  ist ein EW  $0 = (a - \lambda_i)(d - \lambda_i) - bc = \lambda_i^2 - (a + d)\lambda_i + ad - bc$  folgt.

\* \* \*

**Aufgabe 11.15.** Zeigen Sie mithilfe des obigen Beispiels: Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  und  $V$  ein 2-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  für  $B$  eine beliebige Basis von  $V$ . Angenommen  $f$  ist nicht diagonalisierbar, dann gilt:  $p_f(f)v = 0$  für alle  $v \in V$ .

Anleitung. Man beweise: Es existiert  $v$  mit  $\{v, f(v)\} := \{b_1, b_2\}$  sind linear unabhängig, also auch eine Basis von  $V$ . Man erhält, dass  $f(b_1) = b_2$  und  $f(b_2) = c_1 b_1 + c_2 b_2$  und für die darstellende Matrix gilt:

$$\text{DM}_{b_1, b_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Als Nächstes müssen Sie zeigen, dass  $p_f(f)$  unabhängig von der Basiswahl ist. Das bedeutet:

$$A := (a)_{i,j=1,2} = (T_B^C)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (T_B^C) \quad \text{für } B, C \text{ Basen von } V$$

dann ist:

$$p_f(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}.$$

Jetzt zeigt man nur noch  $(0 - f)(c_2 - f) - c_1 = 0$  und erhält wegen der Basisinvarianz von  $p_f(\lambda)$ , dass  $p_f(f) = (0 - f)(c_2 - f) - c_1 = 0$

**Aufgabe 11.16.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ . Angenommen für alle  $v \in V$  gilt:  $f^4(v) + v = 0$ . Welche Aussagen bezüglich der Diagonalisierbarkeit und der Eigenwerte von  $f$  lassen sich für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$  feststellen?

**Aufgabe 11.17.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  und  $V$  ein zweidimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Es soll weiterhin für  $v \in V$  und ein festes  $k \in \mathbb{N}$  gelten  $f^k(v) = 0$ . Man zeige, dass:  $\text{Spur}(f) = 0$ .

## 12. DETERMINANTEN VON MATRIZEN

Ziel: Bestimmung des noch fehlenden Gliedes in der Algorithmenkette zum Diagonalisieren von Matrizen — das heißt Klärung der Frage, wie Eigenwerte bestimmt werden können.

Wir motivieren die Betrachtungen durch ein einfaches Beispiel in der Matrizen-Dimension  $2 \times 2$ . Wir haben bereits gesehen, dass eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  genau dann invertierbar ist, wenn gilt

$$ad - bc \neq 0. \quad (*)$$

Wir benutzen nun dieses Kriterium in der folgenden einfachen Umformung: Sei also  $A = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{K})$  darstellende Matrix eines Endomorphismus  $f$ . Bei der Suche nach Eigenwerten sind die Abbildungen  $A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2}$  für  $\lambda \in \mathbb{K}$  zu studieren. Nach der Dimensionsformel gilt:

$$\dim(\text{Kern}(A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2})) + \text{Rg}(A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2}) = 2$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} & \dim(\text{Kern}(A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2})) > 0 \\ \iff & \text{Rg}(A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2}) < 2, \\ \iff & A - \lambda \cdot \text{Id}_{\mathbb{K}^2} \text{ ist nicht invertierbar,} \\ \iff & \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e - \lambda & f \\ g & h - \lambda \end{pmatrix} \text{ ist nicht invertierbar} \\ \iff & p_A(\lambda) := (e - \lambda)(h - \lambda) - gf = 0. \end{aligned}$$

Das heißt, die Eigenwerte des durch die Matrix  $A$  dargestellten Endomorphismus sind die Nullstellen dieses quadratischen Polynoms  $p_A(\lambda)$ , welches als so genanntes **charakteristisches Polynom** bezeichnet wird. (Beachte,  $p_A(\lambda)$  ist in der Tat ein Polynom in der Unbekannten  $\lambda$  bei gegebenen (Parametern oder Zahlen)  $e, f, g, h$ .)

**Beispiel 12.1.** Im Fall der Spiegelung

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

lautet das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (\cos(\varphi) - \lambda)(-\cos(\varphi) - \lambda) - \sin^2(\varphi) \\ &= -\cos^2(\varphi) + \lambda^2 - \sin^2(\varphi) \\ &= \lambda^2 - (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ &= \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Damit hat das Polynom  $p(\lambda)$  die Nullstellen 1 und  $-1$ . Da die Dimensionen der Eigenräume  $E(1)$  und  $E(-1)$  jeweils mindestens 1 sind, ist die geometrische Vielfachheit der Eigenräume jeweils gleich (klar!). Da  $1 + 1 = 2$  ist, ist die Matrix  $A$  nach Satz 11.12 diagonalisierbar, mit der Diagonalform  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Dies hatten wir bereits gesehen.

\* \* \*

**Determinanten von Matrizen.** In der obigen Umformung hatten wir das charakteristische Polynom mit Hilfe des Invertierkriteriums  $ad - bc \neq 0$  angesetzt. Der Term  $ad - bc$  wird sich als Determinante der Matrix herausstellen. Ziel ist es die Determinante und somit das charakteristische Polynome für beliebige Matrizen zu definieren. Dies werden wir in diesem und dem folgenden Kapitel umsetzen.

**Definition 12.2.** Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}((m+1) \times (m+1), \mathbb{K})$  und  $k, l \leq m$ . Dann definiere  $A_{kl} = (\bar{a}_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$  aus  $A$  durch Weglassen der  $k$ -ten Zeile und  $l$ -ten Spalte:

$$\bar{a}_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i < k \text{ und } j < l \\ a_{i+1j} & \text{falls } k \leq i < m \text{ und } j < l \\ a_{ij+1} & \text{falls } i < k \text{ und } l \leq j < m \\ a_{i+1j+1} & \text{falls } k \leq i < m \text{ und } l \leq j < m \end{cases}$$

Skizzenhaft heißt dies, dass wir die entsprechende Zeile und Spalte löschen:

$$A_{kl} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{k1} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{km+1} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m+11} & \dots & a_{m+1l} & \dots & a_{m+1m+1} \end{array} \right)$$

Nach diesem technischen Hilfsmittel folgt nun die eigentliche

**Definition 12.3** (Laplacescher Entwicklungssatz). Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Definiere die *Determinantenfunktion*

$$\det : \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

für  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  durch Rekursion über  $m$ :

(a) Für  $A = (a) \in \text{Mat}(1 \times 1, \mathbb{K})$  sei  $\det(A) = \det A := a$

(b) Angenommen  $\det : \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  sei bereits definiert. Dann setze die gesuchte Abbildung  $\det : \text{Mat}((m+1) \times (m+1), \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  an wie folgt:

Für  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$  sei  $\det(A) := \det A$  die folgende alternierende Summe:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} - \dots \pm a_{m+1,1} \det A_{m+1,1} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \det A_{k1} \end{aligned}$$

Man schreibt oft abkürzend auch  $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$  statt  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$ .

**Beispiel 12.4.** Für  $m = 2$  erhalten wir den bekannten Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - c \cdot |b| = a \cdot d - c \cdot b,$$

den wir vorher bereits als Determinante von  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  bezeichnet haben.

Für  $m = 3$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= aei - ahf - dbi + dhc + gbf - gec \\ &= aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec \end{aligned}$$

Diese Formel kann man sich folgendermaßen merken: Man hänge die erste und zweite Zeile unten an die Matrix heran und erhält:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Danach addiere man die Produkte der drei Hauptdiagonalen ( $\searrow$ ) und subtrahiere die Produkte der drei Nebendiagonalen ( $\swarrow$ ). Diese Merkregel wird auch als die *Regel von Sarrus* bezeichnet.

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir die ersten beiden Spalten rechts hinzufügen:  $\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$ . Diese Regel gilt allerdings nur für die Dimensionen  $m = 2$

und  $m = 3$ . Für  $m = 2$  gilt erwartungsgemäß:  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

Strategie für  $m = 4$ : Wir entwickeln zunächst nach einer Spalte und nutzen dann diese Regel von Sarrus für die 4 Unterdeterminanten (siehe Übungsaufgabe). Wir lernen allerdings noch wie man mithilfe des Gauß-Algorithmus eine höherdimensionale Matrix zunächst vereinfachen kann, um dann relativ bequem die Determinante zu berechnen.

**Bemerkung 12.5.** In der Definition der Determinante einer Matrix, dem sogenannten Laplaceschem Entwicklungssatz, wird die Determinante nach der *ersten Spalte* entwickelt. Das gleiche Ergebnis und somit eine vielleicht einfachere Möglichkeit der Berechnung erhält man, wenn man nach einer *beliebigen Spalte* oder einer *beliebigen Zeile* entwickelt. Dabei ändert sich allerdings gegebenenfalls der *Wechsel der Vorzeichen*, entsprechend des folgenden Schachbrettmusters:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Betrachten Sie dazu das folgende

**Beispiel 12.6.** Betrachte  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  und das dazugehörige Schachbrettmuster

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

. Aufgrund der Nullen in der zweiten Spalte entwickeln wir nach dieser:

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot (4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) \\ &= -2 \cdot (12 - 2) \\ &= -20 \end{aligned}$$

Wir könnten auch nach der dritten Zeile entwickeln:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) + 3 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 2) \\
&= 2 \cdot (2) + 3 \cdot (-8) \\
&= -20
\end{aligned}$$

Wir könnten die Determinante auch nach irgendeiner beliebigen anderen Zeile oder Spalte entwickeln oder nach der Regel von Sarrus und würden immer das gleiche Ergebnis erhalten. Schauen Sie daher genau hin, welche Regel am schnellsten zum Ziel führt.

\*   \*   \*

**Determinanten und Gaußscher Algorithmus.** Wie angekündigt befassen wir uns abschließend mit der Methode der Bestimmung der Determinante mittels des Gaußschen Algorithmus. Mithilfe dessen können wir schließlich auch den gewünschten Zusammenhang zwischen einer nicht verschwindenden Determinanten und der Invertierbarkeit einer Matrix (siehe Satz 12.10) nachweisen.

Wir starten mit einfachen Umformungen von benachbarten Zeilen.

**Satz 12.7.** *Sei  $A \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ . Dann gilt:*

- (a) *Verwandelt man  $A$  durch Vertauschen zweier benachbarter Zeilen in die Matrix  $A'$ , so ist  $\det A' = -\det A$ .*
- (b) *Verwandelt man  $A$  durch Multiplikation einer Zeile mit  $\lambda \in \mathbb{K}$  in die Matrix  $A'$ , so ist  $\det A' = \lambda \det A$ .*
- (c) *Sei  $k < m$  und seien  $A'$  und  $A''$  Matrizen, deren  $i$ -te Zeilen für  $i \neq k$  mit der  $i$ -ten Zeile von  $A$  übereinstimmen und so dass die  $k$ -te Zeile von  $A$  die Summe der  $k$ -ten Zeilen von  $A'$  und  $A''$  ist. Dann ist  $\det A = \det A' + \det A''$ .*
- (d) *Verwandelt man  $A$  durch Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu darauf folgenden Zeilen in die Matrix  $A'$ , so ist  $\det A' = \det A$ .*

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptungen durch Induktion über  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Induktionsanfang: Für  $m = 1$  besitzt die Matrix  $A = (a)$  nur eine Zeile.

Zu (a): Klar!

Zu (b): Es gilt:  $\det A' = \det(\lambda \cdot a) = \lambda a = \lambda \det(a) = \lambda \det A$

Zu (c): Betrachte  $A' = (a')$ ,  $A'' = (a'')$  und  $A = (a' + a'')$ . Dann gilt:

$$\det A = \det(a' + a'') = \det A' + \det A''.$$

Zu (d): Klar!

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Behauptungen (a)–(d) für  $m$  gelten. Betrachte  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$ .

Zu (a): Betrachte  $k \leq m$ . Die Matrix  $A' = (a'_{i,j}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$  entstehe aus  $A$  durch Vertauschen der Zeilen  $k$  und  $k+1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \det A' &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a'_{k,1} \det A'_{k,1} + (-1)^{k+2} a'_{k+1,1} \det A'_{k+1,1} + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a_{k+1,1} \det A_{k+1,1} + (-1)^{k+2} a_{k,1} \det A_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
 &= -(-1)^{k+2} a_{k+1,1} \det A_{k+1,1} + (-1)^{k+2} a_{k,1} \det A_{k,1} - \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
 &= - \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} = -\det A
 \end{aligned}$$

Zur Begründung der Umformung beachte man, dass

- $a'_{k,1} = a_{k+1,1}$  und  $a'_{k+1,1} = a_{k,1}$
- für  $i \neq k, k+1$  ist  $a'_{i,1} = a_{i,1}$
- $A'_{k,1} = A_{k+1,1}$  und  $A'_{k+1,1} = A_{k,1}$
- für  $i \neq k, k+1$  entsteht  $A'_{i,1}$  aus  $A_{i,1}$  durch Vertauschen benachbarter Zeilen, nach Induktionsannahme ist dann  $\det A'_{i,1} = -\det A_{i,1}$

Zu (b): Betrachte  $k \leq m$ . Die Matrix  $A' = (a'_{i,j}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$  entstehe aus  $A$  durch Multiplikation der  $k$ -ten Zeile mit dem Faktor  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \det A' &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a'_{k,1} \det A'_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} \lambda a_{k,1} \det A_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \lambda \det A_{i,1} \\
 &= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
 &= \lambda \cdot \det A
 \end{aligned}$$

Zur Begründung der Umformung beachte man, dass

- $a'_{k,1} = \lambda a_{k,1}$
- für  $i \neq k$  ist  $a'_{i,1} = a_{i,1}$
- $A'_{k,1} = A_{k,1}$
- für  $i \neq k$  entsteht  $A'_{i,1}$  aus  $A_{i,1}$  durch skalare Multiplikation einer Zeile mit dem Faktor  $\lambda$ , nach Induktionsannahme ist dann  $\det A'_{i,1} = \lambda \cdot \det A_{i,1}$

Zu (c): Es seien  $A = (a_{ij}), A' = (a'_{ij}), A'' = (a''_{ij}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$  wie angegeben.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \det A &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a_{k,1} \det A_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} (a'_{k,1} + a''_{k+1}) \det A_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} (\det A'_{i,1} + \det A''_{i,1}) \\
 &= (-1)^{k+1} a'_{k,1} \det A'_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &\quad + (-1)^{k+1} a''_{k+1} \det A''_{k,1} + \sum_{i=1, i \neq k}^{m+1} (-1)^{i+1} a''_{i,1} \det A''_{i,1} \\
 &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} + \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a''_{i,1} \det A''_{i,1} \\
 &= \det A' + \det A''
 \end{aligned}$$

Zur Begründung der Umformung beachte man, dass

- $a_{k,1} = a'_{k,1} + a''_{k,1}$
- für  $i \neq k$  entsteht  $A_{i,1}$  aus  $A'_{i,1}$  und  $A''_{i,1}$  durch Addieren einer Zeile und Kopieren der übrigen Zeilen, nach Induktionsannahme ist dann  $\det A_{i,1} = \det A'_{i,1} + \det A''_{i,1}$
- Wegen der Übereinstimmung in den Zeilen von  $A, A'$  und  $A''$  ist  $A_{k,1} = A'_{k,1} = A''_{k,1}$
- für  $i \neq k$  ist  $a_{i,1} = a'_{i,1} = a''_{i,1}$

Zu (d): Betrachte  $k \leq m$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die Matrix  $A' = (a'_{ij}) \in \text{Mat}(m+1 \times m+1, \mathbb{K})$  entstehe aus  $A$  durch Addition des  $\lambda$ -fachen der Zeile  $k$  zur Zeile  $k+1$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \det A' &= \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a'_{k,1} \det A'_{k,1} + (-1)^{k+2} a'_{k+1,1} \det A'_{k+1,1} + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a'_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a_{k,1} \det A'_{k,1} + (-1)^{k+2} (a_{k+1,1} + \lambda a_{k,1}) \det A_{k+1,1} \\
 &\quad + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A'_{i,1} \\
 &= (-1)^{k+1} a_{k,1} (\det A_{k,1} + \lambda \det A_{k+1,1}) \\
 &\quad + (-1)^{k+2} a_{k,1} \det A_{k,1} + (-1)^{k+2} (a_{k+1,1} + \lambda a_{k,1}) \det A_{k+1,1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} + \sum_{i=1, i \neq k, i \neq k+1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} \\
& = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{i,1} = \det A
\end{aligned}$$

Zur Begründung der Umformung beachte man, dass

- $a'_{k,1} = a_{k+1,1} + \lambda a_{k,1}$
- für  $i \neq k$  ist  $a'_{i,1} = a_{i,1}$
- $A'_{k+1,1} = A_{k+1,1}$
- für  $i \neq k, k+1$  entsteht  $A'_{i,1}$  aus  $A_{i,1}$  durch Addition des  $\lambda$ -fachen einer Zeile, nach Induktionsannahme ist dann  $\det A'_{i,1} = \det A_{i,1}$
- die  $k$ -te Zeile von  $A'_{k,1}$  ist die Summe der  $k$ -te Zeile von  $A_{k,1}$  und dem  $\lambda$ -fachen der  $k$ -ten Zeile von  $A_{k+1,1}$ , die übrigen Zeilen von  $A'_{k,1}, A_{k,1}$  und  $A_{k+1,1}$  stimmen überein. Nach der in (b) und (c) formulierten Zeilenlinearität ist  $\det A'_{k+1} = \det A_{k,1} + \lambda A_{k+1,1}$

Damit ist der Satz nach dem Prinzip der vollständigen Induktion bewiesen.  $\square$

Wir wollen jetzt versuchen, diese Aussage für Umformungen benachbarter Zeilen zu verallgemeinern.

Betrachte dazu natürliche Zahlen  $1 \leq k < l \leq m$ . Die Vertauschung der Zahlen  $k$  und  $l$  kann durch eine Folge von Vertauschungen benachbarter Zahlen erreicht werden:

$$\begin{array}{cccccccc}
\dots & k & k+1 & k+2 & \dots & l-2 & l-1 & l & \dots \\
\dots & k+1 & k & k+2 & \dots & l-2 & l-1 & l & \dots \\
\dots & k+1 & k+2 & k & \dots & l-2 & l-1 & l & \dots \\
& & & & \ddots & & & & \\
\dots & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & k & l-1 & l & \dots \\
\dots & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & l-1 & k & l & \dots \\
\dots & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & l-1 & l & k & \dots \\
\dots & k+1 & k+2 & k+3 & \dots & l & l-1 & k & \dots \\
& & & & \ddots & & & & \\
\dots & k+1 & k+2 & l & \dots & l-2 & l-1 & k & \dots \\
\dots & k+1 & l & k+2 & \dots & l-2 & l-1 & k & \dots \\
\dots & l & k+1 & k+2 & \dots & l-2 & l-1 & k & \dots
\end{array}$$

Diese Folge enthält  $l - k$  Nachbarvertauschungen, um  $k$  an die  $l$ -te Stelle zu transportieren und  $l - k - 1$  Nachbarvertauschungen, um anschließend  $l$  an die  $k$ -te Stelle zu transportieren. Insgesamt besteht die Folge aus  $2(l - k) - 1$  Vertauschungen, also einer ungeraden Anzahl. Mit dieser Beobachtung können wir den vorangehenden Satz auch auf nicht-benachbarte Vertauschungen und Zeilen-Additionen ausdehnen.

Eine beliebige Vertauschung kann man durch eine ungerade Anzahl von Nachbarvertauschungen realisieren. Wenn man das  $\lambda$ -fache der  $k$ -ten Zeile zur  $l$ -ten Zeile addieren möchte, vertauscht man zunächst Zeilen, so dass die Additionssituation von Satz 12.7 Teil (d) vorliegt. Satz 12.7 impliziert die Invarianz der Determinante. Anschließend tauscht man die vertauschten Zeilen zurück. Die hierdurch verursachten Vorzeichenwechsel heben sich auf. Damit gilt der folgende

**Satz 12.8.** *Sei  $A \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ . Dann gilt:*

- (a) *Verwandelt man  $A$  durch Vertauschen zweier Zeilen in die Matrix  $A'$ , so ist  $\det A' = -\det A$ .*
- (b) *Verwandelt man  $A$  durch Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile in die Matrix  $A'$ , so ist  $\det A' = \det A$ .*

**Praktisch Determinanten berechnen.** Fassen wir noch einmal zusammen, wie wir mit Papier und Bleistift Determinanten berechnen, wenn wir keinen Computer benutzen (können):

- Für  $n \times n$ -Matrizen und  $n \leq 3$  hilft die Regel von Sarrus.
- Für  $n = 4$  könnte es sinnvoll sein, zunächst nach einer Zeile/Spalte mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes zu entwickeln und schließlich für die Unterdeterminanten die Regel von Sarrus zu nehmen.
- Generell ist es sinnvoll, nach einer Zeile und Spalte zu entwickeln, die sehr viele Nullen enthält.
- Bei großen Matrizen ist es auf jeden Fall sinnvoll, zunächst mittels der beschriebenen Gauß-Methode Umformungen anzusetzen, um schließlich über eine Nullzeile oder -spalte zu entwickeln – oder gar die Determinante aus der Zeilenstufenform ganz einfach zu entwickeln, wie auch der folgende Satz zeigt.

Dennoch, Determinanten großer Matrizen seien dem Computer überlassen. Am einfachsten programmiert ist der Laplacesche Entwicklungssatz – dieser ist allerdings aufgrund der Rekursion eher teuer umgesetzt.

\* \* \*

Wir schauen uns nun weitere Eigenschaften der Determinantenfunktion an.

**Satz 12.9.** *Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$  eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann ist  $\det A = \prod_{i=1}^m a_{ii}$ .*

Insbesondere gilt für die Einheitsmatrix  $E_m \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$  stets:  $\det E_m = 1$ .

*Beweis von Satz 12.9:* Durch Induktion über  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

Induktionsanfang:  $\det A = \det(a_{11}) = a_{11} = \prod_{i=1}^1 a_{ii}$ .

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für  $m$ . Dann ist nach Induktionsannahme

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} = a_{11} \cdot \prod_{i=2}^{m+1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{m+1} a_{ii}$$

☒(Satz 12.9)

Wir erhalten nun die für die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren wichtigste Eigenschaft von Matrizen:

**Satz 12.10.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $A \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ . Dann ist  $A$  invertierbar genau dann, wenn  $\det A \neq 0$ .

*Beweis:* Überführe  $A = (a_{ij})$  durch den Gauß-Algorithmus mittels Folge von elementaren Zeilenumformungen in eine Matrix  $A' = (a'_{ij})$  in Zeilenstufenform. Nach den Sätzen 12.7 und 12.8 wird die Determinante der Matrix  $A$  entlang der Umformungen nur mit Faktoren  $\neq 0$  multipliziert. Das bedeutet

$$\det A = 0 \text{ genau dann, wenn } \det A' = 0.$$

Die Matrix  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn alle Diagonaleinträge  $a'_{ii}$  von  $A'$  ungleich Null sind. Wir erhalten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar genau dann, wenn } \prod_{i=1}^m a'_{ii} &\neq 0 \\ &\text{genau dann, wenn } \det A' \neq 0 \\ &\text{genau dann, wenn } \det A \neq 0 \end{aligned}$$

☒

**Bemerkung 12.11.** Der vorangehende Beweis enthält implizit ein Verfahren zur Berechnung der Determinante einer Matrix  $A$  mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

Die Matrix  $A$  wird durch die elementaren Zeilenumformungen des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform gebracht. Die Determinante der Zeilenstufenmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge. Die Determinante der ursprünglichen Matrix  $A$  ergibt sich aus der Determinante der Zeilenstufenmatrix durch Vorzeichenwechsel entsprechender Folgen der Zeilenumformungen.

**Beispiel 12.12.** Wir berechnen die Determinante mittels Gauß-Umformungen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2)) = 2 \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Ergebnis überein, wenn wir nach der zweiten Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot (-1) \\ &\quad - (-4) \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 2 + 2 + 8 - 4 - 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

\* \* \*

Folgender Satz fasst noch einmal den übergreifenden Zusammenhang der verschiedenen Begriffe zusammen – staunen Sie selbst:

**Satz 12.13.** *Für eine Matrix  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Die Determinante von  $A$  ist ungleich Null.*
- (b) *Der Rang der Matrix ist maximal, nämlich gleich  $n$ .*
- (c) *Der Kern von  $A$  ist trivial, nämlich gleich der Menge  $\{0\}$ .*
- (d) *Die Zeilenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig.*
- (e) *Die Spaltenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig.*
- (f) *Die Inverse von  $A$  existiert.*
- (g) *Das homogene lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$  besitzt eine eindeutige Lösung, nämlich den Nullvektor.*
- (h) *Das inhomogene lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  besitzt für eine beliebige rechte Seite  $b$  eine eindeutige Lösung.*

**Achtung:** In dieser Äquivalenz steht nichts über Diagonalisierbarkeit!

Den Beweis werden wir an dieser Stelle nicht bringen, aber es ist eine gute Übungsaufgabe, sich die Zusammenhänge selbst zu überlegen, denn wir haben bereits alle Teile des Beweises in den vorhergehenden Betrachtungen (innerhalb der verschiedenen Kapitel!) gesehen bzw. angerissen.

\* \* \*

Mit unserem bisherigen Wissen können wir bereits eine wichtige Rechenregel für Determinanten feststellen:

**Lemma 12.14.** *Für beliebige  $n \times n$ -Matrizen gilt:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .*

*Beweis:* Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

Fall:  $\det(B) = 0$ :

Daraus folgt wegen des Dimensionssatzes, dass  $B$  nicht injektiv sein kann, da die Matrix nicht invertierbar ist. Also existiert ein Vektor  $v \neq 0$  mit  $Bv = 0$ . Das bedeutet aber wiederum, dass  $(AB)v = 0$  und deswegen die Matrix  $AB$  nicht injektiv sein kann und somit wegen der Dimensionsformel auch nicht invertierbar.

Zusammengefasst gilt:  $\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot 0 = \det(A) \cdot \det(B)$ .

Fall:  $\det(B) \neq 0$ :

Dann können wir  $B$  mithilfe des Gaußalgorithmus als  $B = D \cdot P_1^{-1} \cdot \dots \cdot P_k^{-1}$  schreiben. Hier handelt es sich bei den  $P_i$  um Elementarmatrizen die einer Zeilenumformung entsprechen (die Determinante also nicht verändern) und  $D$  ist eine Diagonalmatrix. Außerdem wissen wir bereits, dass gilt:

$$\det(D) = \left| \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix} \right| = d_{11} \cdot \dots \cdot d_{nn}$$

Und es gilt:  $\det(AB) = \det(AD \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_k) = \det(AD)$ .

Dabei entsteht die Matrix  $AD$  aus der Matrix  $A$  wobei die  $j$ -te Spalte von  $A$  mit dem  $j$ -ten Diagonaleintrag von  $D$  multipliziert wurde. Die Eigenschaften der Determinante sagen uns jetzt, dass wir aus jeder Spalte einen Faktor  $d_{jj}$  herausziehen können:

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} d_{11} \cdot a_{11} & \dots & d_{jj} \cdot a_{1j} & \dots & d_{nn} \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{11} \cdot a_{n1} & \dots & d_{jj} \cdot a_{nj} & \dots & d_{nn} \cdot a_{nn} \end{pmatrix} \right| &= d_{11} \cdot \dots \cdot d_{nn} \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| \\ &= \det(D) \det(A) \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt wie gewünscht:

$$\det(AB) = \det(AD \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_k) = \det(AD) = \det(D) \det(A) = \det(B) \det(A)$$

☒

\* \* \*

**Die Cramersche Regel.** In diesem Abschnitt werden wir noch eine weitere wesentliche Anwendung der Determinanten kennenlernen. Wir beschäftigen uns nun mit linearen Gleichungssystemen, die auf einer invertierbaren Matrix beruhen, also sei für ein gegebenes Gleichungssystem  $Ax = b$  die Determinante ungleich Null. Damit ist die Lösung eindeutig bestimmt und die Lösungsmenge besteht nur aus einem Vektor, nämlich  $x = A^{-1}b$ . Die Berechnung der Inversen ist allerdings nicht immer leicht, sodass wir auf eine andere Methode zurückgreifen werden.

Neben dem Gaußschem Algorithmus befassen wir uns nun mit folgender Regel:

Ein lineares Gleichungssystem  $Ax = b$ , mit  $\det A \neq 0$ , besitzt die eindeutige Lösung  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Dann ist  $x_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$ , mit  $D := \det A$  und  $D_i = \det A_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $A_i$  aus  $A$  hervorgeht indem man die  $i$ -te Spalte durch die rechte Seite  $b$  ersetzt. Diese Art der Lösungsangabe eines linearen Gleichungssystems nennt man die Cramersche Regel.

Betrachten wir folgendes

**Beispiel 12.15.** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Berechne } D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -14,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Somit gilt:

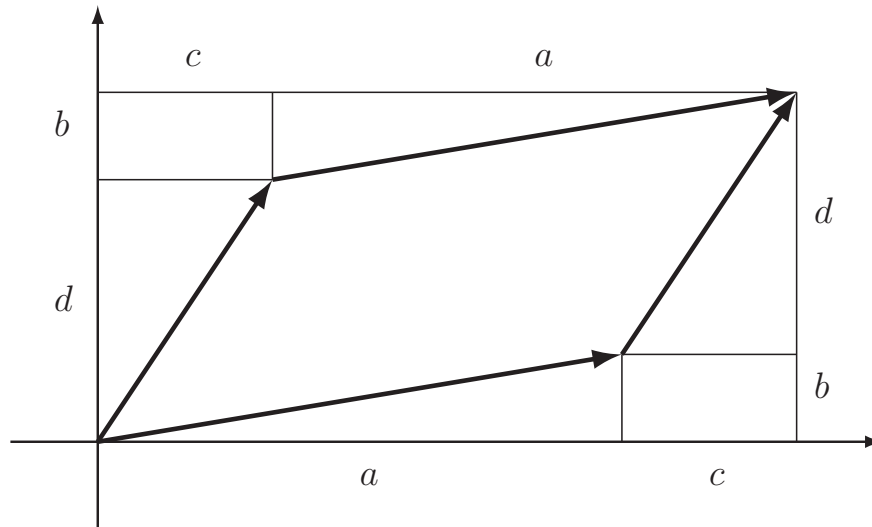
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{7}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{7}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{2}{7}$$

Offenbar kann die Cramersche Regel *nicht* für eine Matrix  $A$  mit  $\det A = 0$  angewendet werden, aber das ist auch klar, denn eine solche Matrix wäre nicht invertierbar, hätte also einen nicht-trivialen Kern und somit keine eindeutige Lösung.

Für ein homogenes Gleichungssystem  $Ax = 0$  mit  $\det A \neq 0$  wird kein solches Lösungsverfahren benötigt, da es nur *eine* Lösung geben kann und der Nullvektor selbst eine Lösung eines homogenen Gleichungssystems darstellt.

\* \* \*

**Determinanten und Volumina.** Im  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^m$  lassen sich mit der Determinantenfunktion Volumina von parallelogrammförmigen Mengen bestimmen. Wir führen diesen Sachverhalt am Beispiel der bekannten reellen Ebene  $\mathbb{R}^2$  vor:



Die Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  spannen ein Parallelogramm

$$F = \left\{ \lambda_0 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \mid 0 \leq \lambda_0, \lambda_1 \leq 1 \right\}$$

auf. Der Flächeninhalt  $|F|$  von  $F$  ergibt sich als Differenz des äußeren Rechtecks und der rechtwinkligen Dreiecke und Rechtecke zwischen äußerem Rechteck und Parallelogramm. Zur Vermeidung von Vorzeichenfragen nehmen wir an, dass  $a, b, c, d \geq 0$  sind, so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} |F| &= (a+c)(d+b) - \frac{1}{2}ab - cb - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ab - cb - \frac{1}{2}cd \\ &= ad + ab + cd + cb - ab - 2cb - cd = ad - cb = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Damit entspricht der Flächeninhalt des Parallelogramms wie gewünscht der Determinanten. (Insbesondere überlegt man sich leicht<sup>1</sup> mittels Geradengleichung der Diagonalen, dass in diesem Fall der Term  $ad - cb$  auch immer positiv ist.)

Diese Situation überträgt sich auf höhere Dimensionen.

**Definition 12.16.** Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Seien  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist

$$[a_1, \dots, a_m] = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

das von  $a_1, \dots, a_m$  aufgespannte Parallelogramm.

Der folgende Satz kann mit den Rechengesetzen für Determinanten gezeigt werden:

**Satz 12.17.** Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^m$ . Für  $j \leq m$  sei

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Dann ist das Volumen des von  $a_1, \dots, a_m$  aufgespannten Parallelogramms der Absolutbetrag von

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere gilt: Wenn  $a_1, \dots, a_m$  linear abhängig sind, so ist das Volumen gleich 0. In diesem Fall kollabiert das Parallelogramm zu einem Gebilde von Dimension echt kleiner als  $m$  und hat damit auch anschaulich das Volumen 0.

Den anfänglichen Zusammenhang über Flächeninhalt von Parallelogrammen und Determinanten werden wir im übernächsten Kapitel wieder aufgreifen.

\* \* \*

**Aufgabe 12.18.** Sei  $f$  ein Endomorphismus,  $f : V \rightarrow V$  für den gilt, dass jeder Vektor  $v \neq 0$  ein Eigenvektor ist. Zeigen Sie, dass dann  $f = c \cdot id_v$  gilt.

---

<sup>1</sup>Der Punkt  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  liegt über der Diagonalen des Parallelogramms, d.h. es gilt  $d \geq \frac{b+d}{a+c} \cdot c$ , wobei  $y = \frac{b+d}{a+c} \cdot x$  die Geradengleichung für die Diagonale durch die Punkte  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$  ist. Somit ist  $ad + cd \geq bc + dc$  und damit gilt wie gewünscht  $ad - bc \geq 0$ .

### 13. CHARAKTERISTISCHE POLYNOME & DIAGONALISIERBARKEIT

Nachdem wir nun wissen, wie wir Determinanten berechnen können, kommen wir zurück zum eigentlichen Thema: die Bestimmung der Eigenwerte einer gegebenen Matrix.

**Definition 13.1.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ . Dann definiere das charakteristische Polynom von  $A$  als

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_m) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,m} \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} - \lambda \end{vmatrix}$$

**Beispiel 13.2.** Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Das charakteristische Polynom von  $A$  ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{Entwicklung nach erster Spalte} \\ &= (1 - \lambda)((-1 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) - 1) = (1 - \lambda)(1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1) \\ &= (1 - \lambda)(2\lambda + \lambda^2) = (1 - \lambda)\lambda(2 + \lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom hier im Beispiel ist also ein Polynom dritten Grades in der Variable  $\lambda$ . Aus der vorletzten Zeile in der Gleichungskette kann man die Nullstellen ablesen, nämlich  $-2, 0, 1$ .

Ganz allgemein sieht man, dass das charakteristische Polynom aus den Summanden der Gestalt  $c \cdot \lambda^i$  besteht mit Koeffizienten  $c \in \mathbb{K}$  und  $i \leq m$ . Die höchste Potenz von  $\lambda$  erscheint nur in dem Summanden  $(-1)^m \lambda^m$  als Produkt der Hauptdiagonalen. Insbesondere gilt der folgende

**Satz 13.3.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sei  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{K})$ . Dann ist das charakteristische Polynom von  $A$  von der Gestalt

$$p_A(\lambda) = (-1)^m \lambda^m + c_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0.$$

Die Existenz von Nullstellen derartiger Polynome hängt allerdings vom Körper  $\mathbb{K}$  ab. Wenn  $\mathbb{K}$  der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ist, so hat  $p_A(\lambda)$  nach dem Fundamentalsatz der Algebra immer eine Nullstelle und somit hat ein Polynom über  $\mathbb{C}$

vom Grade  $m$  auch immer  $m$  (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen (das heißt, die Vielfachen werden mitgezählt).

Mit dem folgenden Satz sind wir schließlich am Ziel unserer Betrachtungen:

**Satz 13.4.** *Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus eines  $m$ -dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Sei  $B$  eine Basis von  $V$  und  $A = \text{DM}_B(f)$ . Dann gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ :  $\lambda$  ist genau dann ein Eigenwert von  $f$ , wenn  $p_A(\lambda) = 0$ .*

*Beweis:* Betrachte  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- $\lambda$  ist Eigenwert von  $f$
- $\iff \text{Kern}(f - \lambda \text{Id}_V) \neq \{0\}$
- $\iff \dim \text{Kern}(f - \lambda \text{Id}_V) > 0$
- $\iff \text{Rg}(f - \lambda \text{Id}_V) < m$
- $\iff f - \lambda \text{Id}_V$  ist nicht invertierbar
- $\iff \text{DM}_B(f - \lambda \text{Id}_V) = \text{DM}_B(f) - \lambda \text{DM}_B(\text{Id}_V) = A - \lambda E_m$  ist nicht invertierbar
- $\iff p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_m) = 0$  (nach Satz 12.10)

□

**Beispiel 13.5.** Wir setzen das Beispiel 13.2 fort: Wir haben bereits gesehen, dass die

Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  die Skalare  $-2, 0$

und  $1$  sind. Nach Satz 13.4 sind dies die Eigenwerte von  $A$ . Wir bestimmen jetzt die zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0:$$

$\lambda_1 = -2$  Betrachte  $A - (-2)E_3 = A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Durch den Gauß-Algorithmus

erhalten wir:  $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , das heißt  $z$  ist beliebig wählbar, damit:  $y = -z$

und  $3x = -y$ , das heißt  $x = -\frac{1}{3}y = \frac{1}{3}z$ . Wähle  $z = 3$  und wir erhalten den

Eigenvektor  $u_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_2 = 0$  Betrachte  $A - 0 \cdot E_3 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Durch den Gauß-Algorithmus er-

halten wir:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , das heißt  $z$  ist beliebig wählbar, damit:  $y = z$  und

$x = -y = -z$ . Wir erhalten den Eigenvektor  $u_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$\lambda_3 = 1$  Betrachte  $A - 1 \cdot E_3 = A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Durch den Gauß-Algorithmus

erhalten wir:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , das heißt  $x$  ist beliebig wählbar und

es gilt:  $y = 0$  und  $z = 0$ . Wir erhalten den Eigenvektor  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Das System  $C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ , die nur aus Eigenvektoren

besteht. Die Transformationsmatrix  $T_B^C$ , für  $B$  die kanonische Basis, ist:

$$T_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix  $T_C^B$  erhalten wir durch Invertieren von  $T_B^C$ :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rightsquigarrow & \dots & \rightsquigarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

das heißt:  $T_C^B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Die darstellende Matrix von  $A$  bezüglich der Basis aus Eigenvektoren hat dann Diagonalform:

$$DM_C(A) = T_C^B \cdot A \cdot T_B^C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass wie erwartet in  $\text{DM}_C(A)$  die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen.

\*   \*   \*

**Diagonalisieren an Beispielen.** Jetzt sind wir in der Lage ein vollständiges Verfahren in Einzelschritten zum Diagonalisieren einer Matrix  $A$  bzw. eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  anzugeben.

**Algorithmus zur Diagonalisierung**

- (0) Wählen einer Basis  $B$  von  $V$  und Darstellung des Endomorphismus  $f$  als  $A = \text{DM}_B(f)$ .
- (1) Bestimmen des charakteristischen Polynoms der Matrix  $A$  (und somit auch des Endomorphismus  $f$ ).
- (2) **Abbruchkriterium I:**  
Zerfällt das charakteristische Polynom nicht in Linearfaktoren, so ist die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar.
- (3) Berechne für Eigenwerte (also Nullstellen des charakteristischen Polynoms) eine maximale Anzahl von linear unabhängigen Eigenvektoren im dazugehörigen Eigenraum (das heißt bestimme eine Basis des Eigenraums).
- (4) **Abbruchkriterium II:**  
Wenn diese gerade berechnete maximale Anzahl für einen  $k$ -fachen Eigenwert nicht gleich  $k$  ist, so ist die Matrix  $A$  nicht diagonalisierbar (Im anderen Fall haben wir jeweils eine hinreichend große Basis der Eigenräume gefunden!).
- (5) Wenn wir alle in Schritt (3) berechneten Basen für die verschiedenen Eigenräume zusammen in eine Menge schreiben, haben wir die gewünschte Basis aus Eigenvektoren gefunden, bezüglich der die Matrix  $A$  Diagonalgestalt hat.
- (6) Schreibe nacheinander für jeden Eigenwert die in Schritt (3) bestimmte Basis spaltenweise in eine Matrix: Das Ergebnis ist die gesuchte Transformationsmatrix, die die Ausgangsmatrix  $A$  in eine Diagonalgestalt überführt.

Die Stelligkeit eines Eigenwerts als Nullstelle innerhalb des dazugehörigen charakteristischen Polynoms bezeichnet man als seine *algebraische Vielfachheit*. Dagegen bezeichnet man die Dimension des Eigenraums eines Eigenwerts als seine *geometrische Vielfachheit*. Die geometrischen Vielfachheiten haben wir bereits in Definition 11.9 eingeführt. Nach den Überlegungen rund um den Satz 11.12 wissen wir bereits, dass die geometrischen Vielfachheiten höchstens gleich der algebraischen, mindestens jedoch positiv sein müssen, d.h. es gilt:

$$1 \leq \text{geometrische\_Vielfachheit}(\lambda) \leq \text{algebraische\_Vielfachheit}(\lambda).$$

\* \* \*

Bisher haben wir den Begriff des charakteristischen Polynoms nur für Matrizen (also speziellen linearen Abbildungen) definiert. Um diesen nun auch für beliebige Endomorphismen betrachten zu können, ist es wichtig, dass verschiedene Darstellungen nicht zu verschiedenen Polynomen führen. Dies ist insbesondere wichtig, wenn wir die Eigenwerte als Nullstellen der charakteristischen Polynome betrachten, denn dies darf dann nicht von der gewählten Basis in der Darstellung abhängen. Dies garantiert uns das nächste

**Lemma 13.6.** *Sei  $f$  ein Endomorphismus über dem Vektorraum  $V$  und  $B, C$  zwei Basen von  $V$ . Dann gilt:  $p_{\text{DM}_B(f)}(\lambda) = p_{\text{DM}_C(f)}(\lambda)$ .*

*Beweis:* Es gilt:

$$\begin{aligned} p_{\text{DM}_B(f)}(\lambda) &= \det(\text{DM}_B(f) - \lambda E_n) \\ &= \det((T_C^B)^{-1} \cdot \text{DM}_C(f) \cdot T_C^B - \lambda \cdot (T_C^B)^{-1} \cdot T_C^B) \\ &= \det((T_C^B)^{-1} \cdot (\text{DM}_C(f) - \lambda \cdot E_n) \cdot T_C^B) \\ &= \det((T_C^B)^{-1}) \cdot \det(\text{DM}_C(f) - \lambda \cdot E_n) \cdot \det(T_C^B) \\ &= \underbrace{\det((T_C^B)^{-1}) \cdot \det(T_C^B)}_{=1} \cdot \det(\text{DM}_C(f) - \lambda \cdot E_n) \\ &= \det(\text{DM}_C(f) - \lambda \cdot E_n) \\ &= p_{\text{DM}_C(f)}(\lambda) \end{aligned}$$

wobei wir oben noch das Lemma 12.14 in der folgenden Form angewendet haben:

$$1 = \det(E_n) = \det((T_C^B)^{-1} \cdot T_C^B) = \det((T_C^B)^{-1}) \cdot \det(T_C^B).$$

☒

\* \* \*

**MEGA-Beispiel zur Diagonalisierbarkeit.** Wir gehen nun anhand von vier Beispielen alle möglichen Fälle langsam durch, wobei wir nicht jeden Einzelschritt im Detail für alle Unterfälle durchrechnen werden:

Betrachte die folgenden Matrizen aus  $\text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und den Endomorphismus}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ gegeben durch } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 + 8x_3 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

**Zu (0)** Die ersten drei Endomorphismen haben wir bereits in Matrixform  $A_i$  gegeben. Für den vierten Endomorphismus bestimmen wir  $\text{DM}_K(f)$  bezüglich der kanonischen Basis  $K$  des  $\mathbb{R}^3$ :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Daraus ergibt sich}$$

$$A_4 := \text{DM}_K(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Zu (1)**

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{A_2}(\lambda) &= \det(A_2 - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$p_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$p_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & 8 \\ -4 & 7 - \lambda & 4 \\ 8 & 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-9 - \lambda)(9 - \lambda)^2$$

**Zu (2)** Matrix  $\mathbf{A}_1$  besteht den Test nicht, da  $(\lambda^2 + 1)$  über  $\mathbb{R}$  nicht weiter zerfällt. Die anderen drei Matrizen bleiben im Rennen.

**Zu (3)** Für die verbleibenden Matrizen berechnen wir jeweils die Dimension der jeweiligen Eigenräume:

Die Matrix  $\mathbf{A}_2$  hat die Eigenwerte  $-1$  (mit algebraischer Vielfachheit 1) und  $1$  (mit algebraischer Vielfachheit 2).

**$\lambda_1 = -1$ :** Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_2 + 1 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

**$\lambda_2 = 1$ :** Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_2 - 1 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

Die Matrix  $\mathbf{A}_3$  hat die Eigenwerte  $1$ ,  $2$  und  $3$  (jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1).

**$\lambda_1 = 1$ :** Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_3 - 1 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

**$\lambda_2 = 2$ :** Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_3 - 2 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

**$\lambda_3 = 3$ :** Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_3 - 3 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

Die Matrix  $\mathbf{A}_4$  hat die Eigenwerte  $-9$  (mit algebraischer Vielfachheit 1) und  $9$  (mit algebraischer Vielfachheit 2).

$\lambda_1 = -9$ : Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_4 + 9 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -4 & 16 & 4 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Der Vektor } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ bildet eine Basis des}$$

Eigenraums.

$\lambda_2 = 9$ : Löse das homogene lineare Gleichungssystem

$$(A_4 - 9 \cdot E_3)x = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot x = 0. \text{ Die Vektoren } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ bilden}$$

eine Basis des Eigenraumes.

**Zu (4)** Die Matrix  $A_2$  besteht den Test nicht, denn der zweifache Eigenwert  $\lambda = 1$  besitzt nur einen eindimensionalen Eigenraum mit Basisvektor  $(0 \ 1 \ 0)$ . Die Matrizen  $A_3$  und  $A_4$  bestehen den Test.

**Zu (5)** Für  $A_3$  haben wir  $C_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Für  $A_4$  haben wir  $C_4 = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

**Zu (6)** In  $C_3$  und  $C_4$  sind die Vektoren bezüglich der kanonischen Basis gegeben.

Wir definieren  $T_3 := T_K^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $T_4 := T_K^{C_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Damit erhalten wir wie gewünscht:

$$\begin{aligned} T_3^{-1} \cdot A_3 \cdot T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4^{-1} \cdot A_4 \cdot T_4 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Gut gemeinter Hinweis:* Nutzen Sie diese Beispiele und füllen Sie die Lücken, indem Sie Details durchrechnen. Dies übt und bereitet Sie auf die Klausur vor!

**Beispiel 13.7.** Betrachten Sie die folgende Matrix und lassen sich *nicht* von den darin enthaltenen Parametern  $a$  und  $b$  abschrecken:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir überlegen uns, unter welchen Bedingungen diese Matrix diagonalisierbar ist.

Dazu untersuchen wir die Matrix  $A$  nach der gegebenen Prozedur und berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 & 0 \\ 2a & b - \lambda & a \\ 10 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (-3 - \lambda)(b - \lambda)(2 - \lambda).$$

Somit sehen wir sofort, dass die Matrix für  $b \neq -3$  und  $b \neq 2$  schon einmal diagonalisierbar sein muss, denn in diesem Fall hätten wir drei verschiedene Eigenwerte. Aber vielleicht gibt es auch noch zusätzliche Möglichkeiten für diese beiden Ausschlussfälle, die wir uns gesondert überlegen müssen:

**Fall  $b = -3$ :** In diesem Fall gilt  $p_A(\lambda) = (-3 - \lambda)^2 \cdot (2 - \lambda)$  und wir müssen den Eigenraum zum (doppelten) Eigenwert  $\lambda = -3$  untersuchen:

Betrachte also  $E(-3) = \text{Kern}(A + 3E_3)$  für  $b = -3$  und bestimme die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{Gauß-Algorithmus} \cdots \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Dimension des Eigenraums wünschenswert gleich 2 und die Matrix ist für den Fall  $b = -3$  diagonalisierbar.

**Fall  $b = 2$ :** In diesem Fall gilt  $p_A(\lambda) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda)^2$  und wir müssen den Eigenraum zum (doppelten) Eigenwert  $\lambda = 2$  untersuchen:

Betrachte also  $E(2) = \text{Kern}(A - 2E_3)$  für  $b = 2$  und bestimme die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{Gauß-Algorithmus} \cdots \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Dimension des Eigenraums genau dann gleich 2, wenn  $a = 0$  gilt. Somit ist die Matrix für den Fall  $b = 2$  nur für  $a = 0$  diagonalisierbar.

Zusammenfassend können wir festhalten: Die Matrix  $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn  $b \neq 2$  oder  $a = 0$  ist. War also gar nicht so schwer.

Hiermit sind wir dann auch am Ende der Betrachtungen rund um das Diagonalisieren angekommen. Sie sehen, dass wir für diesen Zweck das gesamte Wissen der bisherigen Vorlesung benötigen.

\*   \*   \*

Einschiebend bringen wir noch ein kleines (analytisches) Beispiel aus der Welt der Zahlenfolgen. Die Theorie des Diagonalisierens kann hier helfen, explizite Darstellungen zu finden.

**Beispiel 13.8. Fibonacci-Zahlen.** Bei den Fibonacci-Zahlen handelt es sich um eine sehr wichtige rekursiv definierte Zahlenfolge  $(f_i)_{i=1\dots n}$ , die Sie vielleicht aus der Analysis kennen. Man definiert diese Folge dadurch, dass man immer die zwei letzten Folgenglieder addiert, um das nächste Folgenglied zu erhalten:

$$f_0 := 0 \quad f_1 := 1 \quad f_2 := 1 \quad f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$$

Dieses Wachstumsverhältnis für die  $f_i$  fassen wir jetzt in Matrixschreibweise wie folgt zusammen:

$$A := \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese rekursive Berechnung der Fibonacci-Zahlen kann sehr aufwendig sein und wir sind daher an einer expliziten Formel interessiert, die uns die  $(n+1)$ -te Fibonacci-Zahl liefert, ohne alle vorherigen Fibonacci-Zahlen ausrechnen zu müssen.

Wir gehen dazu wie folgt vor – es gilt:

$$\begin{pmatrix} f_{(n+1)+2} & f_{(n+1)+1} \\ f_{(n+1)+1} & f_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} + f_{n+1} & f_{n+2} \\ f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{(n)+2} & f_{(n)+1} \\ f_{(n)+1} & f_{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+2}$$

Der Trick besteht jetzt darin, den letzten Ausdruck mithilfe unserer Diagonalisierungskenntnisse auszurechnen – es gilt:

$$p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 1$$

mit den beiden Nullstellen  $\alpha := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$  und  $\beta := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Jetzt wissen wir auch schon automatisch, dass die Matrix diagonalisierbar ist und rechnen die Eigenvektoren aus.

Das  $\alpha$  berechnet man wie folgt:

$$\text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \right) = \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \right) = \left\{ v \mid v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und für  $\beta$  gilt:

$$\text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \right) = \text{Kern} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \right) = \left\{ v \mid v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir können nun einen Basiswechsel vollziehen und erhalten folgenden Zusammenhang:

$$A = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

daraus folgt speziell:

$$A^{n+2} = \left( T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} T^{-1} \right)^{n+2} = T \begin{pmatrix} \alpha^{n+2} & 0 \\ 0 & \beta^{n+2} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{n+2} & 0 \\ 0 & \beta^{n+2} \end{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -\frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen des Matrixprodukts liefert uns nun insgesamt:

$$A^{n+2} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^{n+2}}{\beta} & -\alpha^{n+2} \\ -\frac{\beta^{n+2}}{\alpha} & \beta^{n+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^{n+2}}{\beta} + \frac{\beta^{n+2}}{\alpha} & \alpha^{n+2} - \beta^{n+2} \\ \frac{\beta^{n+1}}{\alpha} - \frac{\alpha^{n+1}}{\beta} & \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$$

Zum Schluss können wir schließlich den Wert von  $f_{n+1}$  aus dieser Matrix direkt ablesen und erhalten das gesuchte Ergebnis, nämlich eine explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen:

$$f_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

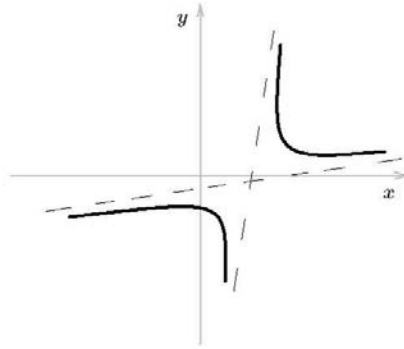
\* \* \*

**Ausblick Hauptachsentransformation.** Abschließend möchte ich Ihnen noch einen kleinen Ausblick geben, was noch alles möglich ist, wir aber an dieser Stelle zeitlich nicht leisten können.

In der Mathematik spricht man bei Basiswechseln auch häufig von *Hauptachsentransformationen*. Stellen Sie sich vor, Sie betrachten Punkte in der Ebene durch Angabe (nichtlinearer) Gleichungen, wie beispielsweise der folgenden:

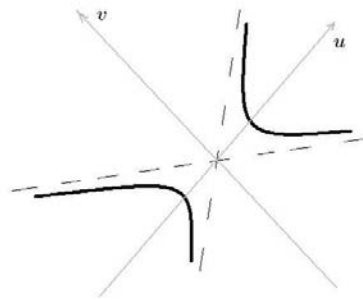
$$-\frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 + 25xy + 30\sqrt{2}x - 66\sqrt{2}y = 256$$

Diese beschriebene Punktmenge der Ebene stellt eine Kurve dar. Genauer ausgedrückt handelt es sich um eine Hyperbel und im gewohnten  $x-y$ -Koordinatensystem hat sie etwa die Gestalt:



Wenn Sie jetzt Ihren Blickwinkel ändern, das heißt, das Koordinatensystem stauchen, strecken, verschieben und drehen, dann können Sie diese Kurve in einem besseren Licht darstellen; anders ausgedrückt wird die Darstellung dieser Kurve mit einfacheren Mitteln möglich.

Betrachten Sie dazu die Abbildung (und drehen Sie Ihren Kopf um 45 Grad nach links):



Mithilfe der Eigenwerttheorie ist es möglich, in diesem Fall von der kanonischen Basis zur Basis  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  zu kommen. Unter dieser Hauptachse, die ich jetzt nicht mehr  $x$  und  $y$ , sondern  $u$  und  $v$  nenne, hat die Kurve die Gestalt:

$$9u^2 - 16v^2 = 144$$

Das ist offenbar eine gravierende Vereinfachung der Darstellung. Dies war durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs bei gleichzeitiger Drehung um 45 Grad des gesamten Koordinatensystems möglich.

\* \* \*

**Aufgabe 13.9.** Finden Sie einen Endomorphismus  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , für den  $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2$  gilt. Kann man für jedes Polynom

$$p(\lambda) = \pm\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

einen Endomorphismus  $f$  finden, so dass  $p_A(\lambda) = p(\lambda)$  gilt?

## 14. EUKLIDISCHE VEKTORRÄUME

Nach dem langen Weg bis einschließlich zum letzten Kapitel mit dem Höhepunkt des Algorithmus zum Diagonalisieren von Endomorphismen, schlagen wir nun eine neue Richtung unserer Betrachtungen ein.

In vielen Anwendungen besitzen die betrachteten Vektorräume zusätzliche Struktur, die wir zu unserem Vorteil ausnutzen können. Bei reellen Vektorräumen, das heißt bei Vektorräumen zum Grundkörper  $\mathbb{R}$ , sind besonders die so genannten *Skalarprodukte* interessant, mit denen sich dann geometrischen Begriffe wie Abstand, Winkel oder Orthogonalität definieren lassen.

\*   \*   \*

**Geometrische Begriffe in der reellen Ebene.** Wir können dieses Prinzip erneut am Beispiel der wohlbekannten reellen Ebene motivieren. Im Folgenden werden wir die bekannten Begriffe wie Abstand, Winkel oder Orthogonalität aus einem (scheinbar) neuen, speziell definiertem Produkt von zwei Vektoren schrittweise herleiten. Wir starten mit der ersten

**Definition 14.1.** Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  gegeben. Definiere eine zweistellige Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{st} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  durch

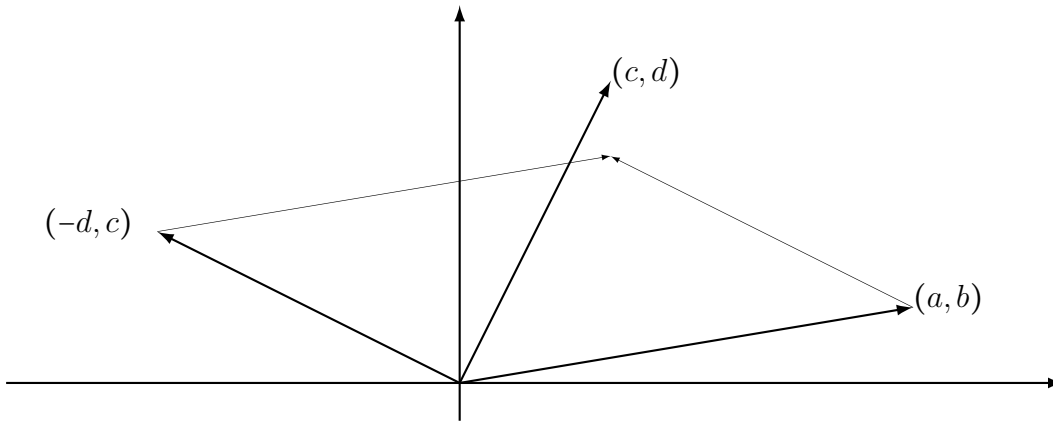
$$\langle x, y \rangle^{st} := \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\rangle^{st} := x_1 y_1 + \dots + x_m y_m.$$

Die Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle^{st}$  heißt das **Standard-Skalarprodukt** auf dem  $\mathbb{R}^m$ .

Es gilt nun in der reellen Ebene:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle^{st} = ac + bd = \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = \pm \text{Flächeninhalt} \left( \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right] \right)$$

Dies ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$  aufgespannt wird, wie wir dies bereits im Vorfeld des Satzes 12.17 gesehen haben. Es gilt dabei, dass  $\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$  der um  $\frac{\pi}{2}$  gedrehte Vektor  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  ist.



Mithilfe dieser Überlegung können wir schließlich die gewünschten Begriffe herleiten. Wie wir wissen, lässt sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms bereits aus bekannten trigonometrischen Zusammenhängen berechnen:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt} \left( \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right] \right) &= \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \cdot \sin \angle \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \cdot \sin \left( \angle \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \cdot \cos \angle \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Im Spezialfall, dass  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  ist, erhalten wir dann

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}} = \text{Länge}^2 \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$$

und somit können wir den Begriff *Länge* aus dem Skalarprodukt ableiten:

$$\text{Länge}(a, b) = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}}}$$

Darüber hinaus kann man auch den Begriff des *Winkels* zwischen den beiden Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  bestimmen mit:

$$\cos \angle \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}}}{\text{Länge} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) \cdot \text{Länge} \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}}}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}}} \cdot \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}}}$$

Mithilfe des Winkels lässt sich dann natürlich auch der Begriff der Orthogonalität ableiten, in dem man nach einem eingeschlossenen rechten Winkel fragt.

\* \* \*

**Skalarprodukte.** Dieses Prinzip der Herleitung der verschiedenen geometrischen Begriffe motiviert uns, dies auch für allgemeine Räume machen zu können. Wir charakterisieren daher allgemein über zu erfüllende Axiome einen Begriff von Skalarprodukt und arbeiten uns langsam vor:

**Definition 14.2.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt, wenn die folgenden Axiome gelten:

(a)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist linear im ersten Argument: Für alle  $x, x', y \in V$  und  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  ist

$$\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle.$$

(b)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist linear im zweiten Argument: Für alle  $x, y, y' \in V$  und  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  ist

$$\langle x, \lambda y + \lambda' y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x, y' \rangle.$$

(c)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist symmetrisch: Für alle  $x, y \in V$  ist

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle.$$

(d)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist positiv definit: Für alle  $x \in V \setminus \{0\}$  ist

$$\langle x, x \rangle > 0.$$

Achtung: Das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  darf nicht mit der Skalarmultiplikation  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ;  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  verwechselt werden. Die Operationen unterscheiden sich bereits in Bezug auf die Definitions- und Wertebereiche.

Wir sehen sofort, dass das zunächst spezielle Standard-Skalarprodukt auch dieser allgemeinen Charakterisierung entspricht:

**Bemerkung 14.3.** Das Standard-Skalarprodukt auf  $V = \mathbb{R}^m$  ist ein Skalarprodukt im Sinne der Definition 14.2

Schließlich können wir den Bogen zur Überschrift spannen:

**Definition 14.4.** Ein euklidischer Vektorraum ist ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , das aus einem reellen Vektorraum  $V$  und einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  besteht.

Wie beweisen einige Eigenschaften von Skalarprodukten:

**Satz 14.5.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt:

- (a) Für alle  $x \in V$  ist  $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$ .
- (b) Für alle  $x \in V$  ist  $\langle x, x \rangle = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .

*Beweis:*

Zu (a): Aus der Linearität von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  folgt:  $\langle x, 0 \rangle = \langle x, 0 \cdot 0 \rangle = 0 \cdot \langle x, 0 \rangle = 0$ . Aus der Symmetrie von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  folgt auch:  $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle$ .

Achtung – Eigentlich steht hier:  $\langle x, 0_V \rangle = \langle x, 0_{\mathbb{R}} \cdot 0_V \rangle = 0_{\mathbb{R}} \cdot \langle x, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ .

Zu (b): Aus (a) und der Eigenschaft (d) aus der Definition 14.2 (positive Definitheit) ist die Äquivalenz klar.

☒

\* \* \*

**Normen.** Wir führen als Nächstes allgemein den Begriff der Länge ein, den wir an dieser Stelle allerdings anders bezeichnen:

**Definition 14.6.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum. Die Norm auf  $V$  ist die Funktion

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad \|x\| := +\sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Diese Definition entspricht gerade der gesehenen Erfahrung im  $\mathbb{R}^2$ . Wir werden allerdings auch allgemein zeigen, dass eine aus einem Skalarprodukt definierte Norm die Grundeigenschaft einer "Längenfunktion" besitzt. Zunächst dazu eine wichtige und hilfreiche Ungleichung:

**Satz 14.7.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $x, y \in V$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Beweis:* Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \langle y, y \rangle \cdot x - \langle y, x \rangle \cdot y, \langle y, y \rangle \cdot x - \langle y, x \rangle \cdot y \rangle \quad (\text{pos. Definitheit}) \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \underbrace{\langle y, x \rangle \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle y, x \rangle^2 \langle y, y \rangle}_{=0} \\ &= \langle y, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \langle y, x \rangle^2 \end{aligned}$$

Fall 1:  $y = 0$  Dann gilt nach Satz 14.5(a) offenbar

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, 0 \rangle| = 0 \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Fall 2:  $y \neq 0$  Dann ist  $\langle y, y \rangle > 0$  und wir können die obige Ungleichung durch  $\langle y, y \rangle$  dividieren und auf beiden Seiten die positive Quadratwurzel ziehen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle^2 \\ \langle y, x \rangle^2 &\leq \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \\ |\langle y, x \rangle| &\leq \sqrt{\langle y, y \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|y\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

□

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung folgt für das Standard-Skalarprodukt auch aus den anfänglichen geometrischen Überlegungen, denn  $|\langle x, y \rangle|$  ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit den Seitenlängen  $\|x\|$  und  $\|y\|$ , also ist  $|\langle x, y \rangle|$  höchstens gleich  $\|x\| \cdot \|y\|$ , denn

$$\pm \langle x, y \rangle = \text{Flächeninhalt}(a, b) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(x, y).$$

Der Kosinus ist vom Betrag her höchstens 1.

Mittels Satz 14.7 können wir nun grundlegende Längeneigenschaften der Norm nachweisen.

**Satz 14.8.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$ . Dann gilt:

- (a) Für alle  $x \in V$  ist  $\|x\| \geq 0$ .
- (b) Für alle  $x \in V$  ist  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ .
- (c) Für alle  $x \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .
- (d) Für alle  $x, y \in V$  gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

*Beweis:*

Zu (a): Betrachte  $x \in V$ . Dann gilt:  $\langle x, x \rangle \geq 0$  und  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ .

Zu (b): Klar, nach Satz 14.5(b).

Zu (c): Betrachte  $x \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \langle x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

Zu (d): Betrachte  $x, y \in V$ . Dann ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus Satz 14.7:

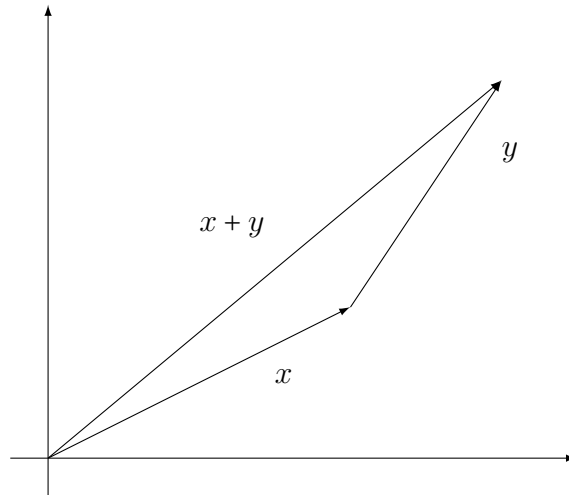
$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\geq \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x + y\|^2 \end{aligned}$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die positive Quadratwurzel, so erhalten wir wie gewünscht:  $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$ .

☐

Die Dreiecksungleichung entspricht der Tatsache, dass eine Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte darstellt. Für das von den Punkten  $0, x, x + y$  gebildete Dreieck ist die Seite von  $0$  nach  $x + y$  kürzer als die Summe der Längen der Seiten von  $0$  nach  $x$  und der Seite von  $x$  nach  $x + y$ , diese Längen sind  $\|x + y\|$ ,  $\|x\|$  und  $\|y\|$ , sodass gilt:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$



\* \* \*

**Orthogonalität.** Zwei Vektoren sind in besonderem Maße linear unabhängig, wenn sie orthogonal zueinander stehen. Geometrisch bedeutet dies, dass sie einen Winkel von  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  bilden. Im Sinne unserer anfänglichen Überlegungen zu euklidischen Vektorräumen können wir allgemein definieren:

**Definition 14.9.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $x, y \in V \setminus \{0\}$ . Der Öffnungswinkel  $\alpha(x, y)$  zwischen  $x$  und  $y$  ist definiert durch

$$\cos(\alpha(x, y)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}; \quad 0 \leq \alpha(x, y) \leq \pi.$$

Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus Satz 14.7 ist

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

und somit ist der Kosinus des Öffnungswinkels wohldefiniert.

Anschaulich liegen zwei Vektoren orthogonal, wenn sie einen Öffnungswinkel von  $\frac{\pi}{2}$  einschließen. Hierfür ist notwendig, dass  $\cos(\alpha(x, y)) = \cos(\frac{\pi}{2})$  und somit  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Definition 14.10.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $x, y \in V$ . Die Vektoren  $x, y$  heißen *orthogonal* oder *senkrecht* zueinander (kurz  $x \perp y$ ), wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Beispiel 14.11.** Eine Drehung des  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  wird durch die Drehmatrix  $D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dargestellt. Eine Drehung des Vektors  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  führt zu dem Vektor

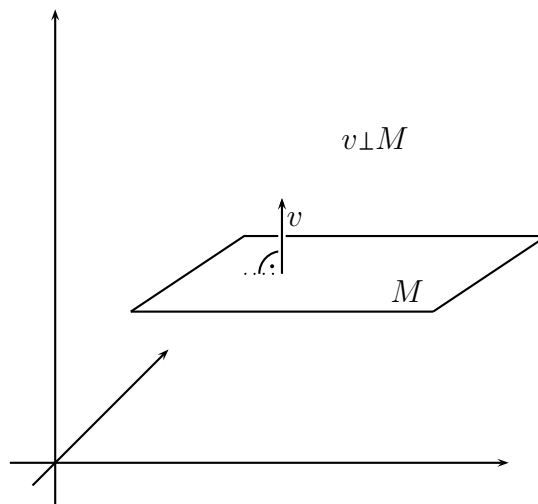
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind dann auch orthogonal zueinander, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle^{\text{st}} = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0.$$

**Definition 14.12.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $M \subseteq V$  eine Teilmenge von  $V$ . Ein Vektor  $v \in V$  liegt *senkrecht* zu  $M$ , geschrieben  $v \perp M$ , falls für alle  $w \in M$  gilt:  $v \perp w$ . Das *orthogonale Komplement* von  $M$  ist die Menge

$$M^\perp := \{v \in V \mid v \perp M\}$$



**Satz 14.13.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $M \subseteq V$ . Dann gilt:

- (a)  $M^\perp$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .
- (b)  $M^\perp \cap M \subseteq \{0\}$ .

*Beweis:*

Zu (a): Wir überprüfen die Bedingungen aus der Definition eines Untervektorraums:

- (i)  $0 \perp M$  und damit ist  $0 \in M^\perp$  und somit  $M^\perp \neq \emptyset$ .
- (ii) Betrachte  $x, y \in M^\perp$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Betrachte  $z \in M$ . Dann ist

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 + 0 = 0$$

und

$$\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle = \lambda 0 = 0.$$

Damit sind  $x + y \in M^\perp$  und  $\lambda x \in M^\perp$ .

Zu (b): Betrachte  $x \in M^\perp \cap M$ . Jedes Element von  $M^\perp$  ist senkrecht zu allen Elementen von  $M$ . Daher ist  $x \perp x$ , sowie  $\langle x, x \rangle = 0$  und somit  $x = 0$  nach Satz 14.5 Teil (b).

□

\* \* \*

**Orthonormalsysteme.** Die kanonische Basis  $(e_1, \dots, e_m)$  des euklidischen Vektorraums  $\mathbb{R}^m$  mit dem Standard-Skalarprodukt hat die Eigenschaft, dass

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Verschiedene Vektoren der Basis sind orthogonal und jeder Basisvektor ist auf die Länge  $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$  normiert. Diese Eigenschaft ist sehr nützlich und lässt sich wie folgt verallgemeinern:

**Definition 14.14.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum mit den Vektoren  $v_1, \dots, v_r \in V$ . Das  $r$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_r)$  ist *orthonormal* oder ein *Orthonormalsystem*, wenn für  $i, j \leq r$  gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Orthonormale Vektoren sind immer linear unabhängig, wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 14.15.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  ein Orthonormalsystem in  $V$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig.

*Beweis:* Betrachte  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ . Betrachte  $i \leq r$ . Die Anwendung des Skalarproduktes mit  $v_i$  auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, v_i \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \lambda_r \langle v_r, v_i \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i \end{aligned}$$

Damit ist für alle  $i \leq r$  der  $i$ -te Koeffizient  $\lambda_i = 0$ . Damit ist  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig.  $\square$

Besonders wichtig ist, dass sich Koordinatendarstellungen bezüglich orthonormaler Basen durch Anwendung des Skalarproduktes ausrechnen lassen.

**Satz 14.16.** *Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_m)$  eine orthonormale Basis von  $V$ . Sei weiterhin  $v \in V$  gegeben. Dann ist*

$$(\langle v, v_1 \rangle, \dots, \langle v, v_m \rangle)$$

die Koordinatendarstellung des Vektors  $v$  in der Basis  $(v_1, \dots, v_m)$ , das heißt

$$v = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Diese Summenformel in der Variablen  $v$  ist die **Entwicklungsformel** nach der Basis  $(v_1, \dots, v_m)$ .

*Beweis:* Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  die eindeutig bestimmte Koordinatendarstellung des Vektors  $v$  bezüglich der Basis  $(v_1, \dots, v_m)$ , d.h. es gilt:

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i.$$

Betrachte ein beliebiges  $j \leq m$ . Multiplikation der Gleichung mit  $v_j$  ergibt dann:

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = \lambda_j$$

$\square$

Diese letzte Eigenschaft können wir ausnutzen, um Orthonormalbasen zu erzeugen. Das so genannte Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren hilft dabei algorithmisch wie folgt:

**Satz 14.17** (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren). *Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig in  $V$ . Für  $k \leq r$  definiere rekursiv*

$$\tilde{v}_k = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i}{\|v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i\|}$$

Dann gilt für  $s \leq r$ , dass  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s)$  wohldefiniert und orthonormal ist und dass die linearen Hüllen gleich sind:

$$\mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s)$$

*Beweis:* Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über  $s \leq r$ .

Induktionsanfang: Für  $s = 0$  (und für  $s = 1$ ) gelten die Behauptungen trivialerweise.

Induktionsschritt: Angenommen, die Behauptungen gelten für  $s < r$ . Da  $(v_1, \dots, v_r)$  linear unabhängig ist, ist  $v_{s+1} \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s) = \mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s)$ . Damit ist offenbar  $v_{s+1} - \sum_{i=1}^s \langle v_{s+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i \neq 0$  und somit ist

$$\tilde{v}_{s+1} = \frac{v_{s+1} - \sum_{i=1}^s \langle v_{s+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i}{\|v_{s+1} - \sum_{i=1}^s \langle v_{s+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i\|}$$

wohldefiniert und von Norm 1. Zum Nachweis der Orthogonalität betrachte  $j \leq s$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{v}_j, v_{s+1} - \sum_{i=1}^s \langle v_{s+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i \right\rangle &= \langle \tilde{v}_j, v_{s+1} \rangle - \sum_{i=1}^s \langle v_{s+1}, \tilde{v}_i \rangle \langle \tilde{v}_j, \tilde{v}_i \rangle \\ &= \langle \tilde{v}_j, v_{s+1} \rangle - \langle v_{s+1}, \tilde{v}_j \rangle \langle \tilde{v}_j, \tilde{v}_j \rangle \\ &= \langle \tilde{v}_j, v_{s+1} \rangle - \langle v_{s+1}, \tilde{v}_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s\} \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s)$  und es gilt nach der obigen Darstellung  $\tilde{v}_{s+1} \in \mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, v_{s+1}) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s, v_{s+1})$ , so dass wir schließlich erhalten:  $\mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{v}_{s+1}) \subseteq \mathcal{L}(v_1, \dots, v_s, v_{s+1})$ .

Da man die definierende Gleichung für  $\tilde{v}_{s+1}$  auch nach  $v_{s+1}$  auflösen kann, gilt umgekehrt ebenfalls  $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq \mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s)$ , aber auch  $v_{s+1} \in \mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{v}_{s+1})$  und somit wie gewünscht  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_s, v_{s+1}) \subseteq \mathcal{L}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s, \tilde{v}_{s+1})$ .

Der Satz gilt damit nach dem Induktionsprinzip. □

Die Rekursionsvorschrift innerhalb des Satzes 14.17 ist im täglichen (mathematischen) Leben erträglich aufwendig, d.h. wir haben:

$$\begin{aligned} \boxed{\tilde{v}_1} &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ \boxed{\tilde{v}_2} &= \frac{v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle \cdot \tilde{v}_1}{\|v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle \cdot \tilde{v}_1\|} \\ \boxed{\tilde{v}_3} &= \frac{v_3 - \langle v_3, \tilde{v}_1 \rangle \cdot \tilde{v}_1 - \langle v_3, \tilde{v}_2 \rangle \cdot \tilde{v}_2}{\|v_3 - \langle v_3, \tilde{v}_1 \rangle \cdot \tilde{v}_1 - \langle v_3, \tilde{v}_2 \rangle \cdot \tilde{v}_2\|} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

**Beispiel 14.18.** Es seien die beiden Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  gegeben. Wir suchen die Orthonormalbasis nach dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren:

$$\begin{aligned} \boxed{\tilde{v}_1} &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v'_2 &= v_2 - \langle v_2, \tilde{v}_1 \rangle \cdot \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{(\sqrt{10})^2} \cdot 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4 \cdot 3}{5} \\ 2 - \frac{4 \cdot 1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\|v'_2\| &= \sqrt{\left\langle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{25} \cdot (4 + 36)} = \frac{\sqrt{4 \cdot 10}}{5} = \frac{2}{5} \sqrt{10} \\
\boxed{\tilde{v}_2} &= \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\frac{2}{5} \sqrt{10}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot 5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit haben wir unsere beiden Vektoren  $\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  im Orthonormalsystem nach Gram-Schmidt gefunden.

Diese sind offenbar orthogonal und jeweils normiert, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_1 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{(\sqrt{10})^2} \cdot (3^2 + 1^2) = 1 \\
\langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{(\sqrt{10})^2} \cdot ((-1)^2 + 3^2) = 1 \\
\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{(\sqrt{10})^2} \cdot (3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3) = 0
\end{aligned}$$

\* \* \*

**Orthogonale Zerlegungen und Projektionen.** Wir beschäftigen uns jetzt weiter mit dem bisher nur angerissenen Begriff des orthogonalen Komplements einer Menge von Vektoren und zeigen hierfür den

**Satz 14.19.** *Sei  $V = (\langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $M \subseteq V$  ein endlich-dimensionaler Unterraum von  $V$ . Sei  $w \in V$ . Dann existieren eindeutig bestimmte Vektoren  $u \in M$  und  $v \in M^\perp$ , so dass  $w = u + v$ . Diese Darstellung von  $w$  ist die Zerlegung des Vektors  $w$  nach  $M$  und seinem orthogonalen Komplement.*

*Beweis:* Wähle eine Basis  $(v_1, \dots, v_r)$  von  $M$ . Nach dem Orthonormalisierungssatz 14.17 können wir diese Basis zu einer orthonormalen Basis von  $M$  modifizieren. Daher können wir annehmen, dass  $(v_1, \dots, v_r)$  orthonormal ist. Setze

$$u := \sum_{i=1}^r \langle w, v_i \rangle v_i$$

und  $v := w - u$ . Dann ist  $u \in M$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $v \in M^\perp$  gilt. Betrachte dazu Basiselemente  $v_j$  von  $M$ :

$$\langle v, v_j \rangle = \langle w - u, v_j \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle w - \sum_{i=1}^r \langle w, v_i \rangle v_i, v_j \right\rangle \\
&= \langle w, v_j \rangle - \sum_{i=1}^r \langle w, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \langle w, v_j \rangle - \langle w, v_j \rangle \langle v_j, v_j \rangle \\
&= \langle w, v_j \rangle - \langle w, v_j \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit gilt für ein beliebiges Element  $\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \in M$  also

$$\left\langle v, \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^r \lambda_j \langle v, v_j \rangle = 0$$

Also ist wie gewünscht  $v \in M^\perp$ .

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachte zwei Zerlegungen  $w = u + v$  und  $w = u' + v'$  mit  $u, u' \in M$  und  $v, v' \in M^\perp$ . Dann ist

$$u + v = u' + v' \text{ und } u - u' = v' - v.$$

Es gilt  $u - u' \in M$  und  $v' - v \in M^\perp$ . Nach Satz 14.13 (b) ist  $M \cap M^\perp = \{0\}$  und somit gilt

$$u - u' = v' - v = 0.$$

Damit ist  $u = u'$  und  $v' = v$ . Die Aussage des Satzes ist damit bewiesen.  $\square$

Nach diesem Satz ist also folgende Zerlegung gegeben:

$$V = M + M^\perp = \{u + v \mid u \in M \text{ und } v \in M^\perp\}.$$

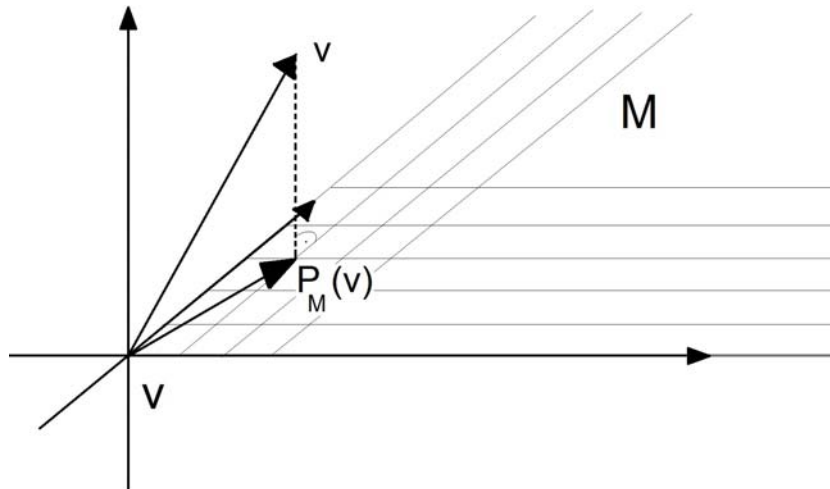
Da weiterhin  $M \cap M^\perp = \emptyset$  gilt, ist die Zerlegung eines Vektors nach  $M$  und  $M^\perp$  eindeutig bestimmt. In diesem Fall sagt man, dass  $V$  die **direkte Summe** von  $M$  und  $M^\perp$  ist.

Mithilfe dieser Begriffe können wir nun leicht orthogonal projizieren:

**Definition 14.20.** Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $M$  ein endlich-dimensionaler Unterraum von  $V$ . Definiere die **orthogonale Projektion**

$$P_M : V \rightarrow M$$

auf  $M$  durch: Für  $v \in V$  ist  $P_M(v) := u$  das nach Satz 14.19 eindeutig bestimmte  $u \in M$ , so dass  $v - u \in M^\perp$ .



Diese orthogonale Projektion hat die gewünschten Eigenschaften, wie wir jetzt sehen werden:

**Satz 14.21.** Sei  $P_M : V \rightarrow M$  die in Definition 14.20 definierte orthogonale Projektion von  $V$  auf den Unterraum  $M \subseteq V$ . Dann gilt:

- (a)  $P_M : V \rightarrow M$  ist eine lineare Abbildung.
- (b)  $P_M \upharpoonright M = \text{Id}_M$  und  $P_M : V \rightarrow M$  ist surjektiv.
- (c)  $\text{Kern}(P_M) = M^\perp$ .

*Beweis:*

Zu (a): Betrachte  $w, w' \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind

$$w = P_M(w) + (w - P_M(w)) \text{ und } w' = P_M(w') + (w' - P_M(w'))$$

die Zerlegungen von  $w$  und  $w'$  nach  $M$  und  $M^\perp$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} w + w' &= (P_M(w) + (w - P_M(w))) + (P_M(w') + (w' - P_M(w'))) \\ &= (P_M(w) + P_M(w')) + ((w - P_M(w)) + (w' - P_M(w'))) \end{aligned}$$

ist die Zerlegung von  $w + w'$  nach  $M$  und  $M^\perp$ . Damit ist

$$P_M(w + w') = P_M(w) + P_M(w').$$

Weiter ist  $\lambda w = \lambda P_M(w) + \lambda(w - P_M(w))$  die Zerlegung von  $\lambda w$  nach  $M$  und  $M^\perp$ , da  $\lambda P_M(w) \in M$  und  $\lambda(w - P_M(w)) \in M^\perp$ . Damit ist

$$P_M(\lambda w) = \lambda \cdot (P_M(w)).$$

und somit die Abbildung linear.

Zu (b): Betrachte  $w \in M$ . Dann ist  $w = w + 0$  die Zerlegung von  $w$  nach  $M$  und  $M^\perp$ . Also ist  $P_M(w) = w = \text{Id}_M(w)$ . Damit ist  $P_M \upharpoonright M = \text{Id}_M$ .

Zu (c): Betrachte  $w \in \text{Kern}(P_M)$ . Dann ist  $P_M(w) = 0$  und

$$w = P_M(w) + (w - P_M(w)) = 0 + w$$

ist die Zerlegung von  $w$  nach  $M$  und  $M^\perp$ . Dann ist  $w \in M^\perp$ . Betrachte umgekehrt  $w \in M^\perp$ . Dann ist

$$w = 0 + w$$

die Zerlegung von  $w$  nach  $M$  und  $M^\perp$ . Somit ist wie gewünscht  $P_M(w) = 0$  und  $w \in \text{Kern}(P_M)$ .

□

\* \* \*

**Orthogonale Abbildungen.** Wir geben im Folgenden noch abschließend einen kleinen Ausblick. Wir definieren orthogonale Abbildungen und werden sehen, dass wir bereits wohlbekannte Beispiele dafür kennen.

**Definition 14.22.** Seien  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  und  $W = (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  euklidische Vektorräume und sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann ist  $f$  *isometrisch* oder *orthogonal*, wenn für alle  $u, v \in V$  gilt:

$$\langle f(u), f(v) \rangle_W = \langle u, v \rangle_V.$$

**Beispiel 14.23.** Seien  $V = W = \mathbb{R}^2$  mit dem Standard-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sei  $f$  die Drehung von  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\alpha$ . Betrachte Vektoren  $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha \\ u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha \\ v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt zwischen  $f(u)$  und  $f(v)$  gilt:

$$\begin{aligned} &\left\langle f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha \\ u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \cos \alpha - v_2 \sin \alpha \\ v_1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= u_1 v_1 \cos \alpha \cos \alpha - u_1 v_2 \cos \alpha \sin \alpha - u_2 v_1 \sin \alpha \cos \alpha + u_2 v_2 \sin \alpha \sin \alpha \\ &\quad + u_1 v_1 \sin \alpha \sin \alpha + u_1 v_2 \sin \alpha \cos \alpha + u_2 v_1 \cos \alpha \sin \alpha + u_2 v_2 \cos \alpha \cos \alpha \\ &= u_1 v_1 \cos^2 \alpha + u_1 v_1 \sin^2 \alpha + u_2 v_2 \sin^2 \alpha + u_2 v_2 \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Damit ist die Drehung  $f$  isometrisch.

Orthogonale Abbildungen sind bereits sehr speziell, wie die folgenden beiden Sätze zeigen werden:

**Satz 14.24.** *Seien  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  und  $W = (W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  euklidische Vektorräume und sei  $f : V \rightarrow W$  orthogonal. Dann ist  $f$  injektiv.*

*Beweis:* Betrachte  $v, v' \in V$  mit  $f(v) = f(v')$ . Dann ist  $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$  und  $\langle v - v', v - v' \rangle_V = \langle f(v - v'), f(v - v') \rangle_W = \langle 0, 0 \rangle_W = 0$ . Nach Satz 14.15 ist dann  $v - v' = 0$  und somit  $v = v'$ .  $\square$

**Satz 14.25.** *Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  ein orthogonaler Endomorphismus. Dann ist  $f$  ein Automorphismus.*

*Beweis:* Nach Satz 14.24 ist  $f$  injektiv. Nach der Dimensionsformel 6.17 ist ein injektiver Homomorphismus surjektiv.  $\square$

Orthogonale Abbildungen haben in sich schöne Eigenschaften, so dass man die Menge solcher Abbildungen zusammenfasst.

**Definition 14.26.** *Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann sei*

$$O(V) = \{f | f : V \rightarrow V \text{ ist orthogonal}\}$$

*die orthogonale Gruppe von  $V$ .*

*Wenn  $\mathbb{R}^m = (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  der  $m$ -dimensionale Standard-Raum ist, so schreibt man auch  $O(m)$  statt  $O(\mathbb{R}^m)$ .*

Über dieser Menge können wir nun die Gruppengesetze nachweisen:

**Satz 14.27.** *Sei  $V = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist  $O(V)$  mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, d.h. die Struktur  $(O(V), \circ)$  erfüllt die Gruppengesetze:*

- (a) Für  $f, g, h \in O(V)$  gilt:  
 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  (Assoziativgesetz)
- (b) Für  $f \in O(V)$  gilt:  
 $f \circ \text{Id}_V = f$  und  $\text{Id}_V \circ f = f$  (Neutrales Element)
- (c) Für alle  $f \in O(V)$  gilt:  
 $f^{-1} \circ f = \text{Id}_V$  und  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_V$  (Existenz von Inversen)

Ein Element  $f$  von  $O(m)$  wird in der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^m$  als eine  $(m \times m)$ -Matrix  $A$  dargestellt. Die kanonische Basis ist selbst ein orthonormales System, das durch die Spalten von  $A$  dargestellt wird, so dass wir den Übergang zu Matrizen vollziehen können:

**Definition 14.28.** Sei  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Eine Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times m, \mathbb{R})$  ist *orthogonal*, wenn das System der Spaltenvektoren von  $A$  orthonormal ist.

In der Dimension  $m = 2$  sind Drehmatrizen und Spiegelmatrizen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}$$

orthonormal, denn es gilt:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 &= 1, \\ (\mp \sin \alpha)^2 + (\pm \cos \alpha)^2 &= 1, \\ \cos \alpha \cdot (\mp \sin \alpha) + \sin \alpha \cdot (\pm \cos \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt der folgende Satz:

**Satz 14.29.** Jedes  $A \in O(2)$  ist von der Form

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Damit schließen wir diesen kleinen Exkurs.

\* \* \*

**Aufgabe 14.30.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum,  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, wobei aus  $\langle x, y \rangle = 0$  die Gleichung  $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$  folgt. Zeigen Sie, dass es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\lambda \cdot f$  eine Isometrie ist.

## 15. LÖSUNGSHINWEISE

In diesem Kapitel finden Sie Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben der einzelnen Kapitel. Es handelt sich teilweise auch wirklich nur um Hinweise oder Lösungen und soll Sie beim selbstständigen Lösen der Aufgaben unterstützen.

*Aufgaben zu Kapitel 1.*

**Aufgabe.** Berechnen Sie die Lösungsmenge des nachfolgenden homogenen LGS:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 &= 0 \\2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 &= 0 \\3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 0 \\4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dieser Lösungsmengen und der Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_{inh} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = \frac{2}{3}(1 - x_4), x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_4), x_3 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_4 \right\}$$

des inhomogenen LGS:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 &= 1 \\2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 &= 2 \\3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 2 \\4x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 &= 3\end{aligned}$$

**Lösung.**

Man berechnet mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 10 & 0 \end{array}$$

und erhält die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_{hom} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -\frac{2}{3}x_4, x_2 = -\frac{1}{3}x_4, x_3 = \frac{5}{3}x_4 \right\}$$

Man erkennt nun, dass:

$$\mathbb{L}_{inh} = \mathbb{L}_{hom} + \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

wobei der letzte Vektor eine spezielle Lösung des inhomogenen LGS ist!

**Aufgabe.** Konstruieren Sie Lineare Gleichungssysteme mit den folgenden Lösungsmengen:

$$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 3x_4, x_2 = 6x_4, x_3 = -2x_4\}$$

$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 5\lambda + \rho, x_2 = 6\lambda - 2\rho, x_3 = -2\lambda, x_4 = -2\rho, \text{ für } \lambda, \rho \in \mathbb{R}\}$$

**Lösung.**

$$\text{zu } L_1: \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \text{zu } L_2: \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

\* \* \*

*Aufgaben zu Kapitel 2.*

**Aufgabe.** Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des  $\mathbb{R}^3$ ?

$$U_1 := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) : 3x + 7y - 8z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_2 := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) : x + y + z = 1, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_3 := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) : x \cdot y \cdot z = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U_4 := \left\{ \left( \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) : x^2 + y^2 = z^2, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

**Lösung.**

Sie müssen nur die Untervektorraumaxiome überprüfen:

zu  $U_1$ :  $U_1$  ist ein UVR (Lösungsmengen von homogenen LGS sind immer Untervektorräume)

zu  $U_2$ :  $U_2$  ist kein UVR:  $\underbrace{(0, 0, 1)}_{\in U_2} + \underbrace{(0, 1, 0)}_{\in U_2} \notin U_2$

zu  $U_3$ :  $U_3$  ist kein UVR:  $\underbrace{(0, 1, 1)}_{\in U_3} + \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in U_3} \notin U_3$

zu  $U_4$ :  $U_4$  ist kein UVR:  $\underbrace{(0, 1, 1)}_{\in U_4} + \underbrace{(1, 0, 1)}_{\in U_4} \notin U_4$

\*   \*   \*

*Aufgaben zu Kapitel 6.*

**Aufgabe.** *Kann es auf einem endlich dimensionalen Vektorraum  $V$  Endomorphismen  $f : V \rightarrow V$  geben, die injektiv und nicht surjektiv oder nicht injektiv und surjektiv sind. Beweisen oder widerlegen Sie ihre Vermutung!*

*Tipp: Beachten Sie, dass  $f$  injektiv ist genau dann, wenn  $\text{Kern}(f) = 0$  und verwenden Sie den Dimensionssatz.*

**Lösung.**

Die Antwort ist, dass es keine solchen Endomorphismen geben kann!

Angenommen  $f$  injektiv, dann ist  $\text{Kern}(f) = 0$  und mit der Dimensionsformel erhält man:

$$\underbrace{\dim(\text{Kern}(f))}_{=0} + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V), \text{ also } \text{Bild}(f) = V,$$

das bedeutet,  $f$  ist surjektiv.

Analog dazu: Angenommen  $f$  surjektiv, dann ist  $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V)$  und mit der Dimensionsformel erhält man:

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V) \Leftrightarrow \text{Kern}(f) = 0,$$

also muss  $f$  injektiv sein.

**Aufgabe.** *Sei  $f : V \rightarrow W$  für  $V, W$  zwei  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume. Man zeige: Aus  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  für alle  $x, y \in V$  folgt, dass  $f$  linear ist.*

**Lösung.**

Jedes  $\lambda \in \mathbb{Q}$  hat die Darstellung  $\lambda = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ . Damit können wir Folgendes nachrechnen:

$$f(qx) = f(\underbrace{x + \dots + x}_{q\text{-mal}}) = qf(x)$$

und analog:

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}f(x) = f\left(\frac{x}{q}\right)$$

Damit erhalten wir:

$$f(\lambda x) = f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q}f(x) = \lambda f(x)$$

und somit ist  $f$  tatsächlich linear.

\* \* \*

*Aufgaben zu Kapitel 7.*

**Aufgabe.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus auf dem  $n$  dimensionalen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $K$  mit  $1+1 \neq 0$  und  $f^2 = f$ . Man zeige die Existenz einer Basis von  $V$ , so dass

$$\text{DM}(f) = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}, \text{ bzgl. dieser Basis}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie die darstellende Matrix bezüglich der Vektoren  $f(b_1), \dots, f(b_l)$ , wobei die  $b_i$  hier eine Basis von  $\text{Bild}(f)$  sind, aussieht.

**Lösung.**

Wir wissen, dass der Vektorraum  $V$  in  $\text{Bild}(f)$  und  $\text{Kern}(f)$  zerfällt. Sei  $b_1, \dots, b_l$  eine Basis von  $\text{Bild}(f)$  und  $c_{l+1}, \dots, c_n$  eine Basis von  $\text{Kern}(f)$ . Jetzt ist für jedes  $b_i$ :  $b_i = f(x)$  für ein  $x \in V$ , daraus folgt  $f(b_i) = f^2(x) = f(x) = b_i$ . Trivialerweise ist natürlich auch  $f(c_i) = 0$  und damit wissen wie  $f$  auf die Basis  $\{b_1, \dots, b_l, c_{l+1}, \dots, c_n\}$  angewendet aussieht.

\* \* \*

*Aufgaben zu Kapitel 8.*

**Aufgabe.** Wir betrachten die Prüfmatrix  $H$ :

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Warum gibt die Prüfmatrix die Stelle eines 1 Bit Fehlers an?

Hinweis: Multiplizieren Sie  $H$  mit allen kanonischen Einheitsvektoren und betrachten Sie hinterher die Struktur des Resultats.

**Lösung.**

Multipliziert man die Prüfmatrix mit einem fehlerfreien Vektor  $x$ , so gilt  $Hx = 0$ . Ist der Vektor mit einem 1-Bit Fehler an der Position  $i$  behaftet, so lässt er sich darstellen als  $x + e_i$ . Jetzt ergibt das Testen mit der Prüfmatrix:  $H(x + e_i) = He_i$ . Alles was man also noch nachzurechnen hat ist, dass  $He_i = i$  in der  $b$ -adischen Darstellung für  $b = 2$ .

\* \* \*

Aufgaben zu Kapitel 9.

**Aufgabe.** Invertieren Sie die nachfolgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung.**

Mit dem Invertierungs-Algorithmus kommt man auf:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 10 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe.** Zeigen Sie, dass die  $2 \times 2$  Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

genau dann invertierbar ist, wenn  $ad - bc \neq 0$

**Lösung.**

Wir verwenden unseren Invertierungs-Algorithmus und gehen davon aus, dass mindestens einer der Koeffizienten ungleich Null ist. Sei also o.B.d.A  $a \neq 0$  (ansonsten vertauscht man die Zeilen und Spalten der Matrix bis der erste Eintrag in der ersten Zeile ungleich Null ist):

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-bc}{a} + d & \frac{-c}{a} & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ \left( \begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{bc}{ad-bc} + 1 & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & -bc + da & -c & a \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir unsere bekannte Matrixinverse einer  $2 \times 2$  Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und dafür muss natürlich  $ad - bc \neq 0$  gelten.

**Aufgabe.** Wann ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \text{für } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

invertierbar und wie sieht ihre Inverse aus?

Hinweis: Konstruieren Sie die Inverse der  $2 \times 2$  Blockmatrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dann lässt sich die Inverse von  $B$  aus 2 Blockmatrizen "zusammenbauen".

### Lösung.

Beachten Sie, dass wegen der Struktur der Matrixmultiplikation folgender Zusammenhang gilt:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ 0 & B_1 B_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } A_1, A_2, B_1, B_2 \text{ Blockmatrizen}$$

Wir wissen außerdem aus der vorherigen Aufgabe, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und erhalten insgesamt:

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & 0 \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = E_3$$

Es muss also  $ad - bc \neq 0$  und  $e \neq 0$  gelten.

**Aufgabe.** Sei  $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$  eine  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{R}$  mit  $|a_{ij}| \leq q < \frac{1}{2n}$  für jedes  $1 \leq i, j \leq n$ . Man zeige, dass

$$(E_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Hinweis: Man zeige, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$  und die Existenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  mithilfe der geometrischen Summenformel. Anschließend betrachtet man  $(E_n - A) \cdot \sum_{k=0}^N A^k = E_n - A^{N+1}$  und nutzt aus, dass dieser Ausdruck für  $N \rightarrow \infty$  gegen die Einheitsmatrix konvergiert.

### Lösung.

#### Schritt 1:

Sei  $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=1\dots n}$ , dann gilt:

$$|a_{ij}^{(2)}| \leq \sum_{m=1}^n |a_{im}| |a_{mj}| \leq \sum_{m=1}^n \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2^2 n}$$

und analog:

$$|a_{ij}^{(3)}| \leq \sum_{m=1}^n |a_{im}^{(2)}| |a_{mj}| \leq \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^2 n} \cdot \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2^3 n}$$

also erhält man insgesamt induktiv:

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \sum_{m=1}^n |a_{im}^{(k-1)}| |a_{mj}| \leq \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^{k-1}n} \cdot \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2^k n}$$

und wie gewünscht die Aussage  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = 0$ .

### Schritt 2:

Mit der Ungleichung aus dem ersten Schritt erhalten wir für jeden Koeffizienten:

$$\left| \left( \sum_{k=0}^N A^k \right)_{ij} \right| = \left| \sum_{k=0}^N a_{ij}^k \right| \leq \sum_{k=0}^N |a_{ij}^k| \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k n} = \frac{2}{n}$$

also ist die Summendarstellung jedes Koeffizienten absolut konvergent.

### Schritt 3:

Jetzt fehlt nur noch die einfache Feststellung:

$$(E_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{N \rightarrow \infty} (E_n - A) \cdot \sum_{k=0}^N A^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N A^k - A^{k+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} E_n - A^{N+1} = E_n$$

\* \* \*

### *Aufgaben zu Kapitel 10.*

**Aufgabe.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $B$  eine Basis von  $V$ . Dann definieren wir:

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

für eine  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$  und

$$\text{Spur}(f) := \text{Spur}(\text{DM}_B(f)) = \sum_{i=1}^n (\text{DM}_B(f))_{ii}$$

Zeigen Sie, dass der letzte Ausdruck wohldefiniert (unabhängig von der Basis  $B$ ) ist!

Hinweis: Sie müssen zeigen, dass  $\text{Spur}(\text{DM}_B(f)) = \text{Spur}(\text{DM}_C(f))$  für jede andere Basis  $C$  von  $V$ . Beweisen Sie dazu  $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$  und dann verwenden Sie  $\text{DM}_C(f) = (T_B^C)^{-1} \text{DM}_B(f) T_B^C$ .

### **Lösung.**

#### Schritt 1:

Wir beweisen  $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ :

$$\text{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{\hat{j}i} b_{i\hat{j}}}_{\text{umbenennen: } \hat{j}=i, \hat{i}=j} = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \text{Spur}(BA)$$

Schritt 2:

Wir erhalten jetzt:

$$\begin{aligned}
 \text{Spur}(\text{DM}_C(f)) &= \text{Spur}(\{(T_B^C)^{-1}\text{DM}_B(f)\}T_B^C) \\
 &= \text{Spur}(T_B^C\{(T_B^C)^{-1}\text{DM}_B(f)\}) \\
 &= \text{Spur}(E_n\text{DM}_B(f)) \\
 &= \text{Spur}(\text{DM}_B(f))
 \end{aligned}$$

\*   \*   \*

*Aufgaben zu Kapitel 11.*

**Aufgabe.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$ ,  $V$  ein 2-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit  $\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  für  $B$  eine beliebige Basis von  $V$ . Angenommen  $f$  ist nicht diagonalisierbar, dann gilt:  $p_f(f)v = 0$ ,  $\forall v \in V$ .

Hinweis: Man beweise:  $\exists v$  mit  $\{v, f(v)\} := \{b_1, b_2\}$  sind linear unabhängig, also auch eine Basis von  $V$ . Man erhält, dass  $f(b_1) = b_2$  und  $f(b_2) = c_1b_1 + c_2b_2$  und für die darstellende Matrix gilt:

$$\text{DM}_{b_1, b_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix}$$

Als Nächstes müssen Sie zeigen, dass  $p_f(f)$  unabhängig von der Basiswahl ist. Das bedeutet:

$$A := (a)_{i,j=1,2} = (T_B^C)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (T_B^C) \quad \text{für } B, C \text{ Basen von } V$$

dann ist:

$$p_f(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

Jetzt zeigt man nur noch  $(0 - f)(c_2 - f) - c_1 = 0$  und erhält wegen der Basisinvarianz von  $p_f(\lambda)$ , dass  $p_f(f) = (0 - f)(c_2 - f) - c_1 = 0$

**Lösung.**Schritt 1:

Angenommen es existiert kein  $v$  mit  $\{v, f(v)\} := \{b_1, b_2\}$  sind linear unabhängig, dann wäre  $\lambda_v v = f(v)$  für jedes  $v \in V$  und damit  $f$  diagonalisierbar mit den Eigenwerten:  $\lambda_{e_1}, \lambda_{e_2}$ . Dies ist aber ein Widerspruch zu den Voraussetzungen, also muss

es ein  $v$  geben, so dass  $\{v, f(v)\} := \{b_1, b_2\}$  eine Basis von  $V$  ist. Natürlich ist jetzt auch

$$\text{DM}_{b_1, b_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix}$$

### Schritt 2:

Die Tatsache, dass  $p_f(\lambda)$  unabhängig von der Basiswahl ist können Sie jetzt nachrechnen oder wenn Sie das Kapitel zu den Determinanten bereits gelesen haben:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= \det((T_B^C)^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (T_B^C) - \lambda E_2) \\ &= \det((T_B^C)^{-1} (\text{DM}_B(f) - \lambda E_2) T_B^C) \\ &= \underbrace{\det((T_B^C)) \det((T_B^C)^{-1})}_{=1} \det(\text{DM}_B(f) - \lambda E_2) \\ &= p_f(\lambda) \end{aligned}$$

### Schritt 3:

wegen der Basisinvarianz von  $p_f$  erhalten wir nun:

$$p_f(\lambda) = \det(\text{DM}_{b_1, b_2}(f) - \lambda E_2) = \det \left( \begin{pmatrix} -\lambda & c_1 \\ 1 & c_2 - \lambda \end{pmatrix} \right) = -\lambda(c_2 - \lambda) - c_1$$

und angewendet auf die Basis  $b_1, b_2$ :

$$p_f(f)b_1 = (-f(c_2 - f) - c_1)b_1 = -c_2f(b_1) + f^2(b_1) - c_1b_1 = -c_2b_2 + f(b_2) - c_1b_1 = 0$$

$$p_f(f)b_2 = -c_2f(b_2) + f^2(b_2) - c_1b_2 = -c_2f(b_2) + f(c_1b_1 + c_2b_2) - c_1b_2 = 0$$

insgesamt gilt also für jeden Vektor  $v$ :  $p_f(f)v = 0$

**Aufgabe.** Sei  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ . Angenommen  $f^4(v) + v = 0 \quad \forall v \in V$ . Welche Aussagen bezüglich der Diagonalisierbarkeit und der Eigenwerte von  $f$  lassen sich für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2$  feststellen?

### **Lösung.**

#### Angenommen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

Für jeden Eigenvektor  $v$  zum Eigenwert  $\lambda$  müsste  $0 = f^4(v) + v = (\lambda^4 + 1)v$ . Da  $v \neq 0$  muss also  $(\lambda^4 + 1) = 0$  gelten, was im Körper  $\mathbb{R}$  nicht sein kann!

#### Angenommen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

Nun bekommen wir mit derselben Rechnung wie oben die möglichen Eigenwerte:

$$\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \lambda_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad \lambda_3 = e^{i\frac{-\pi}{4}}, \quad \lambda_4 = e^{i\frac{-3\pi}{4}} \text{ als Nst. der Gleichung: } \lambda^4 + 1 = 0$$

#### Angenommen $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ :

Die Gleichung  $\lambda^4 + 1 = 0$  hat über dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  nur die Lösung  $\lambda = 1$ . Das bedeutet, dass  $f(v) = v$  sein muss, falls  $f$  diagonalisierbar ist.

**Aufgabe.** Sei  $f$  ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ , wobei  $V$  ein zweidimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist und es soll  $f^k(v) = 0$  für alle  $v \in V$  und ein festes  $k \in \mathbb{N}$  gelten. Man zeige, dass  $\text{Spur}(f) = 0$  gilt.

**Lösung.**

Angenommen es gibt einen Eigenvektor  $v \in V$  mit  $f(v) = \lambda v$ , dann ist

$$0 = f^k(v) = \lambda^k v$$

und daraus folgt, dass  $\lambda = 0$  gelten muss. Wir wissen nun, dass  $f$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar ist (algebraisch abgeschlossener Körper) und es dementsprechend mindestens einen solchen Eigenvektor  $v$  zu  $\lambda = 0$  geben muss. Dadurch erhalten wir für  $\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dass die Gleichung:

$$\det \left( \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a + d)}_{=\text{Spur}(f)} + ad - bc = 0$$

nur für  $\lambda = 0$  erfüllt ist! Das bedeutet aber auch, dass die algebraischen Lösungen (durch Lösen der  $p$ - $q$ -Formel für quadratische Gleichungen)

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Spur}(f)}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Spur}(f)^2}{4} - (ad - bc)}$$

null sein müssen! Daraus folgt  $\frac{\text{Spur}(f)}{2} = 0$  und somit die gewünschte Aussage.

\* \* \*

*Aufgaben zu Kapitel 12.*

**Aufgabe.** Sei  $f$  eine Endomorphismus,  $f : V \rightarrow V$  für den gilt, dass jeder Vektor  $v \neq 0$  ein Eigenvektor ist. Zeigen Sie, dass dann  $f = c \cdot \text{id}_v$  gilt.

**Lösung.**

Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine beliebige Basis von  $V$ . Jetzt ist für jedes  $i = 1, \dots, n : f(b_i) = \lambda_i b_i$ . Aber es gilt auch  $f(\sum_{k=1}^n b_k) = \hat{\lambda} \sum_{k=1}^n b_k$ . Wenn wir jetzt die Linearität von  $f$  ausnutzen, erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k = \sum_{k=1}^n f(b_k) = f \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) = \hat{\lambda} \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \hat{\lambda} b_k$$

Da  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$  ist, muss aufgrund der linearen Unabhängigkeit der  $b_i$  aus dieser Gleichung  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \hat{\lambda}$  folgen. Damit ist  $f = \hat{\lambda} \text{id}_v$ .

\* \* \*

Aufgaben zu Kapitel 13.

**Aufgabe.** Finden Sie einen Endomorphismus  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , für den

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2 \text{ gilt.}$$

Kann man für jedes Polynom  $p(\lambda) = \pm\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$  einen Endomorphismus  $f$  finden, so dass  $p_A(\lambda) = p(\lambda)$  gilt?

**Lösung.**

Sei:

$$\text{DM}_B(f) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Dann rechnet man für das charakteristische Polynom (Entwickeln der  $n$ -ten Spalte, Laplacescher Entwicklungssatz):

$$p_f(\lambda) = \det \left( \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \right) = (-1)^n \left( \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right)$$

Man kann also zu jedem Polynom  $p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^n a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n a_0$  einen Endomorphismus  $f$  finden, so dass  $p_f(\lambda) = p(\lambda)$ .

Für  $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2$  ist also, der durch

$$\text{DM}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegebene Endomorphismus  $f$  die gesuchte Antwort.

\* \* \*

Aufgaben zu Kapitel 14.

**Aufgabe.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum,  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, wobei aus  $\langle x, y \rangle = 0$  die Gleichung  $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$  folgt. Man zeige, dass es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $\lambda f$  ist eine Isometrie.

**Lösung.**

Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Jetzt ist  $\langle b_i + b_m, b_i - b_m \rangle = \langle b_i, b_i \rangle - \langle b_i, b_m \rangle + \langle b_m, b_i \rangle - \langle b_m, b_m \rangle = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ .  
Daraus folgt:

$$0 = \langle f(b_i + b_m), f(b_i - b_m) \rangle = \langle f(b_i), f(b_i) \rangle - \langle f(b_m), f(b_m) \rangle$$

und wir können die Konstante  $C := \sqrt{\langle f(b_1), f(b_1) \rangle} = \dots = \sqrt{\langle f(b_n), f(b_n) \rangle}$  eindeutig definieren. Damit gilt für die Funktion  $\frac{1}{C}f$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{C}f(x), \frac{1}{C}f(y) \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{C}f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k b_k\right), \frac{1}{C}f\left(\sum_{l=1}^n \mu_l b_l\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{1}{C}f(b_k), \sum_{l=1}^n \mu_l \frac{1}{C}f(b_l) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_k \underbrace{\frac{1}{C^2} \langle f(b_k), f(b_k) \rangle}_{=1} \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Für die Vektoren  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k$  und  $y = \sum_{l=1}^n \mu_l b_l$ .

Somit ist  $\frac{1}{C}f$  die gesuchte Isometrie.

## INDEX

- Öffnungswinkel, 145
- Abbruchkriterium, 130
- Abstand, 140
- algebraische Vielfachheit, 131
- Assoziativgesetz, 14, 15, 68
- Automorphismengruppe, 55
- Automorphismus, 55, 154
  
- Basis, 35, 130
- Basisaustauschsatz, 40
- Basisdarstellung, 37, 91, 148
- Basisergänzungssatz, 39
- Basisexistenzsatz, 40
- Betrag, 32
- Bild, 52, 53, 58, 71, 96, 112, 128
  
- CAESAR-Verschlüsselung, 13
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 143, 145
- characteristisches Polynom, 112, 130
- charakteristisches Polynom, 127
- Cramersche Regel, 124
  
- darstellende Matrix, 63, 94, 95, 98, 128, 130
- Defekt, 53
- Determinante, 113, 116, 121, 125
- diagonalisierbar, 102
- Diagonalisierung, 108
- Diagonalmatrix, 87
- Dimension, 41, 52
- Dimensionsformel, 96, 112
- Dimensionssatz, 58
- direkte Summe, 151
- Diskriminante, 30
- Distributivgesetz, 14, 16, 68
- Drehung, 75, 99, 103, 146, 155
- Dreiecksmatrix, 87
- Dreiecksungleichung, 144, 145
  
- Eigenraum, 105, 108, 130
- Eigenvektor, 102, 106, 128, 130
- Eigenwert, 102, 108, 128, 130
- eindeutig lösbar, 7
- Einheit, 21
- Einheitengruppe, 23
- Einheitsmatrix, 69, 89
- Einselement, 21
  
- elementare Zeilenumformung, 80, 83, 88, 120
- Elementarmatrix, 83
- endlich-dimensional, 41, 57, 102
- endlich-erzeugt, 36
- Endomorphismus, 55, 60, 98, 102, 128
- Entwicklungsformel, 148
- Epimorphismus, 55
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 84
- euklidischer Vektorraum, 142
- Existenzsätze für Basen, 38
  
- Flächeninhalt, 125, 140, 144
- Fundamentalsatz der Algebra, 127
- Funktion, 14, 18
  
- Gaußscher Algorithmus, 9, 88, 116
- geometrische Vielfachheit, 105, 107, 131
- Gleichung, 5, 9
- Gram-Schmidtsche  
    Orthonormalisierungsverfahren, 148
- Gruppe, 22, 154
  - abelsche, 22
  
- Hauptachsentransformation, 137
- homogen, 7, 84
- Homomorphismus, 50, 54, 56
  
- imaginäre Einheit, 28
- inhomogen, 84
- injektiv, 60
- Inverse, 13, 14, 16, 69, 88, 112, 121, 128
- invertierbar, 21
- isometrisch, 153
- Isomorphiesatz, 65
- Isomorphismus, 55
  
- Körper, 5, 13, 24, 27
- kanonische Basis, 38, 92
- Kern, 52, 53, 58, 60, 71, 84, 96, 108, 112, 128
- Koeffizientenmatrix, 84, 88
- Kommutativgesetz, 14, 15
- komplexe Addition, 28
- komplexe Division, 29
- komplexe Multiplikation, 29
- komplexe Subtraktion, 31
- komplexe Zahlen, 6, 17, 28, 29, 42, 127
- Konjugierte, 29

- Kosinussatz, 32
- Länge, 141, 143, 145
- lösbar, 7, 84
- Lösungsmenge, 7, 84
- Laplacescher Entwicklungssatz, 113, 115
- linear unabhängig, 36, 106, 107, 130, 147
- lineare Abbildung, 50, 58, 60, 68, 70, 94, 152
- lineare Codes, 73
- lineare Hülle, 35
- lineares Gleichungssystem, 5, 7, 50, 84, 88, 104, 128
- Linearfaktor, 130
- Linearkombination, 35
- Matrix, 10, 63, 70
- Matrizenaddition, 64
- Matrizenprodukt, 67
- modulo, 26
  - Addition, 26
  - Multiplikation, 26
- Monomorphismus, 55
- neutrales Element, 21
- Neutralität, 14, 16
- Norm, 143
- Nullmatrix, 64
- Nullstelle, 127
- Nullvektor, 13, 84
- orthogonal, 146, 153, 155
- orthogonale Abbildung, 153, 154
- orthogonale Gruppe, 154
- orthogonale Projektion, 151
- orthogonale Zerlegung, 150
- orthogonales Komplement, 146, 150
- Orthogonalität, 140, 142, 145
- Orthonormalsystem, 147
- Ortsvektor, 31, 32
- p-q-Formel, 30
- Parallelogramm, 126
- Pivot-Element, 8
- Polarkoordinaten, 32, 33
- positiv definit, 142
- Primzahl, 26, 27
- Projektion, 150
- quadratische Matrix, 69, 87
- Rang, 52, 128
- rationale Zahlen, 17, 42
- reelle Ebene, 31, 75, 78, 140
- reelle Zahlen, 17, 29, 42
- Regel von Sarrus, 114
- Rest, 26
- Restklasse, 9, 13
- Ring, 5, 23, 27
- Schachbrettmuster, 115
- senkrecht, 146
- skalare Multiplikation, 64
- Skalarmultiplikation, 13
- Skalarprodukt, 140, 142
- Spaltenvektor, 63
- Spiegelung, 78, 98, 99, 103, 112, 155
- Standard-Skalarprodukt, 140
- surjektiv, 60
- symmetrisch, 142
- symmetrische Matrix, 98
- Teilbarkeit, 25
- Transformationsmatrix, 95, 129, 130
- Transformationssatz, 91
- transponierte Matrix, 98
- Unbekannte, 5
- unendlich-dimensional, 41
- Untervektorraum, 17, 41, 84
- Vektoraddition, 13
- Vektorraum, 13, 15, 16, 54, 57, 65
- Vektorsubtraktion, 13
- Verknüpfung, 21, 22
- Volumen, 125
- Winkel, 140, 141
- Zahl
  - ganze, 25
  - Prim-, 26, 27
- Zeilenstufenform, 8, 120
- Zeilenstufenmatrix, 87
- Zeilenvektor, 63
- Zerlegung, 151