Erweiterbarkeit von Einbettungen

— Diplomarbeit —

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Falkultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von: Thoralf Räsch

geboren am: 20.01.1974, in: Perleberg

Betreuer: Prof. Dr. Ronald B. Jensen

Berlin, den 20.01.2000

Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten — uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.

David Hilbert, "Mathematische Probleme"
Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematischen Kongreß zu Paris 1900

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **vii**

Notation **xvii**

1 Grundlagen **1**

1.1 Spezielle Forcings 2

1.2 Grundgedanken der Feinstruktur für **L** 13

1.3 Ultraprodukte 24

1.4 Silver-Ununterscheidbare und $0^{\#}$ 30

2 Die kanonische Aufwärtserweiterung **38**

2.1 Allgemeines 38

2.2 Die kanonische Σ_0-Aufwärtserweiterung 39

2.3 Die kanonische Σ^*-Aufwärtserweiterung 46

3 Fundiertheit der Pseudo-Ultraprodukte **57**

3.1 Allgemeines 57

3.2 Fundiertheit der Σ_0-Erweiterung 59

3.3 Fundiertheit der Σ^*-Erweiterung 62

3.4 Häufige Erweiterbarkeit 69

4 Das Überdeckungslemma **79**

4.1 Allgemeines 79

4.2 Ein Beweis des Überdeckungslemmas 83

5 Stationarität auf $[X]^{<\gamma}$ **91**

5.1 Stationaritätsbegriffe 92

5.2 Anwendung auf Große Kardinalzahlen 106

6 Verallgemeinerte Häufige Erweiterbarkeit **111**

6.1 Allgemeines 111

6.2 Varianten der Verallgemeinerung 113

7 Notwendigkeit der Einschränkung **121**

7.1 Konstruktion des Gegenbeispiels 121

7.2 Auswirkungen des Gegenbeispiels 128

7.3 Die FORCING-Konstruktion 131

Literaturverzeichnis **143**

Index **146**

Thesen **148**

Vorwort

Wie sieht *das* Mengenuniversum aus?

Diese und ähnliche grundlegende Fragen bildeten einen Ausgangspunkt der aktuellen mathematischen Forschung. In der Mengenlehre, in der wir die gesamte Mathematik und somit auch Grundlagen der Mathematik nutzenden Wissenschaften interpretieren können, befaßt man sich unter anderem mit der Klärung solcher und daraus abgeleiteter Problemstellungen, um eine Basis für die Anwendungen der Mathematik in anderen Wissenschaften zu schaffen. Anfang dieses Jahrhunderts wurde verstärkt damit begonnen, die Fundamente unseres mathematischen Hauses zu verstärken. Nachdem man sich zunehmend erfolgreich in die Tiefe der Mathematik herangewagt hatte, war man nun daran interessiert, wie sicher dieses Gebäude überhaupt gebaut war. Angestoßen durch HILBERTs Fragenkatalog[1] wurde damit begonnen, unser mathematisches Universum zu charakterisieren.

Bislang hatte jeder *sein* Universum im Kopf, so daß es durchaus zu Mißverständnissen kommen konnte, denn was für den einen Mathematiker ganz klar in seiner mathematischen Modellierung galt, mußte sich nicht unbedingt mit der Vorstellung eines anderen decken. So war es also wirklich an der Zeit, Axiome zu finden, die (fast) jeder als wahr akzeptierte, die aber gleichzeitig möglichst viele mathematische Probleme entschieden. Dabei suchte man natürlich nach einem solchen System, das vielleicht sogar vollständig und widerspruchsfrei ist. Dieses Anliegen ist am Anfang unseres Jahrhunderts als HILBERTs *Programm* in die Geschichte eingegangen.

Obwohl es natürlich mehrere solcher Approximationen der mathematischen Welt gibt, ist wohl das ZF-Axiomensystem von ZERMELO und FRAENKEL das am meisten akzeptierte. Bekanntlich gehen schon beim Auswahlaxiom die Meinungen scharf auseinander. Auch das impliziert, daß es Mathematiker gibt, die im wahrsten Sinne des Wortes in verschiedenen Welten leben und insbesondere auch zu sehr unterschiedlichen und teilweise auch (untereinander) widersprüchlichen Eigenschaften *ihres* Universums kommen. Das ist wohl bezüglich der Mathematik die am meisten verwirrende Tatsache für Nicht-Mathematiker, denn schon wenn man die ersten Schuljahre absolviert, bekommt man während der Vermittlung des “Kleinen

[1] Vergleiche [Hi00].

Einmaleins" das Gefühl, die sicherste Basis des Wissens erfahren zu haben, ganz im Gegenteil dazu etwa die offensichtlich meinungsabhängigen Interpretationen geschichtlicher Ereignisse. Nach meiner Erfahrung setzt sich genau dieses Gefühl der Sicherheit in der Mathematik bei den meistens Menschen fort, zumindest bis sie mit der in den zwanziger Jahren entwickelten Logik auf die harte Wahrheit gestoßen werden. In dieser Zeit wurde HILBERTs Programm durch die berühmten GÖDELschen Unvollständigkeitssätze ein jähes Ende bereitet; und das auch noch gleich in *beiden* oben genannten Zielen der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit des die Mengenlehre modellierenden Axiomensystem ZF und somit auf eine eher unerwünschte Art und Weise.

Der erste Unvollständigkeitssatz zeigt, daß es keine Hoffnung für eine vollständige Axiomatisierung der Mathematik geben kann, sofern diese konsistent ist; das bedeutet nicht nur, daß ZF selbst unvollständig ist, sondern auch jede (widerspruchsfreie) Erweiterung derselben. Der zweite GÖDELsche Unvollständigkeitssatz besagt zusätzlich, daß man innerhalb einer widerspruchsfreien Theorie, die zumindest so stark wie die PEANO-Arithmetik ist, nicht ihre eigene Widerspruchsfreiheit entscheiden kann; d.h. wir können innerhalb der Mathematik nicht die Widerspruchsfreiheit derselben beweisen[2].

Betrachtet man diese Ergebnisse, so können bei einigen Menschen Illusionen bezüglich einer völlig klaren und eingleisigen Mathematik zerstört werden, wenn man die vermeintlich sicherste Wissenschaft etwas näher betrachtet. Das schmerzt um so mehr, wenn man sich bewußt macht, welche grundlegende Basis die Mathematik für viele andere Wissenschaften ist. Dennoch besteht kein Grund zur Panik, denn immerhin könnte man den heuristischen Beweis für ihre Widerspruchsfreiheit akzeptieren, der dadurch gegeben ist, wenn man bedenkt, daß schon so viele kompetente Mathematiker seit Anfangszeiten dieser schönen Wissenschaft keinen Widerspruch herleiten konnten. Das ist natürlich nicht befriedigend, aber in Anbetracht des Resultates von GÖDEL wohl eher das einzige, was wir diesbezüglich erwarten können.

Wenn man diese Gedanken im Hinterkopf behält, dann möchte man so wenig wie möglich in das Axiomensystem hineinstecken, aber andererseits natürlich hinreichend starke Axiome zur Verfügung haben, um überhaupt ausreichend Mathematik betreiben zu können. Das ZF-System ist ein gelungener Kompromiß. Wir werden uns in dieser Arbeit außerdem der positiven Meinung gegenüber dem Auswahlaxiom anschließen. Diese Problematik des Akzeptierens bestimmter Axiome impliziert zwar, daß immer noch jeder *seine* Instanz des Mengenuniversums im Kopf haben darf, aber wir uns in Beweisen lediglich auf die Axiome aus ZFC begnügen werden. Wir werden also insbesondere nicht von *Wahrheiten* im Universum sprechen können, sondern nur von den Aussagen, die wir aus den Axiomen ableiten können.

[2] Vergleiche [Gö31].

Trotzdem bestehen mehr denn je die anfangs gestellten Fragen.

Wie sieht dann also unter diesen Gesichtspunkten das derart durch ZFC approximierte Mengenuniversum, nennen wir es $\mathbf{V}$, aus? Eine Möglichkeit, sich $\mathbf{V}$ anzuschauen, um damit überhaupt arbeiten zu können, ist die stufenweise Annäherung von unten, d.h. wir bilden Stufen $\mathbf{V}_\alpha$ für Ordinalzahlen α, die wir als Anfangssegmente von $\mathbf{V}$ interpretieren wollen. Es ist die bekannte Hierarchie VON NEUMANNs, definiert durch $\mathbf{V}_0 := \varnothing$, $\mathbf{V}_{\alpha+1} := \mathcal{P}(\mathbf{V}_\alpha)$ und $\mathbf{V}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{V}_\alpha$ für Limesordinalzahlen λ. Dann ist die Aussage $\bigcup_{\alpha\in\mathsf{On}} \mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}$ gerade äquivalent mit dem Fundierungsaxiom (einem Axiom aus ZF), so daß wir uns unter ZFC das Mengenuniversum als Vereinigung dieser kumulativen Hierarchie vorstellen können. Der dabei aber kritischste Punkt der so einfach aufschreibbaren Definition ist gerade die Potenzmengenbildung im Nachfolgerfall. Was bedeutet es, alle Teilmengen hinzuzunehmen? Die Potenzmenge ist zwar ein semantisch gesehen ganz offensichtlich klares Objekt, dennoch stellt es uns syntaktisch in seiner Behandlung vor große Probleme. Wir wissen (aus Sicht der ZFC-Axiome) nicht einmal, wieviele Teilmengen für hinreichend große Mengen existieren, schon für ω, also der Menge der natürlichen Zahlen, ist die Beantwortung dieser Frage nicht klar. Schließlich entpuppte sich das Problem der Kontinuumhypothese CH vielleicht als die bekannteste von ZFC unabhängige[3] Aussage, denn sie beschäftigt sich mit einem Problem, das in einigen Gebieten der Mathematik vorkommt; nämlich mit der Frage, ob es eine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen gibt, die von der Mächtigkeit echt kleiner ist als alle reellen Zahlen.

Schon GÖDEL schlug vor, sich zusätzlich zu den ZFC-Axiomen geeigneter Annahmen über die Existenz großer Kardinalzahlen zu bedienen, um unabhängige Fragestellungen zumindest in dieser stärkeren Theorie zu entscheiden[4]. Dieses Ziel ist als GÖDELs *Programm* bekannt geworden. Mit dem allgemeinen Standpunkt, daß das Mengenuniversum unerschöpflich groß sei, lassen sich große Kardinalzahlen rechtfertigen. Dabei kann man verschiedene Methoden zur Generierung solcher Zahlen verwenden[5]; etwa durch Verallgemeinerung der Eigenschaften von ω, wie beispielsweise die unerreichbaren Zahlen, die mit den beiden Erzeugungsregeln innerhalb des Axiomensystems ZF, nämlich dem Potenzmengen- und dem Ersetzungsaxiom, nicht zu erreichen sind; oder andere starke Limesforderungen, wie die MAHLO-Zahlen, bei denen man die Existenz einer *großen* Teilmenge von gewissen *kleineren* großen Zahlen fordert. Der übergeordenete Gedanke dabei ist immer, starke Abschlußeigenschaften des Universums auf Mengen zu projizieren.

Interessant sind auch Charakterisierungen von Zahlen durch kombinatorische Prin-

[3] Es gilt: Falls ZFC konsistent ist, so auch ZFC + CH, aber auch ZFC + ¬CH.
[4] Es hat sich gezeigt, daß sich jedoch CH nicht mit solchen Methoden entscheiden läßt.
[5] Vergleiche [Dr74] und [Ka94].

zipien geworden, wie beispielsweise die subtilen oder unaussprechlichen[6] Zahlen. Bei den wirklich großen Kardinalzahlen begnügt man sich aber anderer Methoden; man fordert die Existenz geeigneter elementarer Einbettungen mit eventuell zusätzlichen Erhaltungseigenschaften. Das bekannteste Beispiel sind dabei wohl die meßbaren Zahlen, die ausgehend von Fragen aus der Analysis betrachtet wurden.

Erste (relative) Konsistenznachweise gehen auf GÖDEL zurück. Er hat die oben angedeutete Hierarchie VON NEUMANNs verfeinert, indem er sich im Nachfolgerschritt lediglich auf die bis dahin *konstruktiblen*[7] Mengen beschränkte. Das ist ein ganz wesentlicher Punkt; durch die kontrollierte Aufnahme von Mengen lassen sich viele erwünschte Eigenschaften nachweisen. Die derart konstruierten Stufen werden mit $\mathbf{L}_\alpha$ bezeichnet. Die Vereinigung der $\mathbf{L}_\alpha$-Stufen ergibt dann ganz $\mathbf{L}$, das sogenannte *konstruktible Universum*. Es stellte sich schließlich heraus, daß $\mathbf{L}$ aufgrund ableitbarer Eigenschaften das andere Extrem gegenüber der VON NEUMANN-Hierarchie ist. Diese *transitive* Klasse hat die Eigenschaft, *Modell von* ZFC zu sein und *alle Ordinalzahlen zu enthalten*. Eine Struktur, die diese drei Eigenschaften besitzt, nennen wir *inneres Modell*. Sie ist darüber hinaus gleichzeitig auch das kleinste derartige Modell.

Ein wesentliches Hilfsmittel, die den internen Aufbau von solchen inneren Modellen näher beschreibt, ist die Feinstruktur. Wie JENSEN es in [Jen72, S.229] beschreibt, kann man sie im Gegensatz zur *üblichen* Makro-Mengenlehre als Mikro-Mengenlehre ansehen. Diese Mikro-Mengenlehre ist aber selbst auch ein wesentlicher Bestandteil der Forschung, denn

> “Happily, micro set theory turns out to have non-trivial applications in macro set theory.”

Da die Feinstruktur alles in allem eher als technisches Gebiet eingestuft wird, wurde meistens erfolgreich versucht, die mit Hilfe der Feinstruktur bewiesenen Theoreme auch mit anderen Methoden zu beweisen. So wurden beispielweise mit Hilfe der sogenannten SILVER-Maschinen kombinatorische Ergebnisse und das Überdeckungslemma nachgewiesen. Trotzdem gibt es keinen Grund, sich von ihr abzuwenden, denn um noch einmal JENSEN aus [Jen72, S.229] zu zitieren:

> “We find such questions both interesting and important in their own right, ...”

aber zum anderen – und das ist der eigentliche Ausgangspunkt – ist die Idee der Feinstruktur gerade die Ausnutzung der Eigenschaften der Σ_1-Hierarchie gegenüber allgemeinen Σ_n-Objekten. So lassen sich Σ_1-Relationen immer durch Σ_1-Funktionen

[6] Im Englischen wird diese Eigenschaft als INEFFABLE bezeichnet.

[7] Vergleiche [Dev84]: $\mathbf{L}_0 := \varnothing$, $\mathbf{L}_{\alpha+1} := \mathrm{Def}(\mathbf{L}_\alpha)$, $\mathbf{L}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{L}_\alpha$.

uniformisieren; diese Eigenschaft geht im allgemeinen in höheren Stufen dieser Hierarchie verloren. Ein zweiter und ganz besonders wesentlicher Punkt ist der Zusammenhang mit Ultraprodukten. Wenn wir Ultraprodukte bilden und nicht von ganzen ZFC-Modellen ausgehen, etwa von Anfangstücken in der **L**-Hierarchie, dann bekommen wir eventuell nicht die volle erwünschte elementare Erhaltungsstärke der Ultraproduktabbildung. In solchen Fällen läßt sich aber zumindest eine Σ_1-Erhaltung nachweisen[8]. Die Feinstruktur versucht nun, durch iteratives Anwenden von Σ_1-Betrachtungen möglichst die erwünschten Σ_n-Objekte in den Griff zu bekommen.

Was sind nun aber die Vorteile dieser Konstruktion des konstruktiblen Universums? Wir listen im folgenden einige wesentliche auf:

(a) Die Aussage "**V**=**L**" läßt sich in ZF durch eine Formel erster Stufe ausdrücken.

(b) Die Konstruktion garantiert die Absolutheit von **L**, d.h. für ein inneres Modell $\mathcal{M}$ gilt $(\,\mathbf{L}\,)^{\mathcal{M}} = \mathbf{L}$. Hier können wir insbesondere **V** als inneres Modell (von sich selbst) betrachten. Außerdem ist zu beachten, daß **L** ein inneres Modell ist, daß aber **L** natürlich nicht durch die drei Eigenschaften eines inneren Modells charakterisiert wird; wir können durchaus auch noch *andere*[9] innere Modelle konstruieren. Dann sagt diese Bedingung, daß die Konstruktion von **L** innerhalb von $\mathcal{M}$ die gleiche Klasse hervorbringt. Insbesondere gilt dann $(\,\mathbf{L}\,)^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.

(c) Die Definition von **L** ist für alle Erzwingungserweiterungen, die Mengen sind, absolut.

(d) Die in der Hierarchie der Großen Kardinalzahlen unterhalb $0^{\#}$ angesiedelten Zahlen sind absolut für **L**.

(e) Aufgrund der rekursiven Konstruktion von unten ist die (relativ einfache) logische Komplexität von **L** durch die von den Ordinalzahlen bestimmt.

(f) Eine sehr wichtige Eigenschaft ist das *Kondensationsprinzip*: Für beliebige Limeszahlen α und $X \prec_1 \mathbf{L}_\alpha$ existiert ein $\beta \leq \alpha$ mit $\mathbf{L}_\beta \cong X$. Dieser Fakt ermöglicht den Nachweis von GCH oder kombinatorischen Prinzipien wie $\diamondsuit$ oder $\square$ in **L**.

(g) **L** ist *rigide*, d.h. es existiert (in **L**) keine nicht-triviale elementare Einbettung von **L** in **L**. Kunen stellte schon 1971 fest, daß nur die Identität eine Σ_1-erhaltende Einbettung von **V** in sich selbst ist.

[8] Wir werden diese Konstruktion im zweiten Kapitel verallgemeinern und im Detail durchgehen. Dort sind wir in der Lage, die Einbettung als Σ_0 und konfinal nachzuweisen.

[9] Hierbei ist gemeint, daß durch weitere Konstruktionen sich andere innere Modelle ergeben können, die aber nicht notwendigerweise verschieden von **L** sein müssen, wie etwa im Fall $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

(h) Entscheidend ist auch das von JENSEN 1974 bewiesene *Überdeckungslemma*, auf das wir im vierten Kapitel noch etwas näher eingehen werden. Dieses besagt, daß wenn wir eine unter (g) beschriebene Abbildung[10] nicht in $\mathbf{V}$ finden können, daß wir dann eine beliebige überabzählbare Menge schon durch eine konstruktible Menge mit gleicher realer Mächtigkeit überdecken können. Diese Eigenschaft ist bei erfüllter Voraussetzung ziemlich stark und hat interessante Auswirkungen für die Beziehung von $\mathbf{L}$ und $\mathbf{V}$. So sind Kardinalzahlen, die in $\mathbf{L}$ regulär sind, auch in $\mathbf{V}$ regulär und singuläre Kardinalzahlen β sind auch in $\mathbf{L}$ singulär und es gilt in diesem Fall $\beta^{+\mathbf{L}} = \beta^{+}$.

(i) SHOENFIELDS Σ^1_2-Absolutheitslemma: Für jedes $a \in {}^{\omega}\omega$ ist eine beliebige $\Sigma^1_2(a)$-Relation absolut für $\mathbf{L}$.

Die Art der Bedingungen wie in (d),(h) und (i), die man ganz allgemein in der entsprechenden Variante für alle innere Modelle betrachten kann, bezeichnet man auch als *Maximalitätseigenschaften*[11] von solchen Modellen. Sie drücken die Beziehung vom konstruktiblen zum ganzen Mengenuniversum aus. Die in (h) beschriebene Überdeckungseigenschaft für $\mathbf{L}$ bekommen wir beispielsweise nicht, wenn wir eine meßbare Kardinalzahl in $\mathbf{V}$ haben, da dann mit der Existenz von $0^{\#}$ die Voraussetzung in (h) verletzt wird.

Aber schon eine elementare Einbettung $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ mit $\pi \neq \mathrm{id}$ für beliebige innere Modelle $\overline{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M}$ genügt, um diese Voraussetzung zu verletzen, denn wir bekommen dann $\pi \restriction (\mathbf{L})^{\overline{\mathcal{M}}} : (\mathbf{L})^{\overline{\mathcal{M}}} \longrightarrow (\mathbf{L})^{\mathcal{M}}$ und wegen der in (b) beschriebenen Absolutheit gilt dann $\pi \restriction \mathbf{L} : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}$. Eine solche Einbettung läßt sich sogar schon aus der Existenz einer geeigneten Menge folgern. Ist nämlich $\sigma : \mathbf{L}_{\overline{\alpha}} \longrightarrow \mathbf{L}_{\alpha}$ mit $\sigma \neq \mathrm{id}$ eine konfinale elementare Einbettung[12], wobei $\overline{\alpha}$ eine überabzählbare und reguläre Kardinalzahl ist[13], dann können wir diese Abbildung durch eine kanonische Konstruktion eines *Pseudo-Ultraproduktes* auf eine σ erweiternde Abbildung $\tilde{\sigma}$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{L}_{\overline{\beta}}$ heben, so daß ein β existieren wird, für das wir das folgende Diagramm erhalten:

[10] Das Axiom "$0^{\#}$ existiert" drückt gerade die Existenz einer solchen Abbildung aus. Im ersten Kapitel werden wir noch einmal kurz darauf eingehen.

[11] Vergleiche [We00]. Der Begriff spielt auf die Beziehung zwischen dem inneren Modell und ganz $\mathbf{V}$ an. Je mehr solche Absolutheitsaussagen für ein bestimmtes inneres Modell nachgewiesen werden können, desto näher kommt es an das gesamte Universum $\mathbf{V}$ heran und desto größer (*maximaler*) ist der Zusammenhang zwischen beiden.

[12] Im ersten Kapitel werden wir sehen, daß wir nicht einmal volle Elementarität benötigen.

[13] Wir werden im Abschnitt 1.4 noch eine scheinbar schwächere Aussage finden können, die für diesen Zweck ausreichen wird.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}_{\overline{\beta}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}"] & \mathbf{L}_{\beta} \\
\mathbf{L}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbf{L}_{\alpha} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist zu erwähnen, daß sich diese Konstruktion auch für den Fall $\overline{\beta} = \infty$, d.h. $\mathbf{L}_{\overline{\beta}} := \mathbf{L}$, durchführen läßt.

Solche Konstruktionen in einer etwas allgemeineren Art und Weise werden wir im zweiten Kapitel näher beleuchten. Wir werden auch Probleme der Fundiertheit des konstruierten Pseudo-Ultraproduktes betrachten müssen, da wir diese Eigenschaft nicht immer vorfinden. Nur mit dieser Eigenschaft ist es überhaupt zu erwarten, daß wir ein solches β finden können. In dem obigen Beispiel garantierte uns die Regularitätseigenschaft gerade die Fundiertheit. Unter ungünstigen Umständen werden wir es nicht schaffen, ein Pseudo-Ultraprodukt als fundiert nachzuweisen, aber dafür vielleicht eine etwas schwächere Bedingung: Falls wir *viele* Erweiterungen gebildet haben, genügt es uns in einigen Situationen, nur eine *große* Menge von diesen Erweiterungen als fundiert zu erkennen. Dieses sehr *häufige* Auftreten der fundierten Erweiterung wird das sogenannte Lemma über die häufige Erweiterbarkeit garantieren. Dieses Lemma wird uns unter anderem im vierten Kapitel helfen, das Überdeckungslemma zu beweisen.

Wie wir noch sehen werden, müssen wir zur Formulierung dieses Lemmas einen gehörigen Aufwand an Notation einführen, die nur einem Zweck gewidmet ist, nämlich die Möglichkeit zu schaffen, vorhandene wohl-verstandene Begriffe über schöne Strukturen ausnutzen zu können[14]. Im fünften Kapitel wird es dann darum gehen, mögliche Varianten dieser Begriffe auf Klassen von Teilmengen einer fixierten Menge zu finden, die eine Formulierung eines solchen Lemmas erlauben; dabei werden wir uns im siebten Kapitel davon überzeugen, daß diese derart formulierten Aussagen schon optimal bewiesen wurden; das wird die im sechsten Kapitel gegebenen verallgemeinerten Lemmata abrunden. Darüber hinaus setzen in der vorliegenden Arbeit alle Kapitel, bis auf das fünfte, die vorhergehenden voraus.

Die in dieser Arbeit betrachteten Resultate beziehen sich nicht nur auf Ergebnisse über $\mathbf{L}$ selbst, sondern teilweise auch auf Modelle der Gestalt $\mathbf{L}[A]$. Neben GÖDELS konstruktiblen Universum sind vor allem andere innere Modelle in der heutigen Mengenlehre interessant geworden; man spricht ganz allgemein von den sogenannten *Kernmodellen* der Mengenlehre. Falls $\mathbf{V}$ das konstruktible Universum wäre,

[14]Wir werden Modelle über Ordinalzahlen ansprechen und derart Begriffe wie "stationär viele" auf Mengen von Modellen übertragen können.

dann wären aufgrund der gegebenen Struktur viele Fragen geklärt; im anderen Fall versucht man Modelle zu finden, die sich einerseits in vieler Hinsicht wie $\mathbf{V}$ verhalten, aber andererseits erwünschte Eigenschaften vom konstruktiblen Universum nicht verlieren. Das ist nur bedingt im Hinblick der Existenz großer Kardinalzahlen möglich; je mehr Eigenschaften von $\mathbf{L}$ übernommen werden sollen, desto kleiner werden die maximal realisierbaren Kardinalzahlen. Wie schon oben angedeutet, falls keine nicht-triviale elementare Einbettung von $\mathbf{L}$ in sich selbst existiert (insbesondere kann keine meßbare Kardinalzahl existieren), dann ist $\mathbf{L}$ unserem Universum sehr ähnlich. Je stärker die Axiome in der Kardinalzahlhierarchie in $\mathbf{V}$ werden können, desto schwieriger wird es, diese Aufgabe zu erfüllen.

Einen ersten Schritt in Richtung Verallgemeinerung des konstruktiblen Universums machte Silver in seiner Dissertation[15] Ende der 60er Jahre, als er das Modell $\mathbf{L}[U]$ betrachte, wobei U ein Maß über $\mathbf{L}$ ist, welches nach einem Satz von Scott nicht selbst konstruktibel ist[16]. Er klärte damit die relative Konsistenz von $\mathsf{ZFC} + \mathsf{GCH} +$"es existiert eine meßbare Zahl" gegenüber ZF. Allerdings ist ein solches Modell eher von der Gestalt, ein *kanonisches* und *minimales Modell* für die Existenz einer gegebenen, in diesem Fall für eine meßbare, Zahl zu sein. Dagegen werden auf der anderen Seite Modelle gesucht, die wir als *Kernmodelle unterhalb einer gegebenen Zahl* bezeichnen können. Das sind Modelle, die in gewisser Weise sich möglichst wie $\mathbf{L}$ verhalten sollen; das ist natürlich nur begrenzt möglich, so daß man zumindest die entsprechenden[17] Bedingungen (a) bis (d) erfüllt haben möchte. So kann man $\mathbf{L}$ als ein solches Modell unterhalb $0^{\#}$ betrachten.

Diese beiden Arten von Modellen werden für zunehmend größere Kardinalzahlen konstruiert. So entwickelten Dodd und Jensen Mitte der 70er Jahre das Kernmodell unterhalb einer meßbaren Zahl[18], so daß dieses mit $\mathbf{L}[U]$ in dem oben genannten Verhältnis stehen, d.h. auf der einen Seite haben wir das Dodd-Jensen-Kernmodell und auf der anderen ein kanonisches und minimales Modell für eine meßbare Zahl. Dieses – wie auch alle anderen Kernmodelle – hängen von der Größe der existierenden Kardinalzahlen ab; so ist das Dodd-Jensen-Kernmodell nichts anderes als Gödels konstruktibles Universum selbst, falls $0^{\#}$ nicht existiert, oder es hat die Gestalt $\mathbf{L}[0^{\#}]$, falls $0^{\#}$, aber nicht $0^{\#\#}$ existiert[19]. Das läßt sich natürlich fortführen.

Diese Konstruktionen mußten immer wieder verallgemeinert werden, um möglichst große Zahlen realisieren zu können. Mitchell entwickelte Anfang der 70er Jah-

[15] Vergleiche [Si71].
[16] Vergleiche [Ka94].
[17] Dabei ergeben sich die entsprechenden Bedingungen, wenn man das konstruktible Universum durch das aktuelle Modell und in (d) zusätzlich $0^{\#}$ durch die entsprechende große Kardinalzahl ersetzt.
[18] Vergleiche [DoJen81].
[19] Vergleiche [Do82].

re SILVERs Konstruktion weiter[20], indem er Folgen von Ultrafiltern und Extender ins Spiel brachte. Ein paar Jahre später nutzte er Ideen von BALDWIN, um schließlich partielle Extender zu verwenden; seitdem haben Kernmodelle immer die Gestalt $\mathbf{L}[E]$, wobei E eine Folge von Extendern ist. Erste Probleme traten bei starken Zahlen auf. Ziel aktueller Forschung ist die Behandlung von WOODIN-Kardinalzahlen. Dabei ist man zumindest bei der Konstruktion eines geeigneten Kernmodells im obigen Sinne auf Grenzen gestoßen, da man mit Hilfe des stationären Turms[21] zeigen kann, daß man unter vorausgesetzter Existenz einer WOODIN-Kardinalzahl auf die Bedingung (c) verzichten muß. Konstruktionen geeigneter Modelle in den 80er und 90er Jahren gehen hauptsächlich auf Ideen von JENSEN, MARTIN, MITCHELL und STEEL zurück[22].

Wie oben schon angedeutet, werden in Abhängigkeit der Existenz großer Kardinalzahlen nicht immer alle der oben genannten Eigenschaften von $\mathbf{L}$ in einem solchen Kernmodell gelten können. Dennoch ist man bestrebt, eine eventuell schwächere Formulierung des Überdeckungslemmas nachzuweisen, etwa in der Form, daß für singuläre Kardinalzahlen die kardinalen Nachfolger absolut sind. Außerdem müssen beispielsweise neue Überlegungen für die Kondensationseigenschaft her, denn für ein $X \prec \mathbf{L}_\alpha[E]$ erhalten wir nur ein β und ein F, so daß $X \cong \mathbf{L}_\beta[F]$ gilt. So ohne weiteres ist dabei der Fall "$E = F$" nicht zu erwarten. Daher müssen neue Prinzipien geschaffen werden; in diesen Modellen wird der durch die obige Eigenschaft (f) gegebene Vergleichsprozeß durch *Iterationen* erreicht, wobei die Rolle der Ordinalzahlen im alten Vergleich jetzt durch ganze iterierbare Strukturen, sogenannte *Mäuse*, ersetzt wird. Diese Iterationstheorie, ursprünglich von KUNEN vorangetrieben[23], steht als Hilfsmittel für die Beantwortung von Fragen in der Kernmodelltheorie im Mittelpunkt der aktuellen Forschung.

Zum Schluß freue ich mich, einmal offiziell Worte des Dankes aussprechen zu können. Es gibt einige Personen, die ich an dieser Stelle erwähnen möchte, ohne die diese Arbeit gar nicht vorläge oder die mich einfach mit Rat und Beistand unterstützten. So möchte ich mich als erstes bei Herrn Prof. RONALD B. JENSEN bedanken, nicht nur für die Themenstellung, sondern auch für die unermütliche Unterstützung während meiner mengentheoretischen Ausbildung bis zum heutigen Tage. Er hat vor ein paar Jahren mein Interesse an der Mengenlehre geweckt und ich bin sehr froh, die Gelegenheit nutzen zu dürfen, ausgehend vom Überdeckungslemma, mehr zu diesem Thema in meiner Diplomarbeit formulieren zu können.

Sofort anschließen möchte ich meinen tiefsten Dank an Herrn Dr. MARTIN ZEMAN,

[20] Vergleiche [Mi84].
[21] Vergleiche [He97].
[22] Eine Einführung mit vielen Hinweisen auf weiterführende Literatur ist in [LöSt99] und [Mi94] zu finden.
[23] Vergleiche [Ku70] und [Ka94].

der meine ständigen Fragen immer mit einem freundschaftlichen Entgegenkommen beantwortete. Nicht vergessen möchte ich meine Kommilitonen Michael Bruening und Gunter Fuchs, da wir uns bisher gemeinsam durch die Höhen und Tiefen der auch in diese Arbeit eingehenden Feinstruktur gekämpft haben und die mich vor allem beim Korrekturlesen sehr unterstützt haben. Für die zahlreichen Diskussionen, die glücklicherweise aufgrund des Internets trotz räumlicher Trennung keine allzu großen Probleme darstellten, und nicht zuletzt für die Unterstützung beim stilgerechten Schreiben dieser Arbeit bin ich Herrn Benedikt Löwe zu großem Dank verpflichtet.

Notation

On	Klasse der Ordinalzahlen
V	Universum aller Mengen
L	GÖDELs konstruktibles Universum
$\lvert X\rvert$	Kardinalität einer Menge X
$\mathrm{otp}(X)$	Ordnungstyp einer Teilmenge X von Ordinalzahlen
$\sup(X)$	Supremum einer Teilmenge X von Ordinalzahlen
$\mathrm{lub}(X)$	kleinste obere Schranke einer Teilmenge X von Ordinalzahlen
$\mathcal{P}(X)$	Potenzklasse von X
$\mathrm{rnk}(x)$	Rang einer Menge in der VON NEUMANN-Hierarchie
$\mathrm{cf}(\kappa)$	Konfinalität von einer Limesordinalzahl κ
$[X]^{<\gamma}$	Klasse aller Teilmengen von $X \subseteq \mathrm{On}$ vom Ordnungstyp kleiner γ
$(X)^n$	Klasse der geordneten n-Tupel mit Elementen aus $X \subseteq \mathrm{On}$
$\mathrm{dom}(f)$	Definitionsbereich einer Funktion f
$\mathrm{rng}(f)$	Wertebereich einer Funktion f
$f\restriction X$	Einschränkung einer Funktion f auf den Definitionsbereich X
${}^{Y}X$	Klasse der Funktionen von Y, die in X abbilden
$R''X$	Klasse der y mit $\langle y,x\rangle \in R$
$\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$	n-stelliges geordnetes Paar
$\prec\alpha,\beta\succ$	GÖDEL-Paar bestehend aus den Ordinalzahlen α und β
$f : X \underset{\Sigma_n}{\longrightarrow} Y$	Funktion $f : X \longrightarrow Y$ erhält Σ_n-Formeln.

Bei den Formeln werde ich mich der üblichen Gratwanderei anpassen und freie Variablen unterdrücken. So sollte ich natürlich für eine Formel $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ mit den freien Variablen $x_1,\ldots,x_n$ in einer Anwendung mit Argumenten $y_1,\ldots,y_n$ ordungsgemäß etwa $\varphi(x_1,\ldots,x_n)[y_1,\ldots,y_n]$ schreiben; statt dessen werden die freien Variablen aus Gründen der Lesbarkeit bei der Nennung der Formel nur falls benötigt erwähnt und in der Verwendung nur $\varphi(y_1,\ldots,y_n)$ geschrieben. Hierbei verzichte ich sogar auf die Verwendung der eckigen Klammern, weil in späteren Kapiteln häufig Äquivalenzklassen als Argumente auftauchen, so daß sich eine unschöne Dopplung ergäbe: Typischerweise schreibt man für die Einsetzung von Mengen $a_1,\ldots,a_n$ in eine gegebene Formel $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ mit den freien Variablen $x_1,\ldots,x_n$ eigentlich

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$ oder zumindest $\varphi[a_1, \ldots, a_n]$, um einen Unterschied zwischen einer Formel in der gegebenen Sprache mit freien Variablen und der letztendlich verwendeten Formel mit ersetzten freien Variablen durch gegebene Objekte zu machen.

Etwas schwerer fiel mir, mich endlich durchzuringen, die englischen Begriffe ins Deutsche zu übersetzen. Mein Zögern begründete sich damit, daß die komplette etablierte Literatur über den größten Teil der Mengenlehre in englischer Sprache vorliegt und somit die Fachbegriffe meistens nicht in der Übersetzung geläufig sind; so fällt es zwar leicht, "ACCEPTABLE" mit "akzeptierbar" zu übersetzen, andererseits treten selbst seltene englische Wörter, wie "AMENABLE", schon übersetzt in deutscher Literatur auf. Unangenehm wird es bei Wortgruppen, mit der der Leser wie bei einem Namen sofort das gemeinte assoziiert, wie beispielsweise bei dem "FREQUENT EXTENSION OF EMBEDDINGS LEMMA". Ich habe mich entschieden, es dann schließlich mit "Lemma über die häufige Erweiterbarkeit" zu übertragen. Nicht ganz so leicht fiel mir die Übersetzung von "SOUND" durch "gesund", zumal es schon eine Übertragung innerhalb der Logik bei der Behandlung von mathematischen Theorien gibt, aber letztendlich bin ich der Meinung, daß man es rechtfertigen kann.

Außerdem habe ich versucht, die Übersicht in größeren Beweisen durch Kennzeichnung erster Vorkommen von Variablen am Rand zu steigern; dabei wurden natürlich nur *globale* Bezeichnungen beachtet, also Vorkommen, die nicht nur in den unmittelbar folgenden Zeilen auftauchen.

In dieser Arbeit wird innerhalb der ZERMELO-FAENKEL-Mengenlehre mit Auswahlaxiom in der üblichen Sprache der Mengenlehre mit dem einzigen nicht-logischen Zeichen $\dot{\in}$ gearbeitet, das wir dann mit der Epsilonbeziehung interpretieren. Benötigen wir eine Erweiterung dieser Sprache, dann werden wir es an geeigneter Stelle erwähnen.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir keine Einführung der jetzt folgenden grundlegenden Begriffe geben; vielmehr setzen wir die Grundlagen aus einer *üblichen* Vorlesungsreihe, die in die Welt der Mengenlehre einführt, voraus. Es werden nur die für das weitere Geschehen benötigten Aussagen gebracht, dazu auch noch (teilweise) ohne Beweis. Den Bereich der naiven Mengenlehre werden wir hier nicht weiter erwähnen, da dieser hinreichend in der Standard-Literatur[1] zu finden ist. Dennoch werden wir im Anschluß auf ausgewählte Teile noch einmal aufmerksam machen. Zunächst sei der grundlegende Satz von MOSTOWSKI erwähnt.

Theorem 1.1 (Isomorphiesatz von MOSTOWSKI**)** *Für jedes extensionale, fundierte und mengenähnliche System $\langle U, R\rangle$ gibt es genau eine transitive Menge V und einen Isomorphismus F mit $F : \langle U, R\rangle \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \langle V, \in \cap V^2\rangle$. Darüber hinaus ist F auf jeder transitiven Teilmenge von U die Identität und es genügt für beliebige $x \in U$ der Gleichung $F(x) = F\,''R\,''\{x\}$.*

Darüber hinaus werden wir einige Male Absolutheitsaussagen anwenden wollen. So sind Δ_1-Aussagen absolut für transitive Modelle, also auch die Fundiertheitseigenschaft[2]. An manchen Stellen werden wir Gebrauch von bekannten kombinatorischen Ideen machen, so sei etwa das folgende Lemma[3] erwähnt.

Lemma 1.2 (Delta-System Lemma) *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $\theta > \kappa$ regulär, so daß für alle $\alpha < \theta$ immer $|\alpha^{<\kappa}| < \theta$ ist. Dann existiert für eine beliebige Familie $\mathfrak{A}$ von Mengen, wobei $|\mathfrak{A}| \geq \theta$ und $(\,\forall x \in \mathfrak{A}\,)(\,|x| < \kappa\,)$ gelten,*

[1] Siehe [Dr74], [Bu96] und [Jec78]; weiterführend ist natürlich [Ka94] zu erwähnen.

[2] Die Fundiertheit einer Relation R ist offenbar sofort aufgrund der Nicht-Existenz einer unendlich oft R-absteigenden Folge Π_1; darüber hinaus können wir, um schließlich auch eine Σ_1-Formulierung zu bekommen, ausnutzen, daß wir genau für die fundierten Relationen auf Mengen eine Ordinalzahl finden, so daß wir die Relation (mit ihrer Grundmenge) in diese Ordinalzahl zusammen mit der Epsilonrelation einbetten können.

[3] Vergleiche [Ku80, Theorem 1.6].

eine Teilfamilie $\mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{B}$ gerade θ mächtig ist und ein Δ-System bildet, d.h. es existiert eine Wurzel r mit $x \cap y = r$ für beliebige x und y aus $\mathfrak{B}$.

Das konstruktible Universum spielt in dieser Arbeit eine wesentliche Rolle, so daß wir den grundlegenden Umgang voraussetzen und an dieser Stelle nicht weiter erwähnen. Einführende Gedanken sind in der Standard-Literatur[4] zu finden. Besondere Aufmerksamkeit sei noch einmal der relativen Hierarchie gewidmet, da es zwei Arten gibt, die wir für die vorliegende Arbeit bewußt trennen möchten.

Für eine Menge A können wir zwei konstruktible relative Universen betrachten, die in Anhängigkeit von A verschieden sein können. Bezeichne dazu $\mathbf{L}_0[A] := \varnothing$, $\mathbf{L}_{\alpha+1}[A] := \mathrm{Def}(\, \mathbf{L}_\alpha[A], A \cap \mathbf{L}_\alpha[A]\,)$, also die Menge von Teilmengen von $\mathbf{L}_\alpha[A]$, die über dieser Menge zusammen mit dem zusätzlichen Prädikat A definierbar sind, und für Limeszahlen λ setze $\mathbf{L}_\lambda[A] := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{L}_\alpha[A]$; die Vereinigung über alle Ordinalzahlen wird mit $\mathbf{L}[A]$ bezeichnet. Darüber hinaus definiere $\mathbf{L}_0(A) := \mathrm{TC}(A)$, der transitive Abschluß von A, $\mathbf{L}_{\alpha+1}(A) := \mathrm{Def}(\, \mathbf{L}_\alpha(A)\,)$ und für Limeszahlen λ erneut $\mathbf{L}_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{L}_\alpha(A)$, wobei die Vereinigung über alle Ordinalzahlen mit $\mathbf{L}(A)$ bezeichnet wird. Für uns wird vor allem die erste Hierarchie von Interesse sein. Nachdem wir uns dieser Klasse durch die obige Konstruktion von *unten* genähert haben, können wir diese auch *oben* wie folgt charakterisieren.

Bemerkung 1.3 *Die relative konstruktible Hierarchie $\mathbf{L}[A]$ ist die kleinste transitive Klasse $\mathcal{M}$, die Modell von ZF ist, $A \cap \mathcal{M}$ als Element und alle Ordinalzahlen enthält. Dagegen ist $\mathbf{L}(A)$ die kleinste transitive Klasse, die ein Modell von ZF ist, A als Element und alle Ordinalzahlen enthält.*

Damit sind auch schon Zusammenhänge und vor allem die Unterschiede zwischen beiden Klassen erkennbar; so ist offenbar $\mathbf{L}[\mathbb{R}] = \mathbf{L}$, aber für den Fall, daß es eine nicht-konstruktible reelle Zahl gibt, haben wir natürlich sofort $\mathbf{L}(\mathbb{R}) \neq \mathbf{L}$.

1.1 Spezielle Forcings

Für einführende Gedanken sei auf [Ku80] und [Bu96] verwiesen; so kann man dort beispielsweise für eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$ in einem Grundmodell $\mathcal{M} \models \mathsf{ZF}$, einem (über $\mathcal{M}$) $\mathbb{P}$-generischen Filter G, einer Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbb{P}$-Namen $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ auch das folgende nachlesen:

Lemma 1.4 *Die generische Erweiterung $\mathcal{M}[G]$ ist gleich dem kleinsten transitiven ZF-Modell mit $\{G\} \cup \mathrm{On}^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}[G]$.*

Lemma 1.5 ("Wahrheit ist Erzwingen") *Gilt $\mathcal{M}[G] \models \varphi(\, (\dot{y}_1)_G, \ldots, (\dot{y}_n)_G\,)$, dann existiert ein p in G mit $p \Vdash \varphi(\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)$.*

[4] Vergleiche [Dev84].

Lemma 1.6 ("Erzwingen ist Wahrheit") *Gilt* $p \Vdash \varphi(\dot{y}_1, \ldots, \ldots y_n)$, *dann auch* $\mathcal{M}[G] \models \varphi((\dot{y}_1)_G, \ldots, (\dot{y}_n)_G)$ *für jedes* G*, das* p *enthält.*

Lemma 1.7 *Für eine Bedingung* $p \in \mathbb{P}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $p \Vdash \varphi(\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)$.
- $(\forall q \leq q)(\, q \Vdash \varphi(\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)\,)$.
- $\{q \mid q \Vdash \varphi(\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)\}$ *liegt dicht unterhalb* p *in* $\mathbb{P}$.

Auch hier werden wir nur die im weiteren Verlauf benötigten Beispiele erwähnen. Die einfache und trotzdem sehr wichtige partielle Ordnung $\mathbf{Fn}(\kappa, \theta, \lambda)$, gegeben durch die Menge $\{p | p \text{ ist eine Funktion} \wedge |p| < \lambda \wedge \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \wedge \mathrm{rng}(p) \subseteq \theta\}$, welche nach [Ku80, Kapitel VII, Abschnitt 6] die $(\,|\theta|^{<\lambda}\,)^+$-Kettenbedingung erfüllt und für reguläres λ auch noch λ-abgeschlossen ist, generiert eine Surjektion von κ auf θ. Hiermit lassen sich nicht nur Kardinalzahlen kollabieren, sondern gleichzeitig auch Potenzmengen vergrößern. So gilt in einer generischen Erweiterung der partiellen Ordnung $\mathbf{Fn}(\kappa \times \lambda, 2, \lambda)$ immer $2^\lambda = \kappa$, falls $\lambda < \kappa$, λ regulär, $2^{<\lambda} = \lambda$ und $\kappa^\lambda = \kappa$. Damit können wir *endlich* viele Potenzen von regulären Kardinalzahlen in einer Erweiterung festlegen, indem wir schrittweise – mit der größten Zahl beginnend – die entsprechende obige partielle Ordnung anwenden[5].

Genau dieser Zwang, *rückwärts* gehen zu müssen, verbietet es, mit dieser Methode im Fall von unendlich vielen regulären Kardinalzahlen zum Ziel zu kommen. Die rettende Idee ist das *geschickte* Iterieren von partiellen Ordnungen. Wir haben gerade gesehen, daß das endliche Hintereinanderausführen keine Schwierigkeiten bereitet, doch im Limesfall müssen wir uns einer neuen Idee zuwenden. Dabei versucht man, das Nacheinanderausführen von zwei partiellen Ordnungen in *einer* zu kodieren, so daß man diesen Prozeß ins Transfinite verallgemeinern kann. Und tatsächlich, man kann eine solche Konstruktion für eine partielle Ordnungen $\mathbb{P}$ und einen $\mathbb{P}$-Namen $\dot{\mathbb{Q}}$ für eine partielle Ordnung angeben, die die gewünschten Bedingungen erfüllt; insbesondere wird es der Vorstellung gerecht, daß wir zuerst mit $\mathbb{P}$ und dann, ausgehend von $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$, mit der dort lebenden partiellen Ordnung, die dem Namen $\dot{\mathbb{Q}}$ entspricht, weiter erzwingen. Bezeichnet als *Sternprodukt* $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, ist es als Verallgemeinerung des Kreuzproduktes in der Tat, falls $\dot{\mathbb{Q}}$ schon ein Name für ein Objekt im Grundmodell ist, nichts anderes als das normale Kreuzprodukt selbst.

Mit Hilfe dieser Konstruktion können wir wie gewünscht unendlich viele partielle Ordnungen nacheinander wirken lassen. Doch bevor wir uns unendlichen Iterationen zu wenden, schauen wir uns den Sachverhalt im Endlichen an; in diesem Zusammenhang möchten wir an einer späteren Stelle mehrere FORCINGS miteinander vergleichen können, d.h. wir wollen eine Äquivalenz auf partiellen Ordnungen angeben, die ausdrücken soll, daß äquivalente Ordnungen das *gleiche* erzwingen.

[5]Für Erläuterungen siehe [Ku80, Theorem 6.18], inklusive den nachstehenden Anmerkungen.

Definition 1.8 *Wir nennen zwei partielle Ordnungen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ äquivalent, kurz $\mathbb{P} \simeq \mathbb{Q}$, wenn ihre zugehörigen* BOOLE*schen Algebren, die Vervollständigungen von $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{Q}$, isomorph sind.*

Dieses Konzept ist etwa in [Ku80] oder [Sh98] nachzulesen. Wir werden im Hinblick auf spätere Anwendungen lediglich die folgenden beiden Lemmata näher betrachten, die sich um endliche Iterationen kümmern.

Lemma 1.9 *Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{R}$ partielle Ordnungen, wobei sich $\mathbb{P}$ vollständig in $\mathbb{R}$ einbetten läßt. Dann existiert ein $\mathbb{P}$-Name $\dot{\mathbb{S}}$ einer partiellen Ordnung (über $\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$) mit $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{S}} \simeq \mathbb{R}$.*

Der Beweis ist in [Jec78] zu finden.

Lemma 1.10 *Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung. Dann gilt*[6]*:*

(a) *Wenn $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{\mathbb{Q}}$ ist eine partielle Ordnung.", so gilt $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) \times \mathbb{R} \simeq (\mathbb{P} \times \mathbb{R}) * \dot{\mathbb{Q}}$.*

(b) *Wenn $\mathbb{P}$ erzwingt, daß $\dot{\mathbb{Q}}$ eine partielle Ordnung und $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ erzwingt, daß $\dot{\mathbb{R}}$ eine partielle Ordnung ist, dann gilt $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) * \dot{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{P} * (\mathbb{Q} * \dot{\mathbb{R}})^{\cdot}$.*

Beweis: In der ersten Aussage geht wesentlich ein, daß wir keine Bedingungen aus $\mathbb{R}$ benötigen, um Fakten von $\dot{\mathbb{Q}}$ über $\mathbb{P}$ zu entscheiden. Grob gesagt ist auszunutzen, daß die partielle Ordnung $\mathbb{R}$ keine zusätzlichen Informationen über $\mathbb{Q}$ enthält. Nach Voraussetzung haben wir also einen $\mathbb{P}$-Namen $\dot{\mathbb{Q}}$. Wir definieren einen natürlichen $(\mathbb{P} \times \mathbb{R})$-Namen für diese partielle Ordnung

(1.1.1) $$\ddot{\mathbb{Q}} := \{\langle \dot{r}, \langle p, \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \rangle\rangle \mid \langle \dot{r}, p\rangle \in \dot{\mathbb{Q}}\}.$$

Wir definieren dann eine Abbildung $\pi : (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{P} \times \mathbb{R}) * \ddot{\mathbb{Q}}$ durch $\pi(\langle \langle p, \dot{q}\rangle, r \rangle) := \langle \langle p, r\rangle, \ddot{q} \rangle$, wobei $\ddot{q}$ entsprechend der Definition von $\ddot{\mathbb{Q}}$ aus $\dot{q}$ hervorgeht. Dann ist π ein Isomorphismus, denn es ist offenbar eine Surjektion und die Ordnungsrelation wird (in beiden Richtungen) respektiert.

Den zweiten Teil erhält man entweder durch eine analoge Analyse oder durch Anwendung bekannter Tatsachen über FORCING. Wir nutzen dazu das Lemma 1.9; da wir offenbar sowohl $\mathbb{P}$ in $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ als auch $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ in $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) * \dot{\mathbb{R}}$ einbetten können, ist somit auch $\mathbb{P}$ in $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) * \dot{\mathbb{R}}$ einbettbar. Dann garantiert das Lemma die Existenz eines $\mathbb{P}$-Namen $\dot{\mathbb{S}}$ für eine partielle Ordnung, so daß

(1.1.2) $$(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) * \dot{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{S}}$$

gilt. Was besagt diese Gleichung? Angenommen, wir haben schon mit der partiellen Ordnung $\mathbb{P}$ erzwungen, dann können wir formal zwei Universen betrachten,

[6] Hierbei ändern sich die Namen. Wir werden die gleiche Definition der partiellen Ordnung bezüglich verschiedener vorangehender partieller Ordnungen, und damit insbesondere auch mit verschiedenen Namen, mit dem gleichen (mit einem Punkt versehenden) Symbol schreiben.

einerseits $\mathbf{V}_1$ nach anschließenden Erzwingen mit $\dot{\mathbb{S}}$ und andererseits $\mathbf{V}_2$, das man erhält, wenn man nach $\mathbb{P}$ mit der durch $\dot{\mathbb{Q}}$ gegeben partiellen Ordnung und dann mit der durch $\dot{\mathbb{R}}$ gegeben FORCING-Relation erzwingt. Dann garantiert uns (1.1.2), daß sowohl in $\mathbf{V}_1$ als auch in $\mathbf{V}_2$ die gleichen Formeln gelten[7]. Aber damit ist unser Ziel erreicht, denn wir erhalten schließlich wie gewünscht $\mathbb{P}*(\mathbb{Q}*\dot{\mathbb{R}})^{\cdot} \simeq \mathbb{P}*\dot{\mathbb{S}} \simeq (\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}})*\dot{\mathbb{R}}$.

⊠(Lemma 1.10)

EASTON FORCING

Eine spezielle Form des iterierten FORCINGs wurde von EASTON betrachtet, um die Potenzen von unendlich vielen regulären Zahlen auf einmal zu ändern. Dabei hat man bis auf die beiden notwendigen Eigenschaften der Monotonie und der KÖNIG-Ungleichung $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ alle Freiheiten, so daß dieses FORCING optimal in seinen Eigenschaften ist. Wir sagen, daß eine Funktion E, deren Definitionsbereich eine Menge von regulären Kardinalzahlen ist, eine EASTON-*Indexfunktion* ist, wenn sie diesen beiden Bedingungen gerecht wird, d.h. $E(\kappa) \leq E(\lambda)$ für $\kappa \leq \lambda$ sind Kardinalzahlen und es gilt $\mathrm{cf}(E(\kappa)) > \kappa$.

Definition 1.11 *Sei E eine* EASTON-*Indexfunktion. Dann sei $\mathbb{P}^E$ die Menge aller Funktionen p, so daß*

- $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(E)$.
- *Für jedes $\kappa \in \mathrm{dom}(p)$ ist $p(\kappa) \in \mathbf{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$.*
- *Für jedes reguläre λ gilt $|\{\kappa \in \lambda \cap \mathrm{dom}(E) \mid p(\kappa) \neq 0\}| < \lambda$.*

Dann wird $\mathbb{P}^E$ – koordinatenweise mit der umgekehrten Inklusion geordnet – zur partiellen Ordnung und wir erhalten die folgenden Aussagen:

Lemma 1.12 *Sei E eine* EASTON-*Indexfunktion.*

- *Für eine beliebige Kardinalzahl λ setze $E^+_\lambda := E\restriction\{\kappa \mid \kappa > \lambda\}$ und $E^-_\lambda := E\restriction\{\kappa \mid \kappa \leq \lambda\}$, dann ist $\mathbb{P}^E$ zu $\mathbb{P}^{E^+_\lambda} \times \mathbb{P}^{E^-_\lambda}$ isomorph.*
- *Ist $\mathrm{dom}(E) \cap \lambda^+ = \varnothing$, so ist $\mathbb{P}^E$ auch λ^+-abgeschlossen.*
- *Gilt* GCH*, so erhält $\mathbb{P}^E$ Konfinalitäten (und damit insbesondere Kardinalitäten) und darüber hinaus haben wir für jedes $\kappa \in \mathrm{dom}(E)$ wie gewünscht $\mathbf{V}^{\mathbb{P}^E} \models 2^\kappa = E(\kappa)$. Es gilt sogar, daß in einer generischen Erweiterung der Wert 2^θ für eine beliebige unendliche Kardinalzahl θ bezüglich den vorhergehenden Werten und den beiden oben genannten notwendigen Bedingungen minimal ist.*

Beweise und Erläuterungen sind in [Ku80, Kapitel VIII, Abschnitt 4] nachzulesen.

[7]Das heißt natürlich gerade, daß die beiden FORCINGs äquivalent sind.

Levy-Kollaps

Wir wissen, daß wir mit der oben genannten partiellen Ordnung $\mathbf{Fn}(\kappa,\theta,\lambda)$ immer θ auf κ kollabieren können. Das ist eine sehr nützliche partielle Ordnung, doch hilft sie uns nicht viel, wenn wir unterhalb einer gegebenen Limeskardinalzahl alles kollabieren wollen, so daß diese Zahl selbst eine Kardinalzahl bleibt; in diesem Fall benutzt man die folgende partielle Ordnung:

Definition 1.13 (Levy-Ordnung) *Für eine beliebige Kardinalzahl κ und ein reguläres λ bezeichne* $\mathbf{Levy}(\kappa,\lambda)$ *die partielle Ordnung mit der Grundmenge* $\{\, p \mid p$ *ist eine Funktion* $\wedge\, |p| < \lambda \,\wedge\, \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa \times \lambda \,\wedge\, (\,\forall\langle\alpha,\xi\rangle \in \mathrm{dom}(p)\,)(\,\alpha > 0 \;\longrightarrow\; p(\alpha,\xi) \in \alpha)\,)\,\}$ *und mit der umgekehrten Inklusion geordnet.*

Lemma 1.14 *Seien $\lambda < \kappa$ gegeben.*

(a) $\mathbf{Levy}(\kappa,\lambda)$ *ist λ-abgeschlossen.*

(b) *Ist κ unerreichbar, dann erfüllt* $\mathbf{Levy}(\kappa,\lambda)$ *die κ-Kettenbedingung.*

Der Beweis läßt sich etwa in [Ka94, Lemma 10.17] nachlesen. Wir werden im weiteren Verlauf den Spezialfall $\lambda = \omega_1$ ausnutzen, so daß in einer generischen Erweiterung ω_1 erhalten bleibt und κ gerade das neue ω_2 wird[8].

Namba-Forcing

Ein weiteres Kollabierungsproblem läßt sich wie folgt beschreiben: Wir möchten eine partielle Ordnung angeben, die ω_2 eine abzählbare Konfinalität gibt, ohne ω_1 zu kollabieren. Dafür benötigen wir eine neue Konstruktion, die Namba und Bukowsky bereitstellten; ursprünglich war diese durch Sacks und Miller aber für Spezialfälle schon länger bekannt. Im folgenden werden wir diese partielle Ordnung, kurz mit Namba-Forcing oder nur **Nm** bezeichnet, etwas näher beleuchten, weil sie in der Literatur eher spärlich auftritt. Wir arbeiten dafür in einem $(\mathsf{ZF}+\mathsf{GCH})$-Modell $\mathcal{M}$ und werden das Problem gleich ein wenig allgemeiner fassen und nicht nur $\omega_2^{\mathcal{M}}$, sondern stattdessen eine in $\mathcal{M}$ beliebige reguläre Kardinalzahl $\tau > \omega_1^{\mathcal{M}}$ betrachten. In $\mathcal{M}$ arbeitend wird es nun unser Ziel sein, eine partielle Ordnung **Nm** zu finden, die keine neuen Teilmengen von ω hinzufügt, insbesondere daher ω_1 nicht verändert[9], aber in τ eine abzählbare und konfinale Folge generiert.

Definition 1.15 *Eine Teilmenge $t \subseteq \tau^{<\omega}$ heißt perfekt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

[8] Ein generischen Filter G kodiert für alle $0 < \alpha < \kappa$ eine Surjektion g_α von ω_1 auf α, definiert durch $g_\alpha(\xi) := \bigcup G(\alpha,\xi)$.

[9] Kollabierte **Nm** durch eine Abbildung f die Ordinalzahl $\omega_1^{\mathcal{M}}$ auf ω, so folgt aus der Existenz einer solchen Surjektion auch die Existenz einer neuen Teilmenge von ω, indem man etwa eine Relation $R \subseteq \omega \times \omega$ durch $n\,R\,m \;:\longleftrightarrow\; f(n) \in f(m)$ definiert, die dann nicht in $\mathcal{M}$ liegen kann, da wir sonst auch f bekämen.

(a) *t ist ein Baum, d.h. es gibt keine Lücken in t:* $(u \in t \wedge n < \mathrm{lh}(u)) \longrightarrow u{\restriction}n \in t$. *Hierbei ist die Baumordnung auf t kanonisch durch* $u \leq_t v \;:\!\longleftrightarrow\; u \subseteq v$ *definiert.*

(b) *Zu jedem Element $u \in t$ existiert eine Erweiterung $v \in t$, so daß $v \geq_t u$ ein Verzweigungspunkt in t ist, d.h. es existieren konfinal viele Verzweigungspunkte in t.*

(c) *Jeder Verzweigungspunkt in t hat τ-viele unmittelbare Nachfolger.*

Außerdem bilden wir für einen solchen Baum t den *Stamm* $\mathrm{stem}(t)$ von t als den Durchschnitt aller nicht verlängerbaren Pfade durch t, d.h. $\mathrm{stem}(t) := \{u \in t \,|\, (\forall v \in t)(v \leq_t u \vee u \leq_t v)\}$, wobei die Länge des Stammes $\mathrm{lh}(\mathrm{stem}(t))$ eines Baumes t gerade das Maximum der Längen der Elemente des Stammes sei[10].

Sei dann $\mathbf{Nm}$ die Menge der perfekten Teilbäume $t \subseteq \tau^{<\omega}$. Dann ist $\mathbf{Nm}$ eine partielle Ordnung, wobei $\leq_{\mathbf{Nm}}$ durch $p \leq_{\mathbf{Nm}} q \;:\!\longleftrightarrow\; p \subseteq q$ definiert ist; somit bilden perfekte Teilbäume gerade die Erweiterungen. Das ist auch im Sinne des Grundgedankens beim Erzwingen, denn wir fordern, daß eine Erweiterung in einem bestimmten Blickwinkel mehr Information enthalten muß. In unserem Fall stellen wir uns vor, daß die perfekten Bäume Funktionen von ω in τ approximieren; auf dem Stamm der Bedingung liegt der Funktionswert schon eindeutig fest, aber nach Verzweigungspunkten wird lediglich die Menge der möglichen Werte begrenzt. Damit charakterisiert eine Erweiterung eines Baumes, also eine Teilmenge desselben, die Funktionswerte einer möglichen Funktion genauer.

Definition 1.16 *Sei t ein perfekter Baum. Für ein $u \in t$ bezeichne $(t)_u$ den Teilbaum von t, der sich oberhalb von u in t mit einem geeigneten Stamm erstreckt, d.h.* $(t)_u := \{v \in t \,|\, v \leq_t u \vee u \leq_t v\}$.

Bemerkung 1.17 *Offensichtlich gilt für ein beliebiges $t \in \mathbf{Nm}$ und $u \in t$ immer $(t)_u \in \mathbf{Nm}$ und $(t)_u \leq_{\mathbf{Nm}} t$.*

Wir überlegen uns zunächst die gewünschte Konfinalitätseigenschaft. Sei also G ein (über $\mathcal{M}$) $\mathbf{Nm}$-generischer Filter. Dann ist G als Teilmenge von $\mathbf{Nm}$ wieder eine Menge von perfekten Bäumen. Betrachte für beliebige natürliche Zahlen n die Mengen $\Delta_n := \{t \in \mathbf{Nm} \,|\, \mathrm{lh}(\mathrm{stem}(t)) \geq n\}$; dann liegen diese Mengen offenbar aufgrund der Bemerkung 1.17 dicht in $\mathbf{Nm}$, denn für einen gegebenen Baum t können wir immer ein Element $u \in t$ mit $\mathrm{lh}(u) > n$ finden und anschließend $(t)_u \in \Delta_n$ betrachten.

Aufgrund der Generizität von G existieren dann Bedingungen $p_n \in G \cap \Delta_n$, so daß aber aufgrund der paarweisen Kompatibilität der Elemente von G der Stamm von

[10] Das Maximum existiert dabei, weil der Stamm eines perfekten Baumes endlich ist, da wir zumindest einen (und damit viele) Verzweigungspunkt(e) haben.

p_{n_1} eine Teilmenge des Stammes von p_{n_2} ist, falls die Länge des Stammes von p_{n_1} nicht größer ist als die von p_{n_2}. Bezeichne g den Durchschnitt der Bäume p_n, dann ist g offenbar aufgrund der Definition der Δ_n eine Funktion von ω in τ.

(1.1.3) Der Wertebereich von g liegt konfinal in τ.

Beweis von (1.1.3): Läge $\mathrm{rng}(g)$ beschränkt in τ, etwa durch $\kappa < \tau$, dann liegt die Menge $\Delta := \{t \in \mathbf{Nm} | (\forall u \in t \backslash \mathrm{stem}(t))(\forall n \in \mathrm{lh}(u) \backslash \mathrm{lh}(\mathrm{stem}(t)))(u(n) \in \tau \backslash \kappa)\}$ offenbar dicht in $\mathbf{Nm}$, da man die Äste mit den zu kleinen Werten einfach abschneiden kann; der so gestutzte Baum ist aufgrund der Eigenschaften immer noch perfekt, weil wir an Verzweigungspunkten nur in τ beschränkt viele Äste vernachlässigen, so daß immer noch τ-viele Nachfolger übrig bleiben. Dann muß aber ein solcher Baum $t \in \Delta$ auch schon in G existieren, so daß aufgrund der paarweisen Kompatiblität für ein beliebiges und g im obigen Sinne approximierendes Element p_n eine gemeinsame Erweiterung von t und p_n existiert. Wählte man n größer als die Länge des Stammes von t, dann bezeugt diese gemeinsame Erweiterung, daß es auf dem Stamm von p_n und damit schließlich auch in g Werte oberhalb von κ geben muß. Widerspruch! ⊠ (1.1.3)

Es bleibt noch, den Erhalt der Potenzmenge von ω zu zeigen. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Für zwei verschiedene Punkte in einem Baum nennen wir den eindeutig bestimmten Verzweigungspunkt der beiden Pfade von der Wurzel zu dem jeweiligen Punkt den *gemeinsamen Anteil* der beiden, so daß wir eine geeignete Indizierung finden, die durch die jetzt zu definierende Abbildung σ gegeben ist. Dabei wird die Indexmenge gerade ${}^{<\omega}\tau$ sein, aufgefaßt als Baum mittels der Inklusionsbeziehung.

Definition 1.18 *Sei $t \in \mathbf{Nm}$ ein perfekter Baum, dann heißt eine Abbildung $\sigma : {}^{<\omega}\tau \longrightarrow t$ eine gute Einbettung, falls für beliebige $x, y \in {}^{<\omega}\tau$ und $i, j < \tau$ gilt:*

- *Wenn $x \leq y$, dann auch $\sigma(x) \leq_t \sigma(y)$.*
- *$\sigma(x)$ ist immer ein Verzweigungspunkt in t.*
- *Der gemeinsame Anteil von $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ in t hat immer die Gestalt $\sigma(z)$ für geeignetes z.*
- *$t_{(\,\sigma(x^\frown\langle i\rangle)\,)}$ und $t_{(\,\sigma(x^\frown\langle j\rangle)\,)}$ sind für $i \neq j$ unverträglich.*

Für eine solche gute Einbettung können wir die dadurch entstehende Ausdünnung von t betrachten. Diese wird sich als ein perfekter Baum entpuppen. Wir bezeichnen diese Ausdünnung trotz der vorhandenen Abbildung σ mit $\sigma(t)$, da Verwirrungen nicht zustande kommen können und wir durch *Anwendung* dieser Abbildung auf t gerade eine solche Ausdünnung erhalten. Definiere daher $\sigma(t) := \{u \in t \mid (\,\exists x \in {}^{<\omega}\tau\,)(\,u \leq_t \sigma(x)\,)\}$, d.h. wir nehmen den Teilbaum von t, der durch die Punkte in

$\operatorname{rng}(\sigma)$ aufgespannt wird, so daß wir schließlich folgende Darstellung dieser Menge erhalten:

$$\sigma(t) = \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{x \in {}^n\tau} t_{(\sigma(x))} = \bigcup_{y \in {}^\omega\tau} \bigcap_{n<\omega} t_{(\sigma(y \restriction n))}. \tag{1.1.4}$$

Beweis von (1.1.4): Für die zweite Gleichung betrachten wir zuerst ($\subseteq$): Sei also ein u in der linken Menge gegeben, d.h. für beliebiges n gibt es immer eine Folge x der Länge n, so daß $u \in t_{(\sigma(x))}$ liegt. Da diese Objekte offenbar mit wachsendem n immer kleiner werdene Teilmengen bilden, bei denen der Stamm jedesmal echt größer wird, können wir uns ein n wählen, so daß u schon auf dem Stamm von $t_{(\sigma(x))}$ liegt. Aber dann können wir dieses x zu einem beliebigen $y \in {}^\omega\tau$ erweitern, so daß offenbar u in jedem der $t_{(\sigma(y\restriction n))}$ liegt. Die Richtung ($\supseteq$) ist offensichtlich erfüllt, weil wir einfach $x := y\restriction n$ ansetzen können. Mit diesen Argumenten ist auch die erste Gleichung ersichtlich, denn in $\sigma(t)$ zu liegen, bedeutet gerade, auf dem Stamm eines geeigneten $t_{(\sigma(x))}$ zu sein, so daß wir eine beliebige Erweiterung $y \in {}^\omega\tau$ von x nehmen können, die bezeugt, daß das gegebene Element in der rechten Menge liegt.

$\boxtimes$ (1.1.4)

Die Konstruktion von $\sigma(t)$ aus den einzelnen Bäumen $t_{(\sigma(x))}$ wird als *Fusion* derselben bezeichnet. Wir erhalten dann ganz allgemein das folgende Lemma, welches in entsprechender Formulierung für alle partiellen Ordnungen über Bäume nachgewiesen werden kann.

Lemma 1.19 (Fusionslemma) *Sei $\{s_x \mid x \in {}^{<\omega}\tau\}$ eine Familie von perfekten Bäumen, so daß sie die Ordnung respektieren, d.h. für $x \leq y$ gilt immer $s_x \leq s_y$ und $s_{x^\frown\langle i\rangle}$ und $s_{y^\frown\langle j\rangle}$ sind unverträglich in* **Nm**. *Darüber hinaus strebe die Stammlänge der $s_{x\restriction n}$ für aufsteigende natürliche Zahlen n gegen unendlich und es existiere für jedes $x \in {}^{<\omega}\tau$ und beliebige natürliche Zahlen n auf dem Ast zwischen $s_{x\restriction n}$ und $s_{x\restriction(n+1)}$ nur genau ein Verzweigungspunkt der Fusion $\bigcap_{n<\omega}\bigcup_{x\in {}^n\tau} s_x = \bigcup_{y\in {}^\omega\tau}\bigcap_{n<\omega} s_{y\restriction n}$. Dann ist diese sogar ein perfekter Baum.*

Beweis: Die Gleichung für die Fusion folgt aus der gleichen Argumentation wie oben, da wir mit den geforderten Voraussetzungen genau die benötigte Situation geschaffen. Daß die Fusion von Bäumen wieder ein Baum ist, sieht man sehr leicht. Entscheidend sind die beiden anderen Eigenschaften: es existieren konfinal viele Verzweigungspunkte und alle Verzweigungspunkte haben τ viele unmittelbare Nachfolger.

Für das erste Ziel nehmen wir uns ein Element in der Fusion her, dann liegt bei der Betrachtung der zweiten Darstellung dieses Element auf einem Zweig, der sich durch $\bigcap_{n<\omega} s_{x\restriction n}$ für ein $x \in {}^{<\omega}\tau$ darstellen läßt. Sei dann $n < \omega$ aufgrund der Grenzwertvoraussetzung derart minimal gewählt, so daß das gegebene Element auf dem Stamm von $s_{x\restriction n}$ liegt. Betrachte nun ein $y \in {}^{<\omega}\tau$, welches sich nur an der

n-ten Stelle von x unterscheidet, dann generiert dieses y natürlich selbst auch einen Zweig in der Fusion, der aber wegen der Unverträgllichkeitsbedingung nicht der gleiche wie der von x sein kann, so daß wir einen Verzweigungspunkt erhalten, der, weil das ursprüngliche Element auch auf dem von y generierten Zweig liegt, wie gewünscht oberhalb desselben liegen muß. Nun gibt es aber τ viele Möglichkeiten, ein solches y zu wählen, so daß wir offenbar auch τ viele Nachfolger erhalten, weil alle Verzweigungen durch den eindeutig bestimmten Knoten gehen müssen.

⊠(Lemma 1.19)

Die etwas störende Forderung bei der Definition einer guten Einbettung bezüglich der Wahl von $\sigma(x)$ als spezielle Verzweigungspunkte bzw. im letzten Lemma die Bedingung, daß sich auf dem letzten Teil des Stammes von $s_{x\restriction n+1}$, der nicht zum Stamm von $s_{x\restriction n}$ gehört, sich nur *ein* Verzweigungspunkt aus der entstehenden Fusion befinden darf, hat seinen Ursprung in der Normierung unserer Bedingungen in $\mathbf{Nm}$, indem wir forderten, daß jeder Verzweigungspunkt immer τ-viele unmittelbare Nachfolger besitzen soll. Schwächten wir das beispielsweise ab, indem wir nur definierten, daß es immer konfinal viele solche Punkte geben soll, dann zeigt der letzte Beweis, daß wir ohne diese zusätzliche Forderung auskommen könnten[11].

Dennoch hat diese normierte Form Vorteile in der Bequemlichkeit und die bewiesene Version reicht für unsere Anwendungen vollkommen aus. Jetzt können wir uns mit diesen Vorbereitungen auch endlich dem eigentlichen Ziel zu wenden. Sei dazu eine Teilmenge von ω, die in $\mathbf{V}^{\mathbf{Nm}}$ existiert, gegeben, d.h. wir fixieren ein $\tilde p \in \mathbf{Nm}$ mit $\tilde p \Vdash_{\mathbf{Nm}} \dot f : \omega \longrightarrow 2$ und zeigen, daß die Menge der Bedingungen p'', für die es eine Funktion h im Grundmodell mit $p'' \Vdash \dot f = \check h$ gibt, dicht unterhalb $\tilde p$ liegt. Damit ist eine beliebige Teilmenge von ω in einer generischen Erweiterung schon im Grundmodell zu finden.

p Sei also ein $p \le \tilde p$ gegeben; wir konstruieren zunächst eine Erweiterung $p' \le p$ mit Hilfe einer guten Einbettung $\sigma : {}^{<\omega}\tau \longrightarrow p$, indem wir dann $p' = \sigma(p)$ ansetzen, so daß zusätzlich für jedes $x \in {}^n\tau$ die Bedingung $p_{(\sigma(x^\frown\langle i\rangle))}$ schon den Funktionswert von $\dot f(n)$ entscheidet. Solch eine gute Einbettung erhalten wir schrittweise.
σ, p^x Sei $\sigma(x)$ jeweils für $x \in {}^{<\omega}\tau$ der erste Verzweigungspunkt in p^x, wobei $p^\varnothing := p$ und $p^{x^\frown\langle i\rangle} \le p^x_{(\xi_i)}$; dabei ist $\{\xi_i \mid i < \tau\}$ eine fixierte Aufzählung der unmittelbaren Nachfolger von $\sigma(x)$ in p (oder äquivalent: in p^x), so daß diese den Wert von $\dot f(\mathrm{lh}(x))$ entscheidet. Somit ist σ offenbar eine gute Einbettung und darüber hinaus sind auch die Voraussetzungen für das Fusionslemma 1.19 erfüllt, so daß
p' $p' := \sigma(p) = \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{x\in {}^n\tau} p^x = \bigcup_{y\in {}^\omega\tau} \bigcap_{n<\omega} p^{y\restriction n}$ wieder einen perfekten Baum dar-

[11]Wir könnten unter Ausnutzung der Regulatität von τ das Schubfachprinzip für die Verteilung von τ-vielen Objekten in ω-vielen Stufen anwenden.

stellt[12], der sogar alle Funktionswerte von $\dot{f}$ entscheidet, denn sonst existierte eine Erweiterung $q \leq p'$ und dafür eine natürliche Zahl n, so daß q bereits den Wert $\dot{f}(n)$ nicht entscheidet, da aber alle p^x mit $\mathrm{lh}(x) = n+1$ den Wert von $\dot{f}(n)$ entscheiden und für q als Erweiterung von $\sigma(p)$ ein solches x mit $q \cap p^x \neq \varnothing$ existiert[13], erhalten wir schließlich eine gemeinsame Erweiterung, die dann aber Widersprüche erzwänge.

Betrachte nun für ein $h : \omega \longrightarrow 2$ aus dem Grundmodell ein Spiel G_h, das wie folgt definiert ist: Spieler I spielt Teilmengen X_n von τ und Spieler II antwortet jeweils mit einer Ordinalzahl $i_n < \tau$, so daß $|X_n| < \tau$, $i_n \notin X_n$ und $p_{(\,\sigma(\langle i_j \mid j \leq n\rangle)\,)} \Vdash \dot{f}(n) = \check{h(n)}$ gelten; dabei gewinnt Spieler II genau dann, wenn das Spiel nicht nach endlich vielen Runden unterbrochen werden muß, weil die Bedingungen nicht mehr erfüllt werden konnten. Damit ist G_h offenbar determiniert, da ein Verlieren von Spieler II schon nach endlich vielen Runden feststünde[14].

(1.1.5) Dann gibt es aber eine solche Funktion h im Grundmodell, so daß Spieler II eine Gewinnstrategie im Spiel G_h hat.

Beweis von (1.1.5): Nehmen wir an, daß es für jedes solche h eine Gewinnstrategie S_h für den Spieler I in G_h gibt, d.h. für einen gegebenen Spielverlauf $\langle X_n \mid n < m\rangle$ und $\langle i_n \mid n < m\rangle$ sei $S_h(\langle X_n \mid n < m\rangle, \langle i_n \mid n < m\rangle)$ gerade der m-te Spielzug von Spieler I. Offenbar spielen die X_n für die Bedingungen an dieser Stelle keine Rolle mehr, so daß wir uns auf den Verlauf von Spieler II beschränken können, somit schreiben wir nur kurz $S_h(\langle i_n \mid n < m\rangle)$. Setze dann $S(x) := \bigcup_h S_h(x)$, dann gilt offenbar $S(x) \subseteq \tau$ und auch $|S(x)| < 2^\omega \cdot \tau = \omega_1 \cdot \tau = \tau$, so daß wir S als Strategie für Spieler I auffassen können. Dann ist aber S sofort nach Konstruktion sogar eine Gewinnstrategie für *alle* Spiele G_h für Abbildungen h aus dem Grundmodell. Insbesondere gewinnt Spieler I das Spiel $G_{\overline{h}}$, wobei $\overline{h}(n) := 1 - k$, falls $p_{(\,\sigma(\langle i_0,\ldots,i_{n-1}\rangle)\,)} \Vdash \dot{f}(n) = \check{k}$, wobei die Folge $\langle i_n \mid n < \omega\rangle$ derart gewählt wird, daß $i_n \notin S(i_0, \ldots, i_{n-1})$ ist. Aber dieses Spiel gewinnt dann offenbar Spieler II, so daß wir einen Widerspruch erhalten. ⊠ (1.1.5)

Sei dann h eine solche Abbildung, deren Existenz wir gerade nachgewiesen haben, h
und S eine Gewinnstrategie für Spieler II in G_h, d.h. für einen Spielverlauf $\langle X_n | n < m\rangle$ und $\langle i_n | n < m\rangle$ und einer Vorgabe X_m von Spieler I gilt $S(\langle X_n | n \leq m\rangle, \langle i_n | n < m\rangle) \notin X_m$. Dabei hängt der Spielverlauf nach Definition des Spiels G_h vor der Stufe m für die Wahl in dieser m-ten Stufe erneut nicht von den X_n, sondern nur von

[12] Die beiden zuletzt behaupteten Gleichungen sind sehr leicht aufgrund der gegebenen Konstruktion einzusehen.

[13] Aufgrund der oben genannten beiden Darstellungsmöglichkeiten von p' haben wir die Freiheit, einerseits zur Anwendung des Fusionslemmas die Beschreibung durch die $p_{(\sigma(x))}$, andererseits für die benötigten Eigenschaften jetzt die Darstellung durch die gegebenen p^x zu nutzen.

[14] Das bekommt man als Korollar (vom Beweis) des bekannten Satzes über die Determiniertheit von offenen bzw. abgeschlossenen Mengen von Gale und Stewart, vergleiche [Ka94].

den i_n für $n < m$ ab, so daß wir annehmen können, daß S als Gewinnstrategie für den Spieler II schon die Antworten aus den i_n und der Vorgabe vom ersten Spieler X_m berechnet, d.h. $S(\langle i_n \mid n < m\rangle, X_m) \notin X_m$. Wir können jetzt erneut den Baum p' zu einer Bedingung p'' ausdünnen, so daß schließlich wie gewünscht $p'' \Vdash \dot{f} = \check{h}$ gilt. Damit wäre unser Ziel erreicht.

Eine solche Erweiterung erhalten wir erneut mit dem Prinzip der guten Erweiterung; dazu konstruieren wir wieder eine Abbildung $\sigma' : {}^{<\omega}\tau \longrightarrow p$ und eine Folge $\langle p'_x \mid x \in {}^{<\omega}\tau\rangle$, so daß $\sigma'(x)$ der erste Verzweigungspunkt in p'_x ist und p'_x erzwingt, daß $\dot{f}$ und h bis $\mathrm{lh}(x)$ übereinstimmen. Setze dazu $p'_\varnothing := p$ und $p'_{x^\frown\langle i\rangle} := p_{(\sigma(x^\frown\langle i\rangle))}$, falls $i = S(x, X)$ für ein geeignetes $X \subseteq \tau$ ist, und undefiniert im anderen Fall. Dann gilt im ersten Fall nach Konstruktion des Spiels mit der Gewinnstrategie für Spieler II gerade $p'_{x^\frown\langle i\rangle} \Vdash \dot{f}(\mathrm{lh}(x)) = (h(\mathrm{lh}(x)))\check{}$.

σ', p'_x

Wir wollen anschließend das Fusionslemma anwenden, um zu sehen, daß die Fusion wieder ein perfekter Baum ist. Um dafür die Voraussetzungen zu erfüllen, müssen wir die Indizierung derart ändern, so daß keine undefinierten Fälle auftreten; das ist aber wegen $|\{S(\alpha, X) \in \tau \mid X \in [\tau]^{<\tau}\}| = \tau$ kein Problem. Diese Gleichung gilt, denn falls die Mächtigkeit echt kleiner τ wäre, dann bekommt man über ein Diagonalargument einen Widerspruch, da die ganze Menge dann selbst ein solches X wäre. Jetzt klärt sich auch auf, warum wir von p starten und trotzdem eine Erweiterung von p' erhalten, wir dünnen nämlich mit σ den Baum p auf die gleiche Weise aus wie wir p' erhalten haben, allerdings müssen diesmal nicht *alle* alten σ-Wegpunkte durch p aufgrund der Neuindizierung benutzt werden.

Mit Hilfe dieser Überlegungen können wir also annehmen, daß für *alle* x immer $p'_x \Vdash \dot{f}\restriction\mathrm{lh}(x) = (h\restriction\mathrm{lh}(x))\check{}$ gilt. Damit erfüllt dann $p'' := \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{x\in{}^n\tau} p'_x = \sigma'(p') \in$ **Nm** die gewünschte Bedingung $p'' \Vdash \dot{f} = \check{h}$, denn sonst existierte eine Erweiterung $q \leq p''$ mit $q \Vdash \dot{f} \neq \check{h}$, d.h. es existiert eine natürliche Zahl n mit $q \Vdash \dot{f}(n) \neq h\check{(n)}$. Betrachten wir die Konstruktion von p'', so finden wir ein $x \in \tau^n$, so daß $q \cap p'_x$ nicht leer ist, womit wir erneut eine Bedingung bekämen, die dann sowohl die Gleich- als auch die Ungleichheit von $\dot{f}(n)$ und $h\check{(n)}$ erzwänge. Widerspruch! Somit werden durch **Nm** keine neuen Teilmengen von ω generiert.

Iteriertes Forcing

Bei den Iterationen gibt es spezielle Konstruktionen, die garantieren, daß gewisse Eigenschaften die Limesschritte *überleben*. Das ist ein ganz wesentlicher Punkt in der Problemstellung, auch wenn wir an dieser Stelle nur die grundlegende Definition bringen werden.

Definition 1.20 *Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ ein Ideal, das alle endlichen Teilmengen von α enthält. Dann ist $\langle \mathbb{P}_i, \dot{\mathbb{Q}}_i :< \alpha\rangle$ eine* Forcing*-Iteration der Länge α mit Trägern in*

$\mathcal{I}$, falls jedes $\mathbb{P}_i$ eine partielle Ordnung ist, deren Elemente Folgen der Länge i sind, so daß für jedes solche Element die Einschränkung auf einen früheren Level $j < i$ selbst wieder Element von $\mathbb{P}_j$ ist. Die $\dot{\mathbb{Q}}_i$ sind $\mathbb{P}_i$-Namen für partielle Ordnungen, wobei für $\langle q_j \mid j < i\rangle$ die q_j aus $\mathrm{dom}(\mathbb{Q}_j)$ *stammen. Außerdem müssen noch folgende Bedingungen erfüllt sein, wobei* $\mathrm{supp}(\langle p_j | j < i\rangle) := \{j < i | p_j \neq 1\!\!1_{\mathbb{P}_j}\}$ *der sogenannte Träger*[15] *von $\langle p_j \mid j < i\rangle$ ist:*

- $\mathbb{P}_0 = \langle 1, 0\rangle$, *die triviale partielle Ordnung.*
- *Wenn $p = \langle q_j \mid j \leq i\rangle$, dann ist p genau dann in $\mathbb{P}_{i+1}$, wenn $p{\restriction}i$ in $\mathbb{P}_i$ und q_i in* $\mathrm{dom}(\dot{\mathbb{Q}})$ *liegen und zusätzlich $p{\restriction}i \Vdash_{\mathbb{P}_i} q_i \in \dot{\mathbb{Q}}_i$ gilt.*
- *Für eine Limeszahl λ und $\langle q_j \mid j < \lambda\rangle$ ist p genau dann in $\mathbb{P}_\lambda$, wenn für jedes $i < \lambda$ immer $p{\restriction}i \in \mathbb{P}_i$ und* $\mathrm{supp}(p) \in \mathcal{I}$ *gelten.*

Dann gelte für $\overline{p}, p \in \mathbb{P}_\alpha$ die Ordnungsrelation $\overline{p} \leq p$, wenn jeweils $\overline{p}{\restriction}i \leq_{\mathbb{P}_i} p{\restriction}i$ für alle $i < \alpha$ gilt.

Dabei ist die Wahlfreiheit des Ideals gerade der entscheidene Punkt. Wir sagen, daß wir eine Iteration mit *vollen Limiten* haben, falls $\mathcal{I} = \mathcal{P}(\alpha)$ gilt; eine Iteration mit *endlichen (abzählbaren) Trägern*, falls $\mathcal{I} = \{X \subseteq \alpha \mid X$ ist endlich (höchstens abzählbar)$\}$ ist.

Der Vorteil in den Erhaltungseigenschaften wird beispielswiese deutlich, wenn man sich überlegt, daß Iterationen mit endlichen Trägern die κ-Kettenbedingung für reguläres $\kappa > \omega$ erhält. Bei Iterationen mit abzählbaren Trägern muß man schon mehr fordern, um beispielsweise Kardinalzahlen zu erhalten[16]. Für weitergehende Information sei auf [Ku80, Kapitel VIII, Abschnitt 5] verwiesen. Mit diesem Überblick sollten wir alle nötigen Vorbemerkungen betreffs FORCING gebracht haben; die im siebten Kapitel eingehende Variation einer Iteration mit abzählbaren Träger, nämlich SHELAHs RCS-Iteration, werden wir an dieser Stelle nicht einflechten. Zum einen spränge es den Umfang der Arbeit, einen vernünftigen Abriß dieser Konstruktion zu bringen, zum anderen werden wir nötige Bestandteile später an Ort und Stelle klären.

1.2 Grundgedanken der Feinstruktur für L

Gerade dieses Kapitel läßt sich natürlich nicht so einfach in ein paar Zeilen aufschreiben. In diesem Abschnitt werden wir die feinstrukturellen Mittel wiederholen, die wir benötigen werden; für Beweise schaue man in die einführende Literatur in dieses Gebiet; Anfänge sind zu finden in [Jen72] und [Dev84]. Besonders verwiesen

[15] Wir orientieren uns bei der Bezeichnung an der üblichen englischen Variante SUPPORT.

[16] Vergleiche [Ku80, Kapitel VIII, Abschnitt 7] und [Jec86].

sei diesbezüglich auf das sehr schön lesbare erste Kapitel (besonders der erste Abschnitt) von [Ze97]. Dort sind auch fehlende Beweise des folgenden Abschnittes zu finden[17].

Doch bevor wir mit der eigentlichen Feinstruktur beginnen, zählen wir noch einige Aussagen über die gewöhnliche $\mathbf{L}_\alpha$-Hierarchie auf, die wir im folgenden gelegentlich anwenden werden, ohne es ausdrücklich zu zitieren. Dafür bezeichne KP das Kripke-Platek-Axiomensystem, das aus dem Paarmengenaxiom, dem Vereinigungsaxiom, dem Unendlichkeitsaxiom, dem Axiom über das kartesiche Produkt, dem Extensionalitätsaxiom, dem $\in$-Induktionsschema, dem Beschränktheitsaxiom für Σ_0- und dem Aussonderungsaxiom für Σ_0-Formeln besteht. Damit ist es eine Abschächung von ZF. Für Details schaue man in [Dev84, Kapitel 1, Abschnitte 9 und 11].

Wir nennen eine Relation R für eine Klasse von Modellen $\mathfrak{M}$ *uniform* definierbar, wenn es eine (parameterfreie) Formel $\varphi(\dot{x})$ gibt, so daß für beliebiges $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ und beliebige $x \in \mathcal{M}$ genau dann $x \in R$ gilt, wenn $\mathcal{M} \models \varphi(x)$. Damit existiert also bezüglich der gegebenen Klasse von Modellen eine gleichmäßige (parameterfreie) Definitionsvorschrift für die gegebene Relation. Man verzichtet meistens auf die Nennung der Klasse $\mathfrak{M}$, wenn es der Zusammenhang erlaubt; in unserer Anwendung wird $\mathfrak{M}$ die Rolle der $\mathbf{L}_\alpha$- bzw. $\mathbf{J}_\alpha$-Stufen übernehmen. Die Beweise der folgenden beiden Lemmata sind in [Dev84, Kapitel II] zu finden.

Lemma 1.21 (Gödels Paarfunktion) *Es gibt eine Δ_1^{KP}-Formel $\varphi(v_0, v_1, v_2)$, so daß für $G = \{\langle\gamma, \langle\alpha, \beta\rangle\rangle \mid \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\}$ gilt:*

- *G ist uniform $\Sigma_1(\mathbf{L}_\alpha)$ für Limeszahlen $\alpha > \omega$.*
- *$G : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \longleftrightarrow \mathrm{On}$.*
- *$G(\alpha, \beta) \geq \min(\alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$.*

Lemma 1.22 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- *Die Formel "$v_0 = \mathrm{Def}(v_1)$" ist Σ_1 und Δ_1^{KP}.*
- *Die Funktion "Def" ist uniform $\Delta_1(\mathbf{L}_\alpha)$ für Limeszahlen $\alpha > \omega$.*
- *Die Formel "$v_0 = \mathbf{L}_{v_1}$" ist Δ_1^{KP}.*
- *Die Funktion $\beta \mapsto \mathbf{L}_\beta$ ist uniform $\Delta_1(\mathbf{L}_\alpha)$ für Limeszahlen $\alpha > \omega$.*
- *Für beliebige α ist $(\,\mathbf{L}_\alpha\,)^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_\alpha$; insbesondere gilt $(\,\mathbf{L}\,)^{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$.*

[17] Im wesentlichen entspricht der nachfolgende Aufbau der Struktur der Einführung von [Ze97]. Damit sollte ein Nachlesen von Beweisideen unproblematisch sein.

- *Für Limeszahlen $\alpha > \omega$ und für beliebige $\beta < \alpha$ gilt $(\mathbf{L}_\beta)^{\mathbf{L}_\alpha} = \mathbf{L}_\beta$; insbesondere ist $(\mathbf{L})^{\mathbf{L}_\alpha} = \mathbf{L}_\alpha$.*

- *Die Formel "v_0 ist konstruktible." ist Σ_1^{KP}.*

- *Die Relation "$x_0 <_{\mathbf{L}} v_1$" ist $\Delta_1(\mathbf{L}_\alpha)$ für Limeszahlen $\alpha > \omega$.*

- *Bezeichne* $\mathrm{pr}(x)$ *die Menge der $<_{\mathbf{L}}$-Vorgänger von x, dann ist für Limeszahlen $\alpha > \omega$ die Funktion "*pr*" uniform Δ_1^{KP} und mit x ist auch* $\mathrm{pr}(x)$ *in $\mathbf{L}_\alpha$.*

- *Es existiert eine Σ_1-Formel $\varphi(v_0, v_1)$, die absolut für $\mathbf{L}$ ist, so daß* $\mathsf{KP} \vdash$ *"Wenn $F = \{\langle x, \alpha\rangle \mid \varphi(x, \alpha)\}$, dann $F : \mathrm{On} \longleftrightarrow \mathbf{L}$."*

- *Für Limeszahlen $\alpha > \omega$ existiert eine $\mathbf{\Sigma}_1(\mathbf{L}_\alpha)$-Surjektion von α auf $\alpha \times \alpha$.*

- *Für Limeszahlen $\alpha > \omega$ existiert eine $\mathbf{\Sigma}_1(\mathbf{L}_\alpha)$-Surjektion von α auf $\mathbf{L}_\alpha$. (Diese ist nicht uniform definiert.)*

Die $\mathbf{J}_\alpha$-Hierarchie als mögliche Alternative der Approximation des GÖDELschen Universums zu der üblichen $\mathbf{L}_\alpha$-Hierarchie erweitert die Möglichkeiten der letzteren durch eventuell fehlende grundlegende Abschlußeigenschaften (wie etwa der Paarmengenbildung), indem diese $\mathbf{J}_\alpha$-Stufen unter einfachen Operationen, nämlich unter *rudimentären* Funktionen, die den Rang höchstens endlich erhöhen, abgeschlossen sind. Somit erhalten wir Abgeschlossenheit wie etwa bei den $\mathbf{L}_\alpha$ für Limeszahlen α, ohne die gegebenen Möglichkeiten der üblichen Hierarchie zu verlieren, an die Stufen mit einfachen Mittel heranzukommen. So erhalten wir beispielsweise das *Kondensationsprinzip*:

(1.2.1) Für $X \prec_1 \mathbf{J}_\beta$ existiert ein $\alpha \leq \beta$, so daß $X \mathrel{\tilde{=}} \mathbf{J}_\alpha$.

Außerdem gilt

(1.2.2) $\mathbf{\Sigma}_\omega(\mathbf{J}_\beta) = \mathcal{P}(\mathbf{J}_\beta) \cap \mathbf{J}_{\beta+1}$.

Aufgrund des Aufbaus der $\mathbf{J}$-Hierarchie – den wir hier nicht weiter beleuchten werden – bekommen wir $\mathbf{L}_\alpha \subseteq \mathbf{J}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_{\omega\alpha}$ für beliebige $\alpha \in \mathrm{On}$. Insbesondere ist dann natürlich $\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{J}_\alpha$ für alle α mit $\alpha = \omega\alpha$, also etwa für *primitiv rekursiv abgeschlossene* α. Grundlegende Konzepte der primitiv rekursiven Funktionen kann man in [JenKa71] oder [Dev84, Kapitel II, Exercises] nachlesen. Diese spielen natürlich allein schon aufgrund der hier eingehenden rudimentären Funktionen eine Rolle, die eine Teilklasse der primitiv rekursiv abgeschlossenen Funktionen bilden.

Wir geben die folgenden Aussagen gleich in einer allgemeinen Version mittels der relativen Hierarchien an, wie man diese schon von der Stufen $\mathbf{L}_\alpha[A]$ her kennt, da es an den Beweisen, die wir hier sowieso nicht betrachten, nichts ändert; darüber hinaus kann man für den Verlauf der Arbeit diesen Abschnitt auch immer mit *leeren* Pradikaten lesen, ohne Informationen für das Weiterlesen zu verlieren.

Definition 1.23 *Eine Struktur $\langle \mathcal{M}, A\rangle$ heißt fügsam, wenn $x \cap A \in \mathcal{M}$ für jedes $x \in \mathcal{M}$.*

Definition 1.24 *Eine $\mathbf{J}$-Struktur ist eine fügsame*[18] *Struktur der Gestalt $\langle \mathbf{J}_\alpha^A, B\rangle$ für $\alpha \in \mathrm{On}$ und Prädikate A, B.*

Das wohl wichtigste Hilfsmittel in der Feinstrukturtheorie ist die kanonische Σ_1-Skolem-Funktion $h_\mathcal{M}$ für eine $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{M}$, die wie folgt definiert sei:

$$\begin{aligned} h_\mathcal{M}(i,x) &\simeq (\, r_\mathcal{M}(i,x)\,)_0, \text{wobei} \\ r_\mathcal{M}(i,x) &\simeq \text{das } <_\mathbf{L}\text{-kleinste } y \in \mathcal{M} \text{ mit } \mathcal{M} \models \varphi_i(\,(y)_0, x, (y)_1\,). \end{aligned}$$

Dabei sei $\langle \varphi_i \mid i < \omega\rangle$ eine rekursive Aufzählung der Σ_0-Formeln mit drei freien Variabeln und $(\langle x_0, x_1\rangle)_i$ für $i < 2$ gerade die i-te Koordinate x_i des geordneten Paares ist. Wir erhalten schließlich die Möglichkeit einer insgesamt einfachen Definition.

Lemma 1.25 *Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathbf{J}$-Struktur. Dann ist die Σ_1-Skolem-Funktion $h_\mathcal{M}$ uniform $\Sigma_1(\mathcal{M})$.*

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel stellt die nächste Definition bereit.

Definition 1.26 *Eine $\mathbf{J}$-Struktur $\langle \mathbf{J}_\alpha^A, B\rangle$ heißt akzeptierbar, wenn es für jedes $\xi < \alpha$ und $\tau < \omega\xi$ mit $\mathcal{P}(\tau) \cap \mathbf{J}_{\xi+1}^A \not\subseteq \mathbf{J}_\xi^A$ eine Abbildung $f \in \mathbf{J}_{\xi+1}^A$ gibt, so daß $f : \tau \xrightarrow{\text{auf}} \omega\xi$.*

Nach Definition ist klar, daß Akzeptierbarkeit eine starke Form von GCH ist, mehr noch, die $\mathbf{J}_\alpha$ stellen sich selbst alle als akzeptierbar heraus, so daß schließlich auch ganz $\mathbf{L}$ akzeptierbar ist.

Wir kennen bereits die Vorzüge des Kondensationsprinzips, welches wir in einer geeigneten Form auch in der anderen Richtung bekommen können; nämlich die Übertragung, eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur zu sein, bei geeigneten Abbildungen vom Definitionsbereich auf den Wertebereich. Dazu betrachten wir folgende Formelklasse, so daß wir schließlich die Lemmata 1.29 und 1.30 beweisen können.

Definition 1.27 *Eine Formel φ ist eine Q-Formel, wenn sie die Gestalt $(\forall u)(\exists v \supseteq u\,)\,\psi(v)$ für eine Σ_1-Formel ψ hat.*

Wir fordern für die Gültigkeit einer solchen Formel nicht nur die Existenz *eines* Zeugen (für die freie Variable der Σ_1-Formel), aber auch nicht, daß diese Formel für *alle* Kandidaten erfüllt werden soll, sondern daß wir *konfinal viele* solche Elemente finden.

Wir sagen, daß für transitive Strukturen $\overline{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M}$ eine Abbildung $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ *konfinal* ist, wenn für jedes $y \in \mathcal{M}$ ein $x \in \overline{\mathcal{M}}$ existiert, so daß $y \subseteq \pi(x)$ gilt.

[18] Im Englischen wird diese Eigenschaften mit amenable bezeichnet.

An manchen Stellen ist es bequemer, eine andere Darstellung zu nutzen. Für eine Σ_0-erhaltende Abbildung $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ und rudimentär abgeschlossene Strukturen $\overline{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M}$ ist es nämlich äquivalent, ob für jedes $y \in \mathcal{M}$ ein $x \in \overline{\mathcal{M}}$ mit $y \subseteq \pi(x)$ oder $y \in \pi(x)$ existiert, denn für die eine Richtung betrachte man zum gegebenen $y \in \mathcal{M}$ die Menge $\{y\} \in \mathcal{M}$, dann erfüllt die existierende Obermenge die gewünschte Bedingung. In der anderen Richtung sei ein $y \in \mathcal{M}$ gegeben, dann finden wir ein $x' \in \overline{\mathcal{M}}$ mit $y \in \pi(x')$. Dann gilt aber nach Voraussetzung $x := \bigcup x' \in \overline{\mathcal{M}}$, so daß schließlich $y \subseteq \bigcup \pi(x') = \pi(\bigcup x') = \pi(x)$ gilt.

Lemma 1.28 *Sei $\pi : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_1}{\longrightarrow} \mathcal{M}$. Dann gilt für eine beliebige Q-Formel φ: Wenn $\mathcal{M} \models \varphi$, so auch $\overline{\mathcal{M}} \models \varphi$.*

Lemma 1.29 *Sei $\pi : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ konfinal. Dann gilt für eine beliebige Q-Formel φ genau dann $\overline{\mathcal{M}} \models \varphi$, wenn auch $\mathcal{M} \models \varphi$ gilt.*

Lemma 1.30 *Die Eigenschaft, akzeptierbare* **J***-Struktur zu sein, läßt sich uniform als Q-Formel ausdrücken, d.h. es existiert eine Q-Formel φ, so daß für jede transitive und unter geordneten Paaren abgeschlossene Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M}$ ist eine akzeptierbare* **J***-Struktur gdw. $\mathcal{M} \models \varphi$.*

Damit wird dieser Begriff entsprechend den beiden vorhergehenden Lemmata schon unter relativ schwachen Erhaltungsstärken einer Abbildung übertragen. Nebenbei erwähnen wir die folgende

Bemerkung 1.31 *Eine konfinale Σ_0-erhaltende Abbildung $\sigma : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ ist insbesondere auch Σ_1-erhaltend.*

Denn wir können für eine in $\mathcal{M}$ erfüllbare Σ_1-Formel $(\exists x)\psi$ einen Zeugen x_0 wählen und dann für $y := \{x_0\}$ ein $\overline{x} \in \overline{\mathcal{M}}$ mit $y \subseteq \pi(\overline{x})$ finden, so daß wir die Σ_0-Formel $(\, \exists x \in \pi(\overline{x})\,)\,\psi$ mittels π zurück zu $\overline{\mathcal{M}}$ übertragen können.

Lemma 1.32 *Sei $\sigma : \mathbf{L}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\alpha$ für Limeszahlen $\overline{\alpha}, \alpha$ mit $\sup \sigma``\overline{\alpha} = \alpha$, dann ist σ eine konfinale Abbildung.*

Beweis: Sei ein $y \in \mathbf{L}_\alpha$ gegeben, also etwa $y \in \mathbf{L}_\beta$ für ein $\beta < \alpha$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $\overline{\beta} < \overline{\alpha}$ mit $\sigma(\overline{\beta}) \geq \beta$. Nun ist aber $\sigma{\restriction}\mathbf{L}_{\overline{\beta}} : \mathbf{L}_{\overline{\beta}} \longrightarrow \sigma(\mathbf{L}_{\overline{\beta}})$ eine elementare Abbildung[19]. Aufgrund der Übertragung der Q-Formeln ist daher $\sigma(\mathbf{L}_{\overline{\beta}}) = \mathbf{L}_{\sigma(\overline{\beta})}$, so daß letztendlich wie gewünscht y in $\sigma(x)$ für $x := \mathbf{L}_{\overline{\beta}}$ liegt.

$\boxtimes$(Lemma 1.32)

Lemma 1.33 *Sei $\mathcal{M} = \mathbf{J}_\alpha^A$ eine akzeptierbare Struktur und $\omega\varrho \in \mathcal{M}$ eine Kardinalzahl in $\mathcal{M}$. Dann gilt für $a \subseteq u \in \mathbf{J}_\varrho^A$, wobei $a \in \mathcal{M}$, schon $a \in \mathbf{J}_\varrho^A$.*

[19] Für eine beliebige Formel $\varphi(x)$ gilt $\sigma(\mathbf{L}_{\overline{\beta}}) \models \varphi(\sigma(x))$ genau dann, wenn die relativierte Formel $(\,\varphi(\sigma(x))\,)^{\sigma(\mathbf{L}_{\overline{\beta}})}$ in **L** gilt, die aber aufgrund der beschränkten Quantoren eine Σ_0-Formel ist, so daß wir diese durch σ übertragen können und schließlich $\mathbf{L}_{\overline{\beta}} \models \varphi(x)$ folgt.

Lemma 1.34 *Sei $\mathcal{M} := \mathbf{J}_\alpha^A$ akzeptierbar und ϱ eine Nachfolgerkardinalzahl in $\mathcal{M}$. Sei $a \subseteq \mathbf{J}_\alpha^A$ mit $|a|^{\mathcal{M}} < \omega\varrho$. Dann ist schon $a \in \mathbf{J}_\varrho^A$.*

Korollar 1.35 *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar und ϱ eine Nachfolgerkardinalzahl in $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathbf{J}_\varrho^A$ ein ZFC^--Modell*[20]*, insbesondere ist $\omega\varrho = \varrho$.*

Korollar 1.36 *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar und ϱ eine Limeskardinalzahl in $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathbf{J}_\varrho^A$ ein Modell von ZC*[21]*, insbesondere ist $\omega\varrho = \varrho$.*

Korollar 1.37 *Ist β eine Kardinalzahl in einer akzeptierbaren $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{M}$, dann ist β auch primitiv rekursiv abgeschlossen.*

Korollar 1.38 *Sei $\mathcal{M} := \mathbf{J}_\alpha^A$ akzeptierbar und ϱ eine Kardinalzahl in $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathbf{J}_\varrho^A = H_{\omega\varrho}^{\mathcal{M}} := \{x : |\mathrm{TC}(x)|^{\mathcal{M}} < \varrho\}$.*

Den entscheidenen Punkt für die Analyse der Teilmengen einer bestimmten Komplexität stellt die nächste Definition dar. Obwohl zunächst nur für Σ_1-Prädikate formuliert, werden wir später diese Idee iterieren.

Definition 1.39 *Sei $\mathcal{M}$ eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur. Dann heißt*

$$\varrho_{\mathcal{M}} := \text{ das kleinste } \varrho \in \mathrm{On} \text{ mit } \mathcal{P}(\omega\varrho) \cap \mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{M}) \not\subseteq \mathcal{M}$$

das Σ_1-Projektum von $\mathcal{M}$.

Für $\varrho_{\mathbf{J}_\alpha}$ schreiben wir auch nur kurz ϱ_α.

Lemma 1.40 *Sei $\mathcal{M} = \mathbf{J}_\alpha^B$ akzeptierbar. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(a) $\varrho = \varrho_{\mathcal{M}}$.

(b) *ϱ = das größte $\varrho \leq \alpha$, so daß $\langle \mathbf{J}_\varrho^B, A \rangle$ für jedes $A \in \mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{M})$ fügsam ist.*

Für die Anwendung dieser Theorie auf das konstruktible Universum, d.h. $B = \varnothing$, finden wir noch eine weitere nützliche äquivalente Formulierung, die für beliebige Prädikate B keinesfalls gelten muß:

(c) *ϱ = das kleinste $\varrho \leq \alpha$, so daß es eine partielle $\mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{M})$-Funktion von $\omega\varrho$ auf $\mathcal{M}$ gibt.*

Überlegen wir uns ein Beispiel: Sei $\mathbf{J}_\alpha$ ein ZF^--Modell. Dann gilt $\varrho_\alpha = \alpha$, wir sagen auch, daß das Projektum nicht fällt; das ist mit Lemma 1.40 Teil (c) offensichtlich, weil sonst aus Sicht des ZF^--Modells im Widerspruch zum Ersetzungsaxiom eine Surjektion von einer *Menge* auf das ganze *Universum* definierbar wäre. Sind alle

[20] Hierbei bezeichne ZFC^- das System ZFC ohne dem Potenzmengenaxiom.

[21] Hierbei bezeichne ZC die Zermelo-Mengenlehre mit Auswahlaxiom, d.h. ZFC ohne Ersetzungsaxiom.

Elemente von $\mathbf{J}_\alpha$ in dem Parameter α definierbar, so fällt das Projektum maximal; es gilt $\varrho_{\alpha+1} = 1$, denn mit der Voraussetzung sind alle Elemente von $\mathbf{J}_{\alpha+1}$ nun Σ_1-definierbar aus dem Parameter α, so daß wir aus der kanonischen Σ_1-Skolem-Funktion eine Surjektion von ω auf $\mathbf{J}_{\alpha+1}$ erhalten[22]. Darüber hinaus wissen wir natürlich, daß $\omega\varrho_{\mathcal{M}}$ immer eine Kardinalzahl in $\mathcal{M}$ sein muß; wir bekommen sogar, daß $\omega\varrho_{\mathcal{M}}$ eine $\mathbf{\Sigma}_1$-Kardinalzahl in $\mathcal{M}$ ist, d.h. es gibt keine kollabierende $\mathbf{\Sigma}_1$-definierbare Funktion.

Korollar 1.41 *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar und $B \subseteq \mathbf{J}^A_\varrho$, wobei $\varrho := \varrho_{\mathcal{M}}$ ist, eine $\mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{M})$ Teilmenge, dann ist $\langle \mathbf{J}^A_\varrho, B\rangle$ fügsam. Außerdem ist $\mathbf{J}^A_\varrho = H^{\mathcal{M}}_{\omega\varrho}$.*

Definition 1.42 *Für eine akzeptierbare Struktur $\mathcal{M} := \langle \mathbf{J}^B_\alpha, D\rangle$ und $p \in \mathcal{M}$ heißt $A^p_{\mathcal{M}} := \{\langle i, x\rangle \in \omega \times H^{\mathcal{M}}_{\omega\varrho_{\mathcal{M}}} \mid \mathcal{M} \models \psi_i(x,p)\}$, wobei $\langle \psi_i \mid i < \omega\rangle$ eine fixierte rekursive Aufzählung der Σ_1-Formeln ist, der Standardkode von $\mathcal{M}$ bestimmt durch p.*

Der Standardkode kodiert also das Σ_1-Verhalten in dem Parameter p der gesamten Struktur als Teilmenge der Einschränkung derselben auf ordinale Höhe des Projektums.

Definition 1.43 *$\mathcal{M}^p := \langle \mathbf{J}^B_\varrho, A^p_{\mathcal{M}}\rangle$ ist für $\varrho := \varrho_{\mathcal{M}}$ das durch $p \in \mathcal{M}$ bestimmte Redukt.*

Wir schreiben kurz $h_{\mathcal{M}}(X)$ für $\{h_{\mathcal{M}}(i,x) \mid i < \omega \wedge x \in X\}$.

Definition 1.44 *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar.*

(a) *Die Menge $P_{\mathcal{M}}$ der guten Parameter ist die Menge aller $p \in \mathcal{M}$, so daß es ein $\Sigma_1(\mathcal{M})$ in p definierbares $B \subseteq \mathrm{On} \cap \mathcal{M}$ mit $B \cap \omega\varrho_{\mathcal{M}} \notin \mathcal{M}$ gibt.*

(b) *Die Menge $R_{\mathcal{M}}$ der sehr guten Parameter ist die Menge aller $r \in \mathcal{M}$ mit $h_{\mathcal{M}}(\omega\varrho_{\mathcal{M}} \times \{r\}) = \mathcal{M}$.*

Bemerkung 1.45 *Es gilt $R_{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}} \neq \varnothing$.*

Damit geht also beim Übergang von $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{M}^p$ für sehr gute Parameter p keine Σ_1 (in p) Information verloren. Diese Begriffe können dann iteriert werden, so daß wir das n-te Projektum $\omega\varrho^n_{\mathcal{M}}$ und die Mengen $P^n_{\mathcal{M}}$ bzw $R^n_{\mathcal{M}}$ bekommen. Dieser Prozeß steht zwar im Mittelpunkt der Betrachtungen in der Feinstrukturtheorie, aber dennoch werden wir ihn hier nur kurz anschneiden; an dieser Stelle sei noch einmal auf [Ze97] verwiesen.

Der Iterationsprozeß verläuft etwa wie folgt. Setze $\omega\varrho^0_{\mathcal{M}} := \mathrm{On} \cap \mathcal{M}$. Wir kennen schon das erste Projektum $\omega\varrho^1_{\mathcal{M}} := \omega\varrho_{\mathcal{M}}$ von $\mathcal{M}$. Dann können wir für jedes $p \in \mathcal{M}$ das Redukt $\mathcal{M}^p$ definieren und dort das erste Projektum $\omega\varrho_{\mathcal{M}^p}$ betrachten. Das

[22] Vergleiche [Jen72, S.256].

kleinste dieser Projekta nennen wir $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^2$. Für $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^3$ betrachtet man nun Redukte von $\mathcal{M}^p$, wobei $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^2 = \omega\varrho_{\mathcal{M}^p}$ ist. Dieser Prozeß setzt sich dann weiter so fort.

Es ist im allgemeinen nicht zu erwarten, daß ein beliebiges $p \in \mathcal{M}$ das zweite Projektum erreicht, d.h. daß $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^2 = \omega\varrho_{\mathcal{M}^p}$ gilt; informal können wir sagen, daß ein solcher Paramter nicht genug Information enthält, um das Projektum so tief fallen zu lassen. Es stellt sich aber heraus, daß die sehr guten Parameter diese Eigenschaft haben werden. Die betrachteten Parameter und Projekta werden Elemente von $\bigtimes_{i<n} H^{\mathcal{M}}_{\omega\varrho_{\mathcal{M}}^i}$ sein. Bezeichne dann $\mathcal{M}^{n,p}$ das n-te Redukt zum Parameter p.

Durch die Projekta ist es möglich, für geeignete p beliebige $\mathbf{\Sigma}_{n+1}(\mathcal{M})$-Prädikate, die Teilmengen von $H^{\mathcal{M}}_{\omega\varrho_{\mathcal{M}}^n}$ sind, als $\mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{M}^{n,p})$-Prädikate zu betrachten, um dann mit ihnen einfacher in den Redukten arbeiten zu können; und das ist die entscheidene Idee in der Entwicklung der Feinstruktur. Natürlich ist es schon aufgrund der dann einfacheren Komplexität sicherlich bequemer mit diesen Relationen zu arbeiten, aber wir dürfen nicht vergessen, daß die Klasse der $\mathbf{\Sigma}_1$-Relationen wegen der Einfachheit auch schönere Eigenschaften besitzt; so sind beispielsweise $\mathbf{\Sigma}_1$-Relationen mit einer $\mathbf{\Sigma}_1$-Funktion uniformisierbar, während das entsprechende für $\mathbf{\Sigma}_1$-Relationen keineswegs klar ist.

Nun bilden die Projekta eine schwach absteigende Kette von Ordinalzahlen, so daß es ein sogenanntes *ultimatives* oder *endgültiges* Projektum $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{\omega}$ geben muß, womit wir ein $n_0 < \omega$ mit $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{\omega} = \omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n_0}$ erhalten, so daß $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{m} = \omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n_0}$ für jedes $m \geq n_0$ gilt. Wir schreiben abkürzend $H^n_{\mathcal{M}}$ für $H^{\mathcal{M}}_{\omega\varrho_{\mathcal{M}}^n}$. Analog zum ersten Projektum werden auch hier jetzt allgemein die n-ten (sehr) guten Parameter $P^n_{\mathcal{M}}$ $(R^n_{\mathcal{M}})$ gebildet, so daß wir auch hier folgende Eigenschaften haben:

- $R^n_{\mathcal{M}} \subseteq P^n_{\mathcal{M}} \neq \varnothing$.
- $p \in P^n_{\mathcal{M}} \longleftrightarrow (\forall i < n)(\, p(i) \in P^i_{\mathcal{M}^{i,p\restriction i}}\,)$.
- $p \in R^n_{\mathcal{M}} \longleftrightarrow (\forall i < n)(\, p(i) \in R^i_{\mathcal{M}^{i,p\restriction i}}\,)$.

Definition 1.46 *Wir sagen: $\mathcal{M}$ ist n-gesund*[23]*, wenn $R^n_{\mathcal{M}} = P^n_{\mathcal{M}}$. $\mathcal{M}$ ist gesund, wenn es n-gesund für alle n ist.*

Die Stufen der $\mathbf{J}_\alpha$ sind alle gesund; insbesondere ist $\mathbf{L}$ gesund. Da es ein ultimatives Projektum gibt, können wir eine Parametermenge definieren, die im folgenden Sinn gleichzeitig gute n-te Parameter sind: Setze $P^\star_{\mathcal{M}} :=$ die Menge aller $p \in \mathcal{M}$, so daß $\langle p, 0, \ldots, 0\rangle \in P^n_{\mathcal{M}}$ für alle $n < \omega$. Analog definieren wir die entsprechende Menge für sehr gute Parameter $R^\star_{\mathcal{M}}$. Nun können wir auf den Parametern, jetzt aufgefasst als endliche Menge von Ordinalzahlen, eine Wohlordnung $<^\star$ definieren und bezüglich

[23] Im Englischen wird diese Eigenschaft mit n-SOUND bezeichnet.

dieser den jeweils kleinsten betrachten. Sei $p_{\mathcal{M}}$ der $<^\star$-kleinste Parameter in $P^\star_{\mathcal{M}}$; dann wird $p_{\mathcal{M}}$ als *Standardparameter* für $\mathcal{M}$ bezeichnet.

Lemma 1.47 *Ein akzeptierbares $\mathcal{M}$ ist genau dann gesund, wenn $p_{\mathcal{M}} \in R^\star_{\mathcal{M}}$.*

Als wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung der Erhaltungsstärke von Abbildungen zwischen **J**-Strukturen hat sich eine neue Hierarchie von Formeln herausgestellt.

Definition 1.48 *Die Menge der $\Sigma_0^{(n)}$-Formeln ist die kleinste Menge Σ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *$x^i \in y^i$, $x^i = y^i$, $B(x^i)$ sind in Σ,*

(b) *$\Sigma_1^{(m)} \subseteq \Sigma$ für $m < n$,*

(c) *Σ ist unter den Booleschen Operationen abgeschlossen,*

(d) *wenn φ in Σ ist, dann auch $(\, \forall x^n \in x^i \,)\, \varphi$ und $(\, \exists x^n \in x^i \,)\, \varphi$ für $i \geq n$.*

Setze $\Sigma^* := \bigcup_{n<\omega} \Sigma_0^{(n)}$. Hierbei interpretieren wir eine gegebene Formel aus Σ^* über einem gegebenen $\mathcal{M}$, indem wir Variablen x^n nur über $H^n_{\mathcal{M}}$ laufen lassen. Wir schreiben $\pi : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_l^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$, falls $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ und für eine beliebige $\Sigma_l^{(n)}$-Formel $\varphi(v^{j_1}, \ldots, v^{j_m})$, wobei $j_1, \ldots, j_m \leq n$, gilt:

- Falls $x_i \in H^{j_i}_{\overline{\mathcal{M}}}$, dann $\pi(x_i) \in H^{j_i}_{\mathcal{M}}$.
- Für beliebige $x_i \in H^{j_i}_{\overline{\mathcal{M}}}$ gilt

$$\overline{\mathcal{M}} \models \varphi(x_1, \ldots, x_m) \;\longleftrightarrow\; \mathcal{M} \models \varphi(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_m)).$$

Natürlich ist bei einer solchen Einbettung die erste Bedingung $\pi \text{''}\, H^i_{\overline{\mathcal{M}}} \subseteq H^i_{\mathcal{M}}$ für $i \leq n$ notwendig, damit eine solche Erhaltung überhaupt sinnvoll aufgeschrieben werden kann. Um so schöner ist die Beobachtung, daß wir für $l > 0$ oder $i < n$ auch $\pi^{-1} \text{''}\, H^i_{\mathcal{M}} \subseteq H^i_{\overline{\mathcal{M}}}$ aufgrund der Erhaltung der Formel $(\, \exists v^i \,)(\, v^i = x \,)$ bekommen.

Lemma 1.49 *Für gesunde Strukturen $\mathcal{M}$ fallen normale Definierbarkeit und $*$-Definierbarkeit zusammen, d.h. es gilt $\mathbf{\Sigma}_\omega(\mathcal{M}) = \mathbf{\Sigma}^*(\mathcal{M})$.*

Lemma 1.50 *Seien $\overline{\mathcal{M}}$ und $\mathcal{M}$ akzeptierbare **J**-Strukturen und $\sigma : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\Sigma_1^{(n)}$-erhaltende Abbildung. Dann gilt $\sigma^{-1} \text{''}\, P^n_{\mathcal{M}} \subseteq P^n_{\overline{\mathcal{M}}}$. Gilt darüber hinaus die Erhaltungsstärke von σ für alle $n < \omega$, d.h. ist σ sogar Σ^*-erhaltend, dann gilt $\sigma^{-1} \text{''} P^\star_{\mathcal{M}} \subseteq P^\star_{\overline{\mathcal{M}}}$.*

Wir schieben an dieser Stelle ein Lemma ein, daß später recht nützlich ist, aber eigentlich nicht sehr viel mit der Feinstruktur zu tun hat. Dennoch können wir es natürlich erst mit der Σ^*-Hierarchie vollständig formulieren.

Lemma 1.51 *Sei $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\Sigma_0^{(n)}$-erhaltende Abbildung. Weiterhin seien $\overline{F}$ bzw. F zwei Relationen, definiert durch die gleiche $\Sigma_1^{(n)}$-Formel über $\overline{\mathcal{M}}$ bzw. $\mathcal{M}$ in Parametern $p_1, \ldots, p_n$ aus $\overline{\mathcal{M}}$ bzw. $\pi(p_1), \ldots, \pi(p_n)$ aus $\mathcal{M}$ und es sei $\mathrm{dom}(\overline{F})$ schon $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$-definierbar über $\overline{\mathcal{M}}$. Ist nun sowohl $\overline{F}$ als auch F eine Funktion, dann erhält die Abbildung π die Funktion $\overline{F}$ beim Übergang zu F, d.h.*

- $x \in \mathrm{dom}(\overline{F}) \quad \longleftrightarrow \quad \pi(x) \in \mathrm{dom}(F)$.
- $\pi(\,\overline{F}(x)\,) = F(\,\pi(x)\,)$.

Beweis: Obwohl π nur $\Sigma_0^{(n)}$-erhaltend, aber die $\overline{F}$ definierende eine $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}$-Formel ist, können wir die gwünschte Erhaltungsstärke nachweisen, da wir beide Größen verbessern können. Zum einen ist π damit auch $\Delta_1^{(n)}$-erhaltend, da es natürlich $\Sigma_1^{(n)}$-aufwärtserhaltend und $\Pi_1^{(n)}$-abwärtserhaltend wirkt. Aber wir wissen auch, daß eine $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}$-Funktion mit einem $\mathbf{\Pi}_1^{(n)}$-definierbaren Definitionsbereich eigentlich nur $\mathbf{\Delta}_1^{(n)}$ ist, da mit $\overline{F}(x) = y$ auch die negierte Formel durch eine $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}$-Formel beschrieben werden kann, denn es gilt $\overline{F}(x) \neq y \longleftrightarrow (\exists y')(y' \notin \mathrm{dom}(\overline{F}) \vee y' \neq y \wedge y' = \overline{F}(x))$. Mit diesen Überlegungen folgt offenbar sofort die behauptete Aussage. ⊠(Lemma 1.51)

Im allgemeinen sind $\Sigma_1^{(n)}$-Relationen nicht unter Substitution von $\Sigma_1^{(n)}$-Funktionen abgeschlossen. Allerdings gibt es eine sehr wichtige Klasse von solchen Funktionen, die diese Eigenschaft haben und die für die meisten späteren Anwendungen genügen werden.

Definition 1.52 *Die guten $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktionen bilden die kleinste Menge Σ mit den folgenden Abschlußeigenschaften:*

(a) *Jede partielle $\Sigma_1^{(i)}(\mathcal{M})$ Funktion $F(x_1^{j_1}, \ldots, x_k^{j_k})$ nach $H^i_{\mathcal{M}}$, wobei $i, j_1, \ldots, j_k \leq n$, ist in Σ.*

(b) *Wenn $F(x_1^{j_1}, \ldots, x_k^{j_k})$ und $G_i(\vec{z})$ (Abbildungen nach $H^{j_i}_{\mathcal{M}}$) zu Σ gehören, dann ist auch $F(G_1(\vec{z}), \ldots, G_k(\vec{z}))$ in Σ.*

Wir können nun zeigen, daß die Klasse der $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Relation unter Einsetzung von guten $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktionen abgeschlossen ist, genauer:

Lemma 1.53 *Sei $R(x_1^{j_1}, \ldots, x_k^{j_k})$ eine $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Relation und $F_i(\vec{z})$ gute $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktionen nach $H^{j_i}_{\mathcal{M}}$. Dann ist $R(F_1(\vec{z}, \ldots, \vec{z}))$ uniform $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$.*

Lemma 1.54 (Uniformisierungssatz) *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar und $R(y^n, \vec{x}^n, \ldots, \vec{x}^0)$ eine $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Relation. Dann gibt es eine $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktion F nach $H^n_{\mathcal{M}}$ mit*

(a) $\mathrm{dom}(F) = \{\vec{x} \mid (\,\exists y^n\,)\; R(y^n, \vec{x}^n)\,\}$,

(b) $(\,\exists y^n\,)\; R(y^n, \vec{x}) \;\longrightarrow\; R(F(\vec{x}), \vec{x})$.

Dabei ist F uniform definierbar.

Für eine akzeptierbare **J**-Struktur $\mathcal{M}$ und eine $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktion f sagen wir, daß f eine *funktional absolute* $\Sigma_1^{(n)}$*-Definition* besitzt, wenn es eine f definierende $\Sigma_1^{(n)}$-Formel gibt, die in jeder akzeptierbaren Struktur auch eine Funktion definiert. Hat f eine $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Definition in dem Parameter p, so sagen wir, daß f eine *funktional absolute* $\Sigma_1^{(n)}$*-Definition in* p hat, wenn es eine Relation $F(\vec{x}, z)$ gibt, so daß F eine funktional absolute $\Sigma_1^{(n)}$-Definition hat und zusätzlich $f(\vec{a}) \simeq F(\vec{a}, p)$ für beliebige $\vec{a}$ gilt. Das folgende Lemma mit einer Anwendung im anschließenden Korollar bestärkt die Rolle der guten Funktionen.

Lemma 1.55 *Jede gute $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktion hat auch eine funktional absolute $\Sigma_1^{(n)}$-Definition.*

Korollar 1.56 *Sei $\pi : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\Sigma_1^{(n)}$-erhaltende Abbildung und f eine gute $\Sigma_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion in p mit $\mathrm{dom}(f) \subseteq H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$, $\mathrm{dom}(f) \in \overline{\mathcal{M}}$ und $f \notin \overline{\mathcal{M}}$. Dann können wir die Abbildung π erweitern, indem wir $\pi(f)$ über $\mathcal{M}$ durch die funktional absolute Definition von f definieren. Dadurch ist $\pi(f)$ eine eindeutig bestimmte funktional absolute $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Funktion in $\pi(p)$ mit dem Definitionsbereich $\pi(\mathrm{dom}(f))$ und außerdem behält π seine Erhaltungsstärke.*

Beweis: Aufgrund des vorigen Lemmas haben wir für f eine funktional absolute $\Sigma_1^{(n-1)}$-Definition, $\varphi(y, x, z)$ von f in $\overline{\mathcal{M}}$, d.h. es gilt $f(a) = b \longleftrightarrow \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(b, a, p)$. Dann sei für $a \in \pi(\mathrm{dom}(f))$ eine Funktion $\pi(f) := g$ in $\mathcal{M}$ durch $g(a) = b \longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(b, a, \pi(p))$ definiert. Es genügt offenbar zu zeigen, daß diese Definition von $\pi(f)$ unabhängig von der Wahl der definierenden funktional absoluten Formel ist.

Um das zu sehen, nehmen wir an, wir hätten zwei funktional absolute Definitionen für f, d.h. es exitieren gute $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Funktionen $F_{\overline{\mathcal{M}}}(x^n, z^0)$ bzw. $G_{\overline{\mathcal{M}}}(x^n, z^0)$ und Parameter p bzw. q mit $F_{\overline{\mathcal{M}}}(a, p) = f(a) = G_{\overline{\mathcal{M}}}(a, q)$ für $a \in \mathrm{dom}(f) \subseteq H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$; damit gilt auch $\overline{\mathcal{M}} \models (\forall x^n \in \mathrm{dom}(f))(F_{\overline{\mathcal{M}}}(x^n, p) = G_{\overline{\mathcal{M}}}(x^n, q))$. Das ist aber eine $\Pi_1^{(n)}$-Aussage und wird daher aufgrund der Erhaltungseigenschaften von π nach $\mathcal{M}$ übertragen, d.h. es gilt $\mathcal{M} \models F_{\mathcal{M}}(a, \pi(p)) = G_{\mathcal{M}}(a, \pi(q))$ für beliebige $a \in \pi(\mathrm{dom}(f)) = \mathrm{dom}(\pi(f))$, womit die gewünschte Unabhängigkeit gezeigt ist. Hierbei bezeichnete $F_{\mathcal{M}}$ die gute $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Funktion mit der gleichen funktional absoluten $\Sigma_1^{(n-1)}$-Definition wie $F_{\overline{\mathcal{M}}}$ über der Struktur $\overline{\mathcal{M}}$. ⊠(Korollar 1.56)

Bemerkung 1.57 *Insbesondere gilt die Aussage des Korollars – wie der Beweis zeigte, falls π eine elementare Einbettung ist. Dann kann f eine funktional absolute $\Sigma_1^{(n)}$-Funktion sein, wobei $n < \omega$ beliebig gewählt werden kann.*

Sehr gute Parameter haben sehr schöne Eigenschaften:

Lemma 1.58 *Sei $\mathcal{M}$ akzeptierbar und $p \in R^n_{\mathcal{M}}$. Dann existiert eine (für alle $\mathcal{M}$) uniform definierbare gute $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Funktion, so daß für jedes $x \in \mathcal{M}$ ein $y \in H^{n+1}_{\mathcal{M}}$ mit $x = F(y, p)$ existiert.*

Diese Funktion wird mit Hilfe der kanonischen Σ_1-Skolem-Funktion definiert. Eine solche Funktion läßt sich iterieren:

Definition 1.59 *Setze $\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}$:= die gute uniform definierbare $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Funktion mit zwei Parametern, die das Resultat der iterierten Komposition der kanonischen Σ_1-Skolem-Funktionen des i-ten Reduktes (für $i = 1, \ldots, n-1$) ist.*

Wie auch schon für $h_{\mathcal{M}}$ schreiben wir abkürzend $\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}(X)$ für die Menge $\{\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}(i, x) \mid i < \omega \wedge x \in X\}$. Das vorangegangene Lemma ist dann der Schlüssel für das folgende

Korollar 1.60 *Wenn $\omega\varrho^n_{\mathcal{M}}$ in $\mathcal{M}$ liegt, dann ist $\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}$ eine uniform definierbare $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Funktion, so daß für jeden sehr guten Parameter $p \in R^n_{\mathcal{M}}$ die Abbildung $\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}$ eine Surjektion von $\omega\varrho^n_{\mathcal{M}}$ auf $\mathcal{M}$ ist.*

1.3 Ultraprodukte

Im weiteren Verlauf werden wir Konstruktionen durchführen, die an die bekannte für Ultraprodukte erinnern wird. Kunen hatte erstmals in seiner Dissertation bemerkt, daß Ultraprodukte von inneren Modellen nicht immer von Ultrafiltern genommen werden müssen, die bereits Elemente der Ausgangsstruktur sind. Da wir später ähnliche Konstruktionen anwenden möchten, werden wir diese hier noch einmal erwähnen; für ausführliche Gedanken sei etwa auf [Ka94, Kapitel 19] verwiesen. Falls keine Beweise angegeben werden, dann sind diese auch dort zu finden. Abschließend werden wir im nächsten Abschnitt kurz den Zusammenhang zu den Silver-Ununterscheidbaren beschreiben.

Ursprünglich stammt die Ultraprodukt-Konstruktion aus der Modelltheorie. Mit ihr lassen sich elegant Nicht-Standard Modelle konstruieren oder beispielsweise der Kompaktheitssatz schnell beweisen[24]. In unserem Kontext werden wir nicht allgemein eine Familie von (verschiedenen) Modellen $\mathcal{M}_i$ für $i \in I$ verwenden, sondern unsere Indexmenge I wird eine Kardinalzahl κ und die $\mathcal{M}_i$ werden alle das gleiche Modell sein[25].

Wir folgen gleich den Ideen Kunens und nicht notwendigerweise verlangen, daß κ in $\mathcal{M}$ eine meßbare Kardinalzahl ist. Sei also $\mathcal{M}$ ein inneres Modell[26] von ZFC.

[24] Vergleiche [ChKe90, Korollar 4.1.11].

[25] Daher wäre es eigentlich sinnvoll, von *Ultrapotenzen* zu sprechen.

[26] Wir nennen $\mathcal{M}$ ein *inneres Modell*, wenn es ein transitives Modell von ZF ist mit $\mathrm{On} \subseteq \mathcal{M}$.

Nehmen wir zusätzlich an, daß wir ein U haben, das nicht notwendigerweise in $\mathcal{M}$ liegen muß, aber folgende Bedingung erfüllt:

$$\langle \mathcal{M}, \in, U \rangle \models U \text{ ist ein normaler nicht-trivialer und } \kappa\text{-vollständiger Ultrafilter über } \kappa. \tag{1.3.1}$$

Wir sagen in dieser Situation nur kurz, daß U ein Ultrafilter[27] auf κ *über* $\mathcal{M}$ ist, betrachten dann ${}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}$ und führen eine Äquivalenzrelation auf dieser Klasse ein, dabei sei $f \sim g$, wenn die Menge $\{\eta < \kappa | f(\eta) = g(\eta)\}$ in U liegt. Es bezeichne $[f]$ die zu $\sim$ gehörige Äquivalenzklasse. SCOTT's Trick[28] erreicht dann, daß $[f] \in \mathcal{M}$. Setze dann ${}^\kappa\mathcal{M}/U := \{[f] | f \in {}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}\}$ und wir erhalten zusammen mit einer kanonisch definierten Pseudo-Epsilonrelation $[f] \mathrel{\tilde{\in}} [g] \;:\longleftrightarrow\; \{\eta < \kappa \mid f(\eta) \in g(\eta)\} \in U$ eine Struktur $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) := \langle {}^\kappa\mathcal{M}/U, \tilde{\in} \rangle$. Eine ganz wesentliche Eigenschaft in dieser Konstruktion ist die folgende Version vom Satz von Łoś, denn dieser wird uns in die Lage versetzen, allein mit Hilfe des Ultrafilters U schon in $\mathcal{M}$ zu entscheiden, welche Formeln im Ultraprodukt erfüllt werden.

Theorem 1.61 (Łoś) *Für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und Funktionen $f_1, \dots, f_n$ aus ${}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}$ gilt:*

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models \varphi(\,[f_1], \dots, [f_n]\,) \longleftrightarrow \{\eta < \kappa \mid \mathcal{M} \models \varphi(\,f_1(\eta), \dots, f_n(\eta)\,)\,\} \in U.$$

Ein derart konstruiertes Ultraprodukt muß nicht notwendigerweise fundiert sein. Dennoch können wir den fundierten Kern[29] betrachten. Diese Teilstruktur läßt sich dann nach dem MOSTOWSKI-Isomorphiesatz transitivieren, da $\tilde{\in}$ offenbar mengenähnlich ist. Wir werden den fundierten Kern von $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ mit seinem transitiven Kollaps identifizieren.

Eine grundlegende und auch uns beschäftigende Frage ist das Problem der Fundiertheit der konstruierten Struktur; wir definieren daher zunächst wie folgt.

Definition 1.62 *U heißt abzählbar vollständig, falls für beliebige $\langle X_i \mid i < \omega \rangle \in \mathbf{V}$ mit $X_i \in U$ $(i < \omega)$ immer $\bigcap_{i<\omega} X_i \neq \varnothing$ gilt.*

Offenbar erhalten wir für einen abzählbar vollständigen Ultrafilter die gewünschte Eigenschaft für das Ultraprodukt, denn für eine unendliche und absteigende $\tilde{\in}$-Kette $\langle [f_i] \mid i < \omega \rangle$ setze $X_i := \{\eta < \kappa \mid \mathcal{M} \models f_{i+1}(\eta) \in f_i(\eta)\,\}$ und wende den Satz von Łoś an. Damit gilt also:

Lemma 1.63 *Für ein abzählbar vollständiges U mit* (1.3.1) *ist* $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ *fundiert.*

---

[27] Wir sagen, daß U *normal* ist, falls es für jedes $f : X \longrightarrow \kappa$ mit $f \in \mathcal{M}$ regressiv und $X \in U$ ein $\eta < \kappa$ existiert, so daß $f^{-1}\,``\,\{\eta\} \in U$.

[28] Dabei beschränkt man sich bei der Aufnahme von Funktionen in die Äquivalenzklasse nur auf jene mit minimalen Rang.

[29] Der fundierte Kern eines Modells $\mathfrak{A} = \langle A, \in_{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$ ist das maximale Teilmodell, das $\in_{\mathfrak{A}}$-abgeschlossen und fundiert ist.

Darüber hinaus können wir eine Abbildung $\pi : \mathcal{M} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ finden, indem wir $\pi(x) := [\mathrm{const}_x]$ für $x \in \mathcal{M}$ definieren, wobei $\mathrm{const}_x : \kappa \longrightarrow \{x\}$ die konstante Funktion ist. Die Abbildung π nennen wir auch *kanonische Einbettung* in das Ultraprodukt. Die Elementarität wird gerade durch den Satz von Łoś garantiert. Außerdem ist diese Einbettung konfinal[30]. Es gilt $\mathrm{crit}(\pi) = \kappa$ und die Normalität von U sichert uns $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models [\mathrm{id}] = \kappa$ zu. Diese letzte Aussage entpuppt sich sogar als äquivalent zur Normalität des Ultrafilters. Dadurch bekommen wir das folgende Lemma, das gerade besagt, daß der Ultrafilter U schon von $\{\kappa\}$ *generiert* wird.

Lemma 1.64 *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

(a) $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ *ist gleich dem* Σ_0*-Abschluß von* $\mathrm{rng}(\pi) \cup \{\kappa\}$.

(b) $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) = \{\pi(f)(\kappa) \mid f \in {}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}\}$

Beweis: Es genügt, (b) zu zeigen. Diesen Beweis werden wir hier andeuten, da wir die Idee später auch verwenden werden. Für (b) genügt es wiederum zu zeigen, daß im Ultraprodukt immer $[f] = \pi(f)(\kappa)$ für beliebiges $f \in {}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}$ gilt. Wenn man diese Aussage richtig liest, dann läßt sie sich aufgrund der Normalität als $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models [f] = [\mathrm{const}_f](\,[\mathrm{id}]\,)$ schreiben. Das ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} U &\ni \{\eta < \kappa \mid \mathcal{M} \models f(\eta) = \mathrm{const}_f(\eta)(\,\mathrm{id}(\eta)\,)\} \\ &= \{\eta < \kappa \mid \mathcal{M} \models f(\eta) = f(\eta)\} \\ &= \kappa \end{aligned}$$

Auch hier geht wieder der Satz von Łoś ein. ⊠(Lemma 1.64)

Definition 1.65 *Wir schreiben für diese Konstruktion kurz* $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathfrak{A}$ *schwach, falls* $\mathfrak{A} = \mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ *und* π *die kanonische Einbettung bzw.* $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathcal{M}'$*, falls* $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ *fundiert,* $\mathcal{M}'$ *die Transitivierung und* π *erneut die kanonische Einbettung ist.*

Wir erhalten folgende Charakterisierung des Ultraproduktes.

Lemma 1.66 *Es gelte* (1.3.1). *Dann gilt* $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathcal{M}'$ *genau dann, wenn*

(a) $\mathcal{M}'$ *ist transitiv,*

(b) $\pi : \mathcal{M} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}'$,

(c) $\mathrm{crit}(\pi) = \kappa$,

(d) $\mathcal{M}' = \{\pi(f)(\kappa) \mid f \in {}^\kappa\mathcal{M} \cap \mathcal{M}\}$,

[30] Für $y = [f]$ nehme $x = \mathrm{rng}(f)$ und wende den Satz von Łoś an, so daß man im Ultraprodukt gerade $y \in \pi(x)$ erhält.

(e) $U = \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathcal{M} \mid \kappa \in \pi(X)\}$.

Man beachte die äquivalente Formulierung der Bedingung (d) entsprechend dem Lemma 1.64. Falls ein Ultrafilter U die Gestalt (e) hat, dann sagen wir auch $\mathrm{crit}(U) = \kappa$.

Beweis des Lemmas 1.66: Beweisen wir zunächst die Richtung ($\rightarrow$): Die Bedingungen (a) bis (d) sind offensichtlich oder haben wir schon eingesehen. Betrachte (e); dann gilt nach dem Satz von Łoś für beliebiges $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} U \ni X = \{\eta \mid \mathcal{M} \models \eta \in X\} &\longleftrightarrow \{\eta \mid \mathcal{M} \models \mathrm{id}(\eta) \in \mathrm{const}_X(\eta)\} \in U \\ &\longleftrightarrow \mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models [\mathrm{id}] \in [\mathrm{const}_X] \\ &\longleftrightarrow \mathcal{M}' \models \kappa \in \pi(X). \end{aligned}$$

Für die andere Richtung ($\leftarrow$) betrachte $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathfrak{A}$ schwach. Wir wissen dann nach den Voraussetzungen, daß für eine beliebige Σ_0-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(\,[f_1], \ldots, [f_n]\,) &\overset{\text{Łoś}}{\longleftrightarrow} \{\eta \mid \mathcal{M} \models \varphi(\,f_1(\eta), \ldots, f_n(\eta)\,)\} \in U \\ &\overset{\text{(e)}}{\longleftrightarrow} \kappa \in \pi(\,\{\eta \mid \mathcal{M} \models \varphi(\,f_1(\eta), \ldots, f_n(\eta)\,)\}\,) \\ &\longleftrightarrow \kappa \in \{\eta \mid \mathcal{M}' \models \varphi(\,\pi(f_1)(\eta), \ldots, \pi(f_n)(\eta)\,)\} \\ &\longleftrightarrow \mathcal{M}' \models \varphi(\,\pi(f_1)(\kappa), \ldots, \pi(f_n)(\kappa)\,) \end{aligned}$$

Dann ist aber eine Abbildung, definiert durch $\sigma([f]) := \pi(f)(\kappa)$, ein Isomorphismus zwischen $\langle \mathfrak{A}, \tilde{\in} \rangle$ und $\langle \mathcal{M}', \in \rangle$, d.h. $\mathfrak{A}$ ist insbesondere fundiert. Nach Konstruktion ist damit ganz $\mathfrak{A}$ transitiv, d.h. σ ist die Identität. ⊠(Lemma 1.66)

Der letzte Teil des Beweises zeigt außerdem das folgende

Lemma 1.67 *Zu $\mathcal{M}$ und U existieren $\mathcal{M}'$ und π genau dann mit $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathcal{M}'$, wenn* $\mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U)$ *fundiert ist.*

Wir werden jetzt noch, um das Thema abzurunden und gleichzeitig eine Anwendung für diese Ultraprodukte anzudeuten, Iterationen kurz beleuchten, um dann später als Anwendung den Zusammenhang zu $0^{\#}$ anzudeuten. Wir wissen schon, daß die Voraussetzung (1.3.1) ausreicht, um das Ultraprodukt zu definieren. Allerdings müssen wir auch über den Ultrafilter in $\mathcal{M}$ selbst sprechen können. Dazu werden wir unsere Sprache um ein Prädikat $\dot{U}$ erweitern, um dieses dann von $\mathcal{M}$ als U interpretieren zu lassen. Da U aber nicht in $\mathcal{M}$ liegen muß, brauchen wir eine zusätzliche Eigenschaft an $\mathcal{M}$ und U.

Definition 1.68 *Es gelte* (1.3.1). *U ist schwach fügsam über $\mathcal{M}$, wenn für beliebige $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \mathcal{M}$ die Menge $\{\alpha < \kappa \mid X_\alpha \in U\}$ in $\mathcal{M}$ liegt.*

Der Begriff ist – wie die Bezeichnung schon andeutet – eine Abschwächung des Begriffs der Fügsamkeit. Kurz gesagt fordern wir die Fügsamkeit nur für Objekte in $\mathcal{M}$, die eine Kardinalität von höchstens κ besitzen. Um Bezeichnungen zu sparen vereinbaren wir, daß wir in diesem Abschnitt mit κ^+ immer $\kappa^{+\mathcal{M}}$ meinen.

Lemma 1.69 *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.*

(a) *U ist schwach fügsam über $\mathcal{M}$.*

(b) *$\langle H^{\mathcal{M}}_{\kappa^+}, U\rangle$ ist fügsam.*

(c) *Sei $\pi : \mathcal{M} \underset{U}{\longrightarrow} \mathfrak{A}$ schwach. Dann gilt $\mathcal{P}(\kappa) \cap \mathfrak{A} = \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathcal{M}$.*

Beweis:

(a)→(b): Sei $x \in H^{\mathcal{M}}_{\kappa^+}$ und $\langle X_i \mid i < \kappa\rangle \in \mathcal{M}$ eine Aufzählung von x. Dann ist

$$x \cap U = \{X_i \mid X_i \in U\} \in \mathcal{M} \longleftrightarrow \{i < \kappa \mid X_i \in U\} \in \mathcal{M}$$

Und die letzte Bedingung gilt nach Voraussetzung; also auch $x \cap U \in H^{\mathcal{M}}_{\kappa^+}$.

(b)→(c): Sei $X \subseteq \kappa$ mit $X \in \mathfrak{A}$, etwa $X = [f]$. Setze $Z_\zeta := \{\eta \mid \zeta \in f(\eta)\}$. Dann liegt $F := \langle Z_\zeta \mid \zeta < \kappa\rangle$ in $\mathcal{M}$ und damit sogar schon in $H^{\mathcal{M}}_{\kappa^+}$. Nach Voraussetzung gilt dann $R := \{Z_\zeta \mid \mathcal{M} \models Z_\zeta \in U\} = \mathrm{rng}(F) \cap U \in H^{\mathcal{M}}_{\kappa^+} \subseteq \mathcal{M}$. Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \quad &\ni \quad \{\zeta < \kappa \mid \mathcal{M} \models Z_\zeta \in R\} = \{\zeta < \kappa \mid \mathcal{M} \models Z_\zeta \in U\} \\
&= \quad \{\zeta < \kappa \mid \{\eta < \kappa \mid \mathcal{M} \models \zeta \in f(\eta)\} \in U\} \\
&= \quad \{\zeta < \kappa \mid \mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models [\mathrm{const}_\zeta] \in [f]\} \\
&= \quad \{\zeta < \kappa \mid \mathrm{Ult}(\mathcal{M}, U) \models \zeta \in X\} = X
\end{aligned}$$

(c)→(a): Sei $f := \langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle \in \mathcal{M}$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
\{\alpha < \kappa \mid X_\alpha \in U\} \quad &= \quad \{\alpha < \kappa \mid \kappa \in \pi(X_\alpha)\} \\
&= \quad \{\alpha < \kappa \mid \kappa \in \pi(f)(\alpha)\} \\
&\in \quad \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M}
\end{aligned}$$

⊠(Lemma 1.69)

Sei nun neben (1.3.1) auch noch vorausgesetzt, daß U schwach fügsam über $\mathcal{M}$ ist. Wir führen die Ultraprodukt-Konstruktion wie oben durch und definieren zusätzlich noch die Interpretation des Prädikates $\dot{U}$ im Ultraprodukt wie folgt:

(1.3.2) $$[f] \,\tilde{\in}\, \dot{U} \;:\longleftrightarrow\; \{\eta < \kappa \mid f(\eta) \in U\} \in U$$

Genau an dieser Stelle benötigen wir die schwache Fügsamkeit, um überhaupt von der rechten Seite in der Struktur $\langle \mathcal{M}, \in, U\rangle$ sprechen zu können. Wir betrachten nun $\langle {}^\kappa\mathcal{M}/U,\ \tilde{\in}\ , \dot{U}^{\mathrm{Ult}(\mathcal{M},U)}\rangle$ und nehmen an, daß diese Struktur fundiert sei. Dann können wir diese transitivieren und erhalten ein $\mathcal{M}'$ und ein $U' \subseteq \mathcal{M}'$ mit $\langle {}^\kappa\mathcal{M}/U,\ \tilde{\in}\ , \dot{U}^{\mathrm{Ult}(\mathcal{M},U)}\rangle \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \langle \mathcal{M}', \in, U'\rangle$, wobei wir beide wieder miteinander identifizieren werden. Wir bekommen wie oben die kanonische Einbettung mit $\pi : \langle \mathcal{M}, \in, U\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathcal{M}', \in, U'\rangle$. Außer den Bedingungen aus Lemma 1.69 können wir jetzt auch noch die folgenden ableiten.

Lemma 1.70 *Unter den obigen Bezeichnungen gilt:*

(a) *U' ist ein normaler und schwach fügsamer Ultrafilter auf $\pi(\kappa)$ über $\mathcal{M}'$.*

(b) $\kappa^{+\mathcal{M}} = \kappa^{+\mathcal{M}'}$.

(c) $U \notin \mathcal{M}'$.

Für (a) nutzt man die entsprechenden Eigenschaften von U über $\mathcal{M}$ und (b) gilt aufgrund der schwachen Fügsamkeit von U aufgrund von Lemma 1.66 (c); denn dadurch können im Ultraprodukt keine neuen Wohlordnungen von $\mathcal{M}$ hinzukommen. Die Aussage (c) besagt, daß der Ultrafilter U, unabhängig davon, ob er ein Element des Ausgangsmodells $\mathcal{M}$ war, in jedem Fall nicht im Ultraprodukt liegen wird. Mit diesen Überlegungen ist der Anfangsschritt einer Iteration vollständig beschrieben und wir können daher den Begriff der Iteration jetzt definieren.

Definition 1.71 *Wir nennen $\langle\, \langle\, \langle \mathcal{M}_i, U_i\rangle \mid i < \theta\,\rangle, \langle \pi_{i,j} \mid i \leq j < \theta\rangle\,\rangle$ eine Iteration von $\langle \mathcal{M}, U\rangle$ mit den Iteraten $\mathcal{M}_i$ und den kritischen Punkten κ_i, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\langle \mathcal{M}_0, U_0\rangle = \langle \mathcal{M}, U\rangle$,

(b) $\pi_{i,i+1} : \mathcal{M}_i \underset{U_i}{\longrightarrow} \mathcal{M}_{i+1}$, $U_{i+1} = \pi_{i,i+1}(U_i)$.

(c) $\kappa_i = \mathrm{crit}(U_i)$,

(d) $\pi_{h,j}\pi_{i,h} = \pi_{i,j}$ *für* $i \leq h \leq j$ *und* $\pi_{i,i} = \mathrm{id}$,

(e) $\langle \mathcal{M}_\lambda, \langle \pi_{i,\lambda} \mid i < \lambda\rangle\rangle = \mathrm{dirlim}(\langle\langle \mathcal{M}_i \mid i < \lambda\rangle, \langle \pi_{i,j} \mid i \leq j < \lambda\rangle\rangle)$ *für Limeszahlen* λ.

Folgende Eigenschaften lassen sich für eine solche Iteration dann induktiv ableiten:

Lemma 1.72 *Für $i < j < \theta$ gilt dann:*

(a) $\mathrm{crit}(\pi_{ij}) = \kappa_i$ *und* $\pi_{ij}(\kappa_i) = \kappa_j$, *also ist* $\kappa_i < \kappa_j$,

(b) $\pi_{ij} \restriction (\mathbf{V}_{\kappa_i} \cap \mathcal{M}_i) = \mathrm{id}$,

(c) $\mathbf{V}_{\kappa_i} \cap \mathcal{M}_i = \mathbf{V}_{\kappa_i} \cap \mathcal{M}_j$, $\mathcal{P}(\kappa_i) \cap \mathcal{M}_i = \mathcal{P}(\kappa_i) \cap \mathcal{M}_j$.

(d) $\langle \kappa_i \mid i < \theta\rangle$ *ist stetig*[31].

(e) $\kappa_i^{+\mathcal{M}_i} = \kappa_i^{+\mathcal{M}_j}$.

Kunen stellte das folgende fest, welches auch in [Ka94, Kapitel 19] nachzulesen ist:

[31]Eine Folge ist stetig, wenn sie monoton und an den Limesstellen minimal ist, d.h. $\kappa_\lambda = \sup\{\kappa_i \mid i < \lambda\}$ für Limeszahlen λ.

Lemma 1.73 *Die kritischen Punkte $\{\kappa_i \mid i < j\}$ in der Iteration stellen für die Iterate $\langle \mathcal{M}_j, \in, U_j \rangle$ Ununterscheidbare dar.*

Bei den Iterationen ist die entscheidene Frage, ob das jeweils gebildete Ultraprodukt fundiert ist; in diesem Fall können wir die Iteration wie oben angedeutet beliebig lang weiter fort führen. GAIFMAN erkannte mittels eines LÖWENHEIM-SKOLEM-Arguments, daß wir äquivalent fragen können, ob wir überabzählbar viele Schritte iterieren können. Wir haben schon ein Kriterium gesehen, wann eine Ein-Schritt-Iteration fundiert ist; verblüffenderweise genügt diese Eigenschaft auch für Iterationen beliebiger Länge, wie JENSEN bemerkte:

Lemma 1.74 *Ist U abzählbar vollständig, dann ist $\langle \mathcal{M}, \in, U \rangle$ iterierbar.*

1.4 SILVER-Ununterscheidbare und $0^{\#}$

SILVER hatte mit seinen Resultaten, die in seiner Dissertation erschienen und später in [Si71] veröffentlicht wurden, einen großen Einfluß auf die Entwicklung der Mengenlehre. Seine Untersuchungen zu $0^{\#}$ und den daraus abgeleiteten Verallgemeinerungen sind mittlerweile grundlegende Konzepte in verschiedenen Teilen der mengentheoretischen Entwicklung geworden[32].

Theorem 1.75 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Es gibt eine nicht-triviale elementare Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$.*

(b) *Es gibt eine nicht-triviale Σ_0-erhaltende Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$.*

(c) *Es gibt eine nicht-triviale elementare Einbettung von einem $\mathbf{L}_\alpha$ in ein $\mathbf{L}_\beta$ für Limeszahlen α und β mit kritischem Punkt echt kleiner als die Kardinalität von α.*

(d) *Es gibt eine nicht-triviale Σ_0-erhaltende Einbettung von einem $\mathbf{L}_\alpha$ in ein $\mathbf{L}_\beta$ für Limeszahlen α und β mit kritischem Punkt echt kleiner als die Kardinalität von α.*

(e) *Es gibt eine Limesordinalzahl λ, so daß es eine überabzählbare Menge von Ununterscheidbaren für das Modell $\langle \mathbf{L}_\lambda, \in \rangle$ gibt.*

(f) *Es gibt eine reelle Zahl, die eine Wahrheitsdefinition von $\mathbf{L}$ vollständig in sich kodiert[33].*

[32] Sharps, modelltheoretisch über Ununterscheidbare definiert, können über ihre Konsistenzstärke in der Hierarchie der großen Kardinalzahlen eingeordnet werden; sie haben geeignete äquivalente Formulierungen in der deskriptiven Mengenlehre mit Hilfe von Determiniertheitsfragen und sind offenbar aufgrund der noch zu nennenden Formulierungen über elementare Einbettungen auch in der Theorie der inneren Modelle zu finden.

[33] Das heißt, daß es eine Formel ψ gibt, so daß sich für gegebene konstruktible Argumente $\overline{x}$ und einer beliebigen Formel φ mit Hilfe der gegebenen reellen Zahl a entscheiden läßt, ob $\varphi(\overline{x})$ in $\mathbf{L}$ erfüllt wird oder nicht; also gilt $\mathbf{L} \models \varphi(\overline{x})$ genau dann, wenn $\models \psi(\ulcorner\varphi\urcorner, a, \overline{x})$ gilt.

(g) *Es gibt eine eindeutige Klasse $\mathcal{I}$ von Ordinalzahlen, die alle überabzählbaren Kardinalzahlen enthält, so daß für jede überabzählbare Kardinalzahl κ das folgende gilt:*

(i) *$\mathcal{I} \cap \kappa$ hat Ordnungstyp κ.*

(ii) *Wenn κ regulär ist, dann ist $\mathcal{I} \cap \kappa$ eine club Menge.*

(iii) *$\mathcal{I} \cap \kappa$ ist eine Menge von Ununterscheidbaren für das Modell $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$.*

(iv) *Die Elemente von $\mathbf{L}_\kappa$ sind in dem Modell $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$ definierbar mit Parametern aus $\mathcal{I} \cap \kappa$.*

(h) *Es gibt einen Ultrafilter U über $\mathbf{L}$, so daß das Ultraprodukt* $\mathrm{Ult}(\mathbf{L}, U)$ *fundiert ist.*

(i) *Es gibt einen schwach fügsamen Ultrafilter U über $\mathbf{L}$, so daß die Struktur $\langle \mathbf{L}, U \rangle$ iterierbar ist.*

Der Beweis des Theorems ist teilweise recht aufwendig und ist etwa für die Äquivalenz der Teile (a), (e), (f) und (g) in [Jec78, Theoreme 72, 73] zu finden.

Um aus (b) für eine Abbildung π die Aussage (a) abzuleiten, überlegen wir uns zunächst, daß schon eine Σ_1-erhaltende Abbildung genügt. Das zeigt man ganz allgemein für innere Modelle induktiv über den Formelaufbau; dabei nutzt man im Induktionsschritt aus, daß die Abbildung auf den Ordinalzahlen konfinal ist und somit für jeden Zeugen eines Existenzquantors auf der *rechten* Seite ein α findet, so daß dieser einen Rang kleiner als $\pi(\alpha)$ hat, also in $\mathbf{V}^{\mathbf{L}}_{\pi(\alpha)} = \mathbf{V}_{\pi(\alpha)} \cap \mathbf{L}$ liegt. Da aber die Rangabbildung $x \mapsto \mathrm{rnk}(x)$ eine Δ_1-Funktion ist und damit die Hierarchie von Neumanns Π_1 ist, können wir diesen beschränkten Quantor in der Induktionvoraussetzung verwenden[34]. Somit genügt für die Elementarität schon eine Σ_1-Erhaltung aus. Aber wir wissen schon nach Bemerkung 1.31, daß für eine solche Erhaltung schon eine konfinale Σ_0-erhaltende Abbildung ausreicht.

Nun ist aber schon eine beliebige Σ_0-erhaltende Abbildung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$ konfinal, denn für jedes α ist die Abbildung $\pi{\restriction}\mathbf{J}_\alpha : \mathbf{J}_\alpha \longrightarrow \pi(\mathbf{J}_\alpha)$ offenbar eine elementare Einbettung, so daß aber wegen der Übertragung von Q-Formeln und Lemma 1.30 die Zielstruktur auch eine solche Gestalt haben muß, d.h. es existiert ein $\beta(\alpha) \geq \alpha$ mit $\pi(\mathbf{J}_\alpha) = \mathbf{J}_{\beta(\alpha)}$. Offenbar liegt die Menge $\{\beta(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ unbeschränkt in On. Daher finden wir zu einem gegebenen $y \in \mathbf{L}$ ein α, so daß y schon in $\mathbf{J}_{\beta(\alpha)}$ liegt, also in $\pi(x)$ für $x := \mathbf{J}_\alpha$.

Die Richtung von (a) nach (b) ist offensichtlich erfüllt. Die gleichen Argumente mit Hilfe des Lemmas 1.32 zeigen die Äquivalenz zwischen (c) und (d). Für die Richtung

[34]Damit ist nämlich $\mathbf{V}^{\mathbf{L}}_{\pi(\alpha)} = \pi(\mathbf{V}^{\mathbf{L}}_\alpha)$, so daß wir einen beschränkten Quantor durch eine Beschränkung im Wertebereich erhalten.

von (a) nach (c) überlegt man sich, daß man ein beliebiges α oberhalb des Nachfolgers des kritischen Punktes nehmen kann und dann die vorhandene Einbettung auf $\mathbf{L}_\alpha$ einschränkt, denn wir wissen, daß wir die Erfüllungsbeziehung von $\mathbf{L}_\alpha$ über $\mathbf{L}$ durch eine Formel beschreiben können. Der entscheidende Punkt ist die Rückrichtung und das ist auch eine typische, uns im weiteren Verlauf interessierende Problemstellung, nämlich eine gegebene Abbildung auf einen größeren Definitionsbereich mit möglichst großer Erhaltungsstärke zu heben.

Zeigen wir aber zunächst mit dieser Voraussetzung die Aussage (h). Sei also $\sigma : \mathbf{L}_\alpha \longrightarrow \mathbf{L}_\beta$ eine solche Einbettung; dann ist $U := \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathbf{L}_\alpha \mid \kappa \in \sigma(X)\}$ wegen $\mathcal{P}(\kappa) \cap \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ ein Ultrafilter über $\mathbf{L}$: Von den Filtereigenschaften, der Nicht-Trivialität und der Maximalität überzeugt man sich aufgrund der Erhaltung von σ leicht. Für die Normalität nehme man sich ein X aus U sowie eine regressive und konstruktible Abbildung $f : X \longrightarrow \kappa$, dann ist sowohl $Y_\xi := \{\alpha \mid f(\alpha) \neq \xi\}$ als auch $\langle Y_\xi \,|\, \xi < \kappa\rangle$ mit f konstruktibel und damit schließlich auch $\triangle_{\xi<\kappa} Y_\xi := \{\alpha \,|\, \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} Y_\xi\}$. Wäre nun kein $X_\xi := f^{-1}{}''\,\{\xi\}$ in U, dann ist κ also für beliebige ξ nicht in $\sigma(\, f^{-1}{}''\,\{\xi\})$, also aufgrund der Erhaltung von σ ist κ in $\sigma(Y_\xi)$. Dann ist κ nach unserer Annahme aber in $\bigcap_{\xi<\kappa} \sigma(Y_\xi)$, also gilt $\kappa \in \{\alpha \mid \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} \sigma(Y_\xi)\} = \sigma(\,\{\alpha \mid \alpha \in \bigcap_{\xi<\alpha} Y_\xi\}\,) = \sigma(\,\triangle_{\xi<\kappa} Y_\xi\,)$. Weil aber sowohl X, als auch der diagonale Durchschnitt der Y_ξ konstruktibel sind, gilt aufgrund der Erhaltung von σ sofort $\kappa \in \sigma(X) \cap \sigma(\,\triangle_{\xi<\kappa} Y_\xi\,) = \sigma(\,X \cap \triangle_{\xi<\kappa} Y_\xi\,)$, d.h. diese letzte Menge ist nicht leer. Wählen wir nun ein α aus dem nicht-leeren Argument, dann findet man es für $\xi := f(\alpha) < \alpha$ in Y_ξ, aber andererseits wegen $X = \bigcup_{\zeta<\kappa} X_\zeta$ auch in X_ξ. Widerspruch!

Dieses U ist sogar schwach fügsam, denn für ein $F \in {}^\kappa\mathbf{L} \cap \mathbf{L}$ liegt mit F auch $\sigma(F)$ in $\mathbf{L}$ und wir haben für $\xi < \kappa$ immer $\sigma(\,F(\xi)\,) = \sigma(F)(\xi)$, so daß $\{\xi < \kappa \,|\, F(\xi) \in U\} = \{\xi < \kappa | \kappa \in \sigma(F(\xi))\} = \{\xi < \kappa | \kappa \in \sigma(F)(\xi)\}$, aber die letzte Menge ist offenbar aus $\sigma(F)$ und κ definierbar, also insgesamt konstruktibel. Wäre nun das Ultraprodukt nicht fundiert, so existierte nach dem Satz von Łoś eine Folge $\langle f_i \mid i < \omega\rangle$ mit $X_i := \{\xi < \kappa \,|\, f_{i+1}(\xi) \in f_i(\xi)\} \in U$. Der Schlüssel liegt in der Wahl eines geeigneten Submodells; sei $\theta > \kappa$ eine Limesordinalzahl, so daß die Funktionen in $\mathbf{L}_\theta$ liegen. Wähle ein minimales elementares Submodell $H \prec \mathbf{L}_\theta$ mit $\kappa \subseteq H$ und $f_i \in H$ für alle $i < \omega$; dann existiert ein γ mit $\pi : \mathbf{L}_\gamma \overset{\sim}{\longleftrightarrow} H$. Aufgrund der minimalen Wahl gilt $|H| = \kappa$ und somit wegen $\alpha \geq \kappa^+$ auch $\gamma < \alpha$, so daß die π-Urbilder von f_i, etwa $\overline{f}_i$, im Definitionsbereich von σ liegen. Wegen $\overline{f}_{i+1}(\xi) \in \overline{f}_i(\xi) \longleftrightarrow f_{i+1}(\xi) \in f_i(\xi)$ für $\xi < \kappa$, gilt wegen $X_i \in U$ sofort $\sigma(\overline{f}_{i+1})(\kappa) \in \sigma(\overline{f}_i)(\kappa)$; damit hätten wir einen Widerspruch. Also ist (h) gezeigt.

Damit bekommen wir natürlich sofort (a), denn wenn das Ultraprodukt fundiert ist, dann ist es ganz $\mathbf{L}$, so daß wir eine solche Einbettung bereits haben. In (h) haben wir gezeigt, daß das erste Ultraprodukt fundiert ist; um nun die Iterierbarkeit für (i) zu zeigen, verweisen wir auf die von KUNEN geleistete Arbeit. Dabei ist die Richtung von (i) nach (a) natürlich erneut offensichtlich. An dieser Stelle schließen wir die Beweisskizze, da wir bereits alle Punkte angesprochen haben.

Definition 1.76 *Gilt eine der Eigenschaften aus dem letzten Theorem, so sagen wir, daß "$0^{\#}$ existiert". Dabei ist $\mathcal{I}$ aus (g) die Klasse der sogenannten* SILVER-*Ununterscheidbaren für* $\mathbf{L}$.

Aus der Existenz von $0^{\#}$ lassen sich schließlich mit diesem Theorem auch sofort einige wichtige Folgerungen ableiten.

Korollar 1.77 *Sei* $0^{\#}$ *existent.*

(a) *Für überabzählbare Kardinalzahlen* $\lambda < \kappa$ *ist* $\mathbf{L}_\lambda \prec \mathbf{L}_\kappa$.

(b) *Für jede überabzählbare Kardinalzahl gilt* $\mathbf{L}_\kappa \prec \mathbf{L}$.

(c) *Die Klasse der* SILVER-*Ununterscheidbaren ist auch eine Klasse von Ununterscheidbaren für ganz* $\mathbf{L}$.

(d) *Jede konstruktible Menge ist schon mit Parametern ausschließlich aus den* SILVER-*Ununterscheidbaren in* $\mathbf{L}$ *definierbar.*

(e) *Jede überabzählbare Kardinalzahl ist in* $\mathbf{L}$ *stark unerreichbar.*

(f) *Jede überabzählbare Kardinalzahl ist in* $\mathbf{L}$ *eine Mahlo-Kardinalzahl.*

(g) *Für jedes* $\alpha > \omega$ *gilt* $|\mathbf{V}_\alpha \cap \mathbf{L}| \leq |\alpha|$.

Beweis: Es gelte $0^{\#}$. Für (a) sei erneut auf [Jec78, Theoreme 72, 73] verwiesen. Damit folgen aber sofort (b) und (c). Die Aussage (d) folgt dann auch zusammen mit den Eigenschaften der SILVER-Ununterscheidbaren aus dem Theorem. Für (e) genügt es, mit Hilfe der Ununterscheidbarkeit einzusehen, daß etwa $\aleph_1^{\mathbf{V}}$ auch regulär und $\aleph_\omega$ eine Limeskardinalzahl in $\mathbf{L}$ sind; damit vererben sich beide Eigenschaften auf die überabzählbaren Kardinalzahlen beim Übergang zum konstruktiblen Universum. Die Aussage folgt dann mit $\mathbf{L} \models \mathsf{GCH}$. Damit läßt sich auch (f) ableiten, denn es fehlt nur noch, daß die unerreichbaren Zahlen club liegen; aber wir haben etwa, daß $\mathcal{I} \cap \omega_1$ club in ω_1 liegt. Es bleibt (g). Dafür beachte man, daß die Menge $\mathbf{V}_\alpha \cap \mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$ aus α definierbar ist. Nach (b) ist sie auch schon in $\mathbf{L}_{\alpha^{+\mathbf{L}}}$ definierbar, d.h. sie liegt schon in einem $\mathbf{L}_\beta$, wobei $|\beta| = |\alpha|$ ist. ⊠(Korollar 1.77)

Mit diesem Korollar können wir beispielsweise die in die Formulierung (e) des Theorems 1.75 eingehende Charakterisierung von $0^{\#}$ etwas näher beschreiben: Da alle überabzählbaren Kardinalzahlen zu den SILVER-Ununterscheidbaren gehören und jede konstruktible Menge sich aus diesen in $\mathbf{L}$ definieren läßt, genügt es, nur die Erfüllbarkeit für diese Zahlen zu untersuchen; aufgrund ihrer Ununterscheidbarkeit dürfen wir uns dabei sogar auf die ersten ω-vielen beschränken, so daß sich $0^{\#}$ etwa in der Form der Menge aller natürlichen Zahlen n präsentiert, so daß n die Gödelnummer der $k(n)$-stelligen Formel φ ist und zusätzlich $\mathbf{L} \models \varphi(\aleph_1, \ldots, \aleph_{k(n)})$ gilt.

Lemma 1.78 *Sei $\kappa > \omega$ regulär. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $0^{\#}$ *existiert.*

(b) *Der Filter der abgeschlossenen und unbeschränkten Mengen* $U := \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathbf{L} \mid (\exists \mathcal{C} \subseteq \kappa)(\mathcal{C} \text{ club} \wedge \mathcal{C} \subseteq X\}$ *ist ein Ultrafilter über* $\mathbf{L}$ *auf* κ.

(c) $\aleph_\omega$ *ist in* $\mathbf{L}$ *regulär.*

Beweis: Setzen wir (a) voraus, dann genügt es für (b) zu untersuchen, ob für beliebige $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap \mathbf{L}$ eine club Menge existiert, die entweder disjunkt zu X ist, oder vollständig in X liegt; damit wäre die Maximalität eines Ultrafilters gezeigt, denn die eigentlichen Filterbedingungen sind offenbar immer erfüllt[35]. Sei dazu $\mathcal{I}$ die Klasse der Silver-Ununterscheidbaren, dann existiert zu einer gegebenen Menge X ein Term t und jeweils endlich viele $\vec{\xi}$ und $\vec{\zeta}$ aus $\mathcal{I}$ mit $\max(\vec{\xi}) < \kappa \leq \min(\vec{\zeta})$ und $X = t^{\mathbf{L}}(\vec{\xi}, \vec{\zeta})$. Nun ist die Menge $\mathcal{C} := \{\lambda \in \mathcal{I} \mid \max(\vec{\xi}) < \lambda < \kappa\}$ offenbar mit $\mathcal{I} \cap \kappa$ auch eine club Menge in κ, die nun die gewünschte Bedingung aufgrund der Ununterscheidbarkeit von $\mathcal{I}$ besitzt, da jedes λ aus $\mathcal{C}$ die gleiche Position bezüglich der $\vec{\xi}$ und $\vec{\zeta}$ hat, müssen auch alle solchen λ die gleichen Formeln in Parametern $\vec{\xi}, \vec{\zeta}$ erfüllen. Darüber hinaus muß genau aufgrund dieser Ununterscheidbarkeit der Klasse $\mathcal{I}$, die insbesondere die Kardinalzahlen $\aleph_1$ und $\aleph_\omega$ enthält, letztere in $\mathbf{L}$ wie $\aleph_1$ regulär aussehen.

Die noch nicht angesprochende Normalität von U sieht man mit Standardmethoden leicht ein: Nehmen wir für ein X aus U und eine regressive und konstruktible Abbildung $f : X \longrightarrow \kappa$ an, daß für alle $\xi < \kappa$ die Mengen $f^{-1}{}''\{\xi\}$ nicht in U liegen, dann existieren aufgrund der nachgewiesenden Maximalität club Mengen $\mathcal{C}_\xi \subseteq \kappa$ mit $\mathcal{C}_\xi \subseteq \{\alpha \mid f(\alpha) \neq \xi\}$. Somit ist für die club Menge $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C} \subseteq X$ auch die Menge $\mathcal{C} \cap \triangle_{\xi<\kappa} \mathcal{C}_\xi$ club in κ. Sei also ein α aus dieser Menge gegeben, dann liegt α für $\xi := f(\alpha) < \alpha$ in $\mathcal{C}_\xi$, so daß aber $f(\alpha) \neq \xi$ gilt. Widerspruch!

Gilt die zweite Aussage, dann ist es leicht, sich die Fundiertheit von $\mathrm{Ult}(\mathbf{L}, U)$ zu überlegen, denn betrachten wir wieder für eine gegebene Folge $\langle f_i \mid i < \omega \rangle$, die die Nicht-Fundierheit des Ultraproduktes bezeugt, die Menge $X_i := \{\xi < \kappa \mid f_{i+1}(\xi) \in f_i(\xi)\}$, dann gilt nach dem Satz von Łoś gerade $X_i \in U$, aber dann, da der abzählbare Durchschnitt von club Mengen wieder club ist, muß auch $\bigcap_{i<\omega} X_i$ in U liegen, so daß ein Element dieses Durchschnitts schon die Nicht-Fundiertheit der Epsilonbeziehung bezeugte – Widerspruch! Die noch fehlende Richtung von (c) nach (a)

[35] Offenbar ist U nicht-trivial.

werden wir mit Hilfe des Überdeckungslemmas 4.8, das wir erst im vierten Kapitel beweisen werden, sofort einsehen. ⊠(Lemma 1.78)

Um die im Theorem 1.75 genannte Eindeutigkeitsbedingung in (f) zu betonen, bemerken wir wir explizit das folgende:

Lemma 1.79 *Die im Theorem in Teil* (f)*eingehenden Eigenschaften charakterisieren die* SILVER-*Ununterscheidbaren eindeutig.*

Beweis: Sei $\tilde{\mathcal{I}} = \{\tilde{\kappa}_\xi \mid \xi \in \mathrm{On}\}$ eine weitere Klasse, die diese Eigenschaften (i) bis (iv) erfüllt, sowie alle überabzählbaren Kardinalzahlen enthält, dann können wir für reguläres θ eine Abbildung $\sigma : \mathbf{L}_\theta \longrightarrow \mathbf{L}_\theta$ kanonisch durch Übertragung der Terme $\sigma(\, t^{\mathbf{L}_\theta}(\kappa_{\xi_1}, \ldots, \kappa_{\xi_n})\,) := t^{\mathbf{L}_\theta}(\tilde{\kappa}_{\xi_1}, \ldots, \tilde{\kappa}_{\xi_n})$ definieren. Dann ist σ offenbar wohldefiniert, da wir die Ununterscheidbarkeit beider Mengen für $\mathbf{L}_\theta$ wegen Eigenschaft (iii) ausnutzen können, indem wir beim Übergang den gemeinsamen Durchschnitt $\mathcal{I} \cap \tilde{\mathcal{I}} \cap \theta$ verwenden, der natürlich selbst eine club Menge bildet. Außerdem ist σ aufgrund von Eigenschaft (iv) wirklich auf ganz $\mathbf{L}_\theta$ definiert; aus dem gleichen Grund ist σ damit eine Surjektion. Offenbar garantieren diese Überlegungen auch die Elementarität von σ. Wegen der Eindeutigkeit eines solchen Isomorphismus nach dem Isomorphiesatz von MOSTOWSKI muß σ die Identität sein. Also stimmen $\mathcal{I} \cap \theta$ und $\tilde{\mathcal{I}} \cap \theta$ für alle regulären $\theta > \omega$, einer unbeschränkten Menge, überein.
⊠(Lemma 1.79)

Um das Gefühl für die SILVER-Ununterscheidbaren zu vertiefen, werden wir jetzt andeuten, wie man mit Hilfe von Iterationen diese Menge zurückgewinnen kann. Wir wissen aufgrund des letzten (allerdings nur zitierten) Punktes aus dem Theorem 1.75, daß offenbar Zusammenhänge zwischen $0^{\#}$ und Iterationen existieren. Das entscheidende hier ist, daß wir mit ihrer Hilfe die bisher nur mit einer Existenzaussage belegten SILVER-Ununterscheidbaren erhalten können. Dazu nehmen wir natürlich an, daß $0^{\#}$ existiert. Wir werden also aus einer geeigneten nichttrivialen Einbettung die SILVER-Ununterscheidbaren konstruktiv erhalten; dabei finden wir zuvor mit Hilfe dieser Ununterscheidbaren eine solche Ausgangsabbildung. Ganz allgemein ist es möglich, aus einer beliebigen Einbettung eine *geeignete* minimale solche zu gewinnen, aber das führte an dieser Stelle zu weit[36]. Bezeichne $\mathcal{I} = \{\kappa_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ wieder die Klasse der SILVER-Ununterscheidbaren, dann weisen wir mit Hilfe dieser Klasse lediglich die Existenz einer solchen Einbettung nach, wobei das wichtigste dabei ist, daß der kritische Punkt gerade der kleinste SILVER-Ununterscheidbare ist[37]. Wir definieren daher $\pi : \mathbf{L} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}$ durch eine Verschiebung der SILVER-Ununterscheidbaren; setze

$$\pi(\kappa_\alpha) = \begin{cases} \kappa_{\alpha+1} & : \quad \alpha < \omega, \\ \kappa_\alpha & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

[36] Vergleiche [Do82, Kapitel 12].

[37] Das wird uns garantieren, daß wir wirklich *alle* SILVER-Ununterscheidbaren zurück bekommen.

Damit ist π auch schon eindeutig bestimmt, denn aufgrund der Definierbarkeit der kontruktiblen Mengen aus den SILVER-Ununterscheidbaren bleiben keine Freiheiten. Nun vergessen wir die Klasse $\mathcal{I}$ wieder und versuchen, aus dieser gegebenen Einbettung diese speziellen Ununterscheidbaren zurückzugewinnen. Setze daher $U_0 := \{X \in \mathcal{P}(\kappa_0) \cap \mathbf{L} \mid \kappa_0 \in \pi(X)\}$. KUNEN zeigte, wie schon oben bemerkt, daß dann $\langle \mathbf{L}, U_0 \rangle$ iterierbar ist. Wir werden uns mit den obigen (teilweise nur zitierten) Resultaten jetzt überlegen, daß die kritischen Punkte dieser Iteration gerade die SILVER-Ununterscheidbaren sind. Damit wissen wir nach Lemma 1.66, daß für $U_\xi := \{X \in \mathcal{P}(\kappa_\xi) \cap \mathbf{L} \mid \kappa_\xi \in \pi_{\xi,\xi+1}(X)\}$ das ξ-te Iterat die Gestalt $\langle \mathbf{L}, U_\xi \rangle$ hat. Natürlich läßt sich diese Konstruktion, da für die Iteration nur Teilmengen des kritischen Punktes interessant sind, auch ausgehend von der (iterierbaren) Struktur $\langle \mathbf{J}_{\kappa_0^+}, U_0 \rangle$ durchführen, so daß dann das ξ-te Iterat gerade die Gestalt $\langle \mathbf{J}_{\kappa_\xi^+}, U_\xi \rangle$ haben wird. Bezeichnen wir also mit $\tilde{\mathcal{I}} = \{\tilde{\kappa}_\xi \mid \xi \in \mathrm{On}\}$ die Menge der kritischen Punkte in der Iteration von $\langle \mathbf{L}, U_0 \rangle$; dann wollen wir $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$ zeigen.

Aufgrund der in Lemma 1.79 gezeigten Eindeutigkeit reicht es, sich die charakterisierenden Eigenschaften der SILVER-Ununterscheidbaren zu überlegen. Sei also eine überabzählbare Kardinalzahl θ gegeben, dann ist für ein $\xi < \theta$ immer $\tilde{\kappa}_\xi$ echt kleiner als θ, da wir aufgrund der bewiesenen Struktur des Ultraproduktes als Σ_0-Abschluß des Wertebereichs der Ultraprodukteinbettung wissen, daß die Kardinalität θ nicht erreicht wird, so daß wir induktiv schließen können, daß auch jeweils der nächste kritische Punkt unterhalb der Kardinalzahl θ bleibt. Somit ist die Menge $\mathcal{K} := \{\tilde{\kappa}_\xi \mid \xi < \theta\}$ offenbar eine Teilmenge von θ, also gilt $\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{I}} \cap \theta$. Die Menge $\mathcal{K}$ liegt natürlich auch unbeschränkt in der Kardinalzahl θ, so daß $\mathcal{K}$ für reguläre θ aufgrund der schon nachgewiesenen Abgeschlossenheit einer solchen Folge eine club Menge in θ und es gilt $\tilde{\kappa}_\theta = \theta$.

Die Ununterscheidbarkeitseigenschaft (iii) folgt nach Lemma 1.73. Die Definierbarkeitsbedingung (iv) werden wir hier auch nicht weiter zeigen können, da es doch mehr Vorarbeit bedarf; für Details schaue man in [Do82, Kapitel 12]. Der Grundgedanke, welcher sich der Feinstruktur bedient, liegt grob gesagt darin, daß wir für dieses Argument nochmals die Anfangsstruktur verkleinern[38] (die kritischen Punkte bleiben die gleichen), so daß die neue Struktur eine ganz einfache Gestalt hat[39]. Die Aussage folgt dann zusammen mit feinstrukturellen Überlegungen durch Ausnutzung der Darstellung des Ultraproduktes mit Hilfe des kritischen Punktes[40].

Zum Schluß möchten wir noch erwähnen, daß eine beliebige nicht-triviale elementare Einbettung von $\mathbf{L}$ in sich selbst genügte, d.h. wir hätten nicht unbedingt eine solche

[38] Man konstruiert den sogenannten *Kern*.

[39] Ihre Projekta fallen nämlich sofort auf 1 und der Standardparameter dieser Struktur ist leer. Damit ist diese Struktur ohne Parameter schon aus ω definierbar.

[40] In [Do82, Lemma 12.8] wird dann speziell gezeigt, daß jedes Element von $\mathbf{J}_{\kappa_\xi}$ schon über $\mathbf{L}$ aus $\{\kappa_\zeta \in \mathcal{I} \mid \zeta < \xi + \omega\}$ definierbar ist.

aus den Silver-Indiscernibles konstruieren müssen. Hat man eine beliebige Einbettung gegeben, dann sei U_0 wie oben mit Hilfe des kritischen Punktes κ definiert, so daß man erneut eine iterierbare Struktur $\langle \mathbf{J}_{\kappa^{+\mathrm{L}}}, U_0 \rangle$ erhält. Nimmt man sich nun ein abzählbares elementares Submodell von dieser Struktur, dann ist dieses zu einer Struktur $\langle \mathbf{J}_{\beta}, \overline{U}_0 \rangle$ isomorph. Diese ist nun natürlich auch iterierbar und erfüllt die erwünschten Bedingungen bezüglich der kritischen Punkte, die sich gerade als die Silver-Ununterscheidbaren herausstellen.

An dieser Stelle beenden wir unseren kleinen Exkurs.

Kapitel 2

Die kanonische Aufwärtserweiterung

2.1 Allgemeines

Die Erweiterung von vorhandenen Einbettungen spielt eine ganz wesentliche Rolle in der Theorie der inneren Modelle. Wir werden uns hier die sogenannte *Aufwärtserweiterung von Einbettungen*[1] näher anschauen. Die schon rein sprachlich verwandte *Abwärtserweiterung von Einbettungen*[2] werden wir kurz erwähnen, da wir diese an geeigneter Stelle anwenden möchten. Eine schöne Darstellung dieser Art der Erweiterung findet man in [Ze97, Kapitel 1].

Die Lemmata über die kanonische Abwärtserweiterung von Einbettungen behandeln Situationen der folgenden Art: Wenn wir eine Abbildung $\sigma : \mathcal{N} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}^{n,p}$ für akzeptierbare $\mathbf{J}$-Strukturen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ haben, wobei $p \in P^n_{\mathcal{M}}$, dann existieren eine eindeutig bestimmte $\mathbf{J}$-Struktur $\overline{\mathcal{M}}$, ein eindeutiger guter Parameter $\overline{p} \in P^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ und eine eindeutige Abbildung $\tilde{\sigma}$ mit den folgenden Beziehungen:

- $\overline{\mathcal{M}}^{n,\overline{p}} = \mathcal{N}$
- $\overline{p} \in R^n_{\overline{\mathcal{M}}}$
- $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$
- $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{M}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \mathcal{M} \\
\mathcal{N} = \overline{\mathcal{M}}^{n,\overline{p}} \arrow[u, dotted, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_0"'] & \mathcal{M}^{n,p} \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}
$$

Ein sich daraus ergebener und oft angewendeter Spezialfall ist die folgende Situation: Für eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{M}$ und $p \in P^n_{\mathcal{M}}$ existiert eine eindeutig bestimmte

[1] Im Englischen wird diese Konstruktion als "upward extension of embeddings" bezeichnet.
[2] Analog oben sprechen wir von der "downward extension of embeddings".

akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur $\overline{\mathcal{M}}$, so daß $\overline{\mathcal{M}}^{n,\overline{p}} = \mathcal{M}^{n,p}$ für einen sehr guten Parameter $\overline{p} \in R^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ und außerdem $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma^*}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ gilt. Hierbei starten wir mit $\sigma := \mathrm{id}$.

Wenden wir uns aber einer anderen Problemstellung zu. Betrachten wir nun eine konfinale Einbettung $\sigma : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \overline{\mathcal{N}}$. Nehmen wir zusätzlich an, daß wir eine $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{M}$ haben, wobei $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$.

> **Frage:** Unter welchen Bedingungen ist es möglich, eine $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{N}$ zu finden, so daß wir das unten stehende Diagramm erhalten? Existiert eine solche Abbildung $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ mit möglichst hohen Erhaltungseigenschaften?

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}"] & \mathcal{N} \\
\overline{\mathcal{M}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma"'] & \overline{\mathcal{N}} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Grundsätzlich werden wir unter zusätzlichen Voraussetzungen zwei solche Erweiterungen angegeben, einmal die sogenannte Σ_0-*Aufwärtserweiterung* und zum anderen die Σ^*-*Aufwärtserweiterung*. Je nachdem wird $\tilde{\sigma}$ natürlich auch entsprechende Erhaltungseigenschaften besitzen. Falls es der Zusammenhang – wie hier im weiteren Verlauf – erlaubt, werden wir unsere Sprechweise verkürzen: Anstatt *kanonische Aufwärtserweiterung von Einbettungen* werden wir nur kurz *Aufwärtserweiterung* schreiben.

2.2 Die kanonische Σ_0-Aufwärtserweiterung

Spezifizieren wir unser Problem und geben uns zusätzliche Eigenschaften vor. Sei $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B} \rangle$ eine akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Struktur und $\sigma : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\alpha}$ darüber hinaus konfinal, wobei $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist. Wir suchen nun ein $\mathcal{M} = \langle \mathbf{J}^{A}_{\beta}, B \rangle$ und eine Abbildung $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{M}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \mathcal{M} \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A}_{\alpha} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Wir werden die gesuchte Struktur $\mathcal{M}$ ziemlich direkt angeben können. Das hat den Vorteil, daß wir später in der Lage sein werden, mit ihr auch leichter arbeiten zu können; mehr noch, $\mathcal{M}$ wird durch die gegebenen Objekte $\overline{\mathcal{M}}$ und σ bestimmt sein.

Die Konstruktion wird an den Bau eines Ultraproduktes erinnern, daher werden wir sie auch als *Pseudo-Ultraprodukt* bezeichnen. Die Gestalt täuscht nicht; in der Tat werden wir auch ähnliche Eigenschaften ableiten können, wie zum Beispiel eine Form des Satzes von Łoś, der auch hier eine grundlegende Rolle spielen wird, oder die Gestalt der konstruierten Struktur. Man vergleiche dazu noch einmal die Eigenschaften des normalen Ultraproduktes im Lemma 1.66. Die damaligen Aufgaben des Ultrafilters wird jetzt unsere Ausgangsabbildung σ übernehmen.

Definition 2.1 (Σ_0-Pseudo-Ultraprodukt) *Sei $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B} \rangle$ eine beliebige akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Struktur. Sei außerdem $\sigma : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\alpha}$ konfinal, wobei*
$\mathbb{D}$ *$\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist. Dann sei $\mathbb{D} := \mathbb{D}(\overline{\mathcal{M}}, \sigma) := \langle D, \tilde{\in}, \tilde{=}, \tilde{A}, \tilde{B} \rangle$ die folgende Struktur*

$\Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}) & := & \{ f \in \overline{\mathcal{M}} \mid \mathrm{dom}(f) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \} \\
D & := & \{ \langle \xi, f \rangle \mid f \in \Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f)) \} \\
\langle \xi, f \rangle \tilde{\in} \langle \zeta, g \rangle & :\longleftrightarrow & \langle \xi, \zeta \rangle \in \sigma(\{ \langle \eta, \tau \rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f(\eta) \in g(\tau) \}) \\
\langle \xi, f \rangle \tilde{=} \langle \zeta, g \rangle & :\longleftrightarrow & \langle \xi, \zeta \rangle \in \sigma(\{ \langle \eta, \tau \rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f(\eta) = g(\tau) \}) \\
\tilde{A}(\langle \xi, f \rangle) & :\longleftrightarrow & \xi \in \sigma(\{ \eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \overline{A}(f(\eta)) \}) \\
\tilde{B}(\langle \xi, f \rangle) & :\longleftrightarrow & \xi \in \sigma(\{ \eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \overline{B}(f(\eta)) \})
\end{array}$$

Eine kurze Bemerkung zur Bezeichnung der Elemente von D. Bei der Schreibweise $\langle \xi, f \rangle$ suggeriert das ξ natürlich, eine Ordinalzahl zu sein. Aus der Definition der Menge D ist der Grund dafür aber nicht ersichtlich, denn danach ist ξ allgemein aus $\mathrm{dom}(f) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ und es wäre stilistisch besser, es etwa mit $\langle a, f \rangle$ zu bezeichnen. Wir wissen aber, daß es eine Surjektion von $\overline{\alpha}$ auf $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ gibt, die über $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ definierbar ist[3]. Dann ist diese Funktion offenbar in $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}+1}$ und somit erst recht in $\overline{\mathcal{M}}$. Mit Hilfe dieser Abbildung ist es dann sogar möglich, sich nur auf Ordinalzahlen ξ zu beschränken.

Für diese Struktur bekommen wir nun sofort den entscheidenen Satz von Łoś für Σ_0-Formeln, wobei an dieser Stelle, wie auch schon in der Definition von $\tilde{\in}$ und $\tilde{=}$, auch die Eigenschaft eingeht, daß $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist, denn wir werden beschränkte Mengen von $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ betrachten, worauf wir schließlich die gegebene Abbildung σ anwenden möchten. Da nun aber $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in der akzeptierbaren Struktur $\overline{\mathcal{M}}$ ist, müssen diese beschränkten Mengen schon bis zur Stufe $\overline{\alpha}$ auftauchen und somit im Definitionsbereich von σ liegen.

Lemma 2.2 (Łoś – Σ_0) *Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Σ_0-Formel. Dann gilt:*

$$\mathbb{D} \models \varphi(\langle \xi_1, f_1 \rangle, \ldots, \langle \xi_n, f_n \rangle) \text{ gdw. } \langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle \in \sigma(X^{\varphi, \overline{\mathcal{M}}}_{f_1, \ldots, f_n}),$$

wobei $X^{\varphi, \overline{\mathcal{M}}}_{f_1, \ldots, f_n} := \{ \langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(f_1(\eta_1), \ldots, f_n(\eta_n)) \}$.

[3] In unserem Fall wissen wir sogar, daß wir eine uniform definierbare Bijektion bekommen können, da $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ und daher mit Korollar 1.37 primitiv rekursiv abgeschlossen ist.

Beweis: Der Beweis geht wie üblich induktiv über den Formelaufbau von Σ_0- Formeln. In unserer Sprache der Mengenlehre müssen wir demnach zunächst Formeln der Gestalt $\varphi(x,y) := (x\dot{\in}y)$ bzw. $\varphi(x,y) := (x\dot{=}y)$ betrachten. Diese stellen jedoch kein Problem dar, weil wir die entsprechenden Realisierungen der Relationszeichen $\dot{\in}$ bzw. $\dot{=}$ in der Struktur $I\!D$ durch $\tilde{\in}$ bzw. $\tilde{=}$ genau wie gewünscht in der Definition 2.1 bereitgestellt haben.

Sei nun $\varphi(x_1,\ldots,x_n) := \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$, wobei wir jetzt voraussetzen, daß für die Formel ψ schon alles bewiesen ist. Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
& I\!D \models \varphi(\,\langle\xi_1,f_1\rangle,\ldots,\langle\xi_n,f_n\rangle\,) \\
\longleftrightarrow & I\!D \models \neg\psi(\,\langle\xi_1,f_1\rangle,\ldots,\langle\xi_n,f_n\rangle\,) \\
\longleftrightarrow & I\!D \not\models \psi(\,\langle\xi_1,f_1\rangle,\ldots,\langle\xi_n,f_n\rangle\,) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle \notin \sigma(X^{\psi,\overline{\mathcal{M}}}_{f_1,\ldots,f_n}) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle \in (\sigma(\mathrm{dom}(f_1)) \times\cdots\times \sigma(\mathrm{dom}(f_n)))\ \setminus\ \sigma(X^{\psi,\overline{\mathcal{M}}}_{f_1,\ldots,f_n}) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle \in \sigma(\,\mathrm{dom}(f_1)\times\cdots\times\mathrm{dom}(f_n)\ \setminus\ X^{\psi,\overline{\mathcal{M}}}_{f_1,\ldots,f_n}\,) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle \in \sigma(X^{\neg\psi,\overline{\mathcal{M}}}_{f_1,\ldots,f_n}) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle \in \sigma(X^{\varphi,\overline{\mathcal{M}}}_{f_1,\ldots,f_n})
\end{array}$$

Dabei gilt die fünfte Äquivalenz aufgrund der Erhaltungseigenschaften[4] von σ. Das gleiche Argument liefert einen Beweis für die Konjunktion zweier Formeln, da natürlich “$x = y\cap z$” auch Σ_0-definierbar in x, y und z ist, d.h. wir haben dann $\sigma(x) = \sigma(y)\cap\sigma(z)$.

Es bleibt nur noch der Fall einer Formel mit beschränktem Quantor, etwa $\varphi(y,z) := (\exists x\in y)\psi(x,z)$, wobei wir o.B.d.A. annehmen, daß wir nur einen Parameter haben. Wir müssen zeigen, daß für $\langle\xi_1,f_1\rangle,\langle\xi_2,f_2\rangle\in D$ gilt

$$\begin{array}{ll}
& I\!D \models\ (\,\exists x\in\langle\xi_1,f_1\rangle\,)\,\psi(x,\langle\xi_2,f_2\rangle) \\
\longleftrightarrow & \langle\xi_1,\xi_2\rangle \in \sigma(\{\langle\overline{\eta},\eta\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models\ (\,\exists x\in f_1(\overline{\eta})\,)\,\psi(x,f_2(\eta))\,\})
\end{array}$$

Für $(\rightarrow)$ nehmen wir an, daß wir ein $\langle\xi_0,f_0\rangle\,\tilde{\in}\,\langle\xi_1,f_1\rangle$ mit $I\!D\models\psi(\,\langle\xi_0,f_0\rangle,\langle\xi_2,f_2\rangle\,)$. Dann gilt nach Induktionvoraussetzung

$$\begin{array}{l}
\langle\xi_0,\xi_1\rangle \in \sigma(\,\{\langle\eta_0,\eta_1\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f_0(\eta_0)\in f_1(\eta_1)\}\,)\ \text{und} \\
\langle\xi_0,\xi_2\rangle \in \sigma(\,\{\langle\eta_0,\eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \psi(f_0(\eta_0),f_2(\eta_2))\}\,).
\end{array}$$

Also gilt $\langle\xi_0,\xi_1,\xi_2\rangle \in \sigma(\,\{\langle\eta_0,\eta_1,\eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f_0(\eta_0)\in f_1(\eta_1)\ \wedge\ \psi(f_0(\eta_0),f_2(\eta_2))\}\,)$ und damit[5] natürlich auch $\langle\xi_1,\xi_2\rangle \in \sigma(\,\{\langle\eta_1,\eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models (\,\exists x\in f_1(\eta_1)\,)\,\psi(x,f_2(\eta_2))\}$ – wie gewünscht.

[4]Wir nutzen die Σ_0-Erhaltung aus, denn $x = y\setminus z\ \longleftrightarrow\ (\,\forall a\in x\,)(\,a\in y\ \wedge\ a\notin z\,)\ \wedge\ (\,\forall a\in y\,)(\,a\notin z\ \rightarrow\ a\in x\,)$. Also gilt $\sigma(x)=\sigma(y)\setminus\sigma(z)$.

[5]Hier nutzen wir wieder die Σ_0-Erhaltung von σ aus: Wenn $A\subseteq B$, dann auch $\sigma(A)\subseteq\sigma(B)$, da $A\subseteq B\ \longleftrightarrow\ (\,\forall x\in A\,)(\,x\in B\,)$ gilt.

Für ($\leftarrow$) setze $X := X_{f_1,f_2}^{(\exists x \in y)\psi(x,z)}$. Es gelte $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \sigma(X)$. Wähle für $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in X$ ein $x_{\eta_1 \eta_2} \in f_1(\eta_1)$ mit $\overline{\mathcal{M}} \models \psi(x_{\eta_1 \eta_2}, f_2(\eta_2))$.
Setze dann für $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in \mathrm{dom}(f_1) \times \mathrm{dom}(f_2)$

$$f_0(\eta_1, \eta_2) := \begin{cases} x_{\eta_1 \eta_2} & : \text{ falls } \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in X, \\ f_1(\eta_1) & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathrm{dom}(f_0) = \mathrm{dom}(f_1) \times \mathrm{dom}(f_2) \in \mathbf{J}_{\alpha}^{\overline{A}}$ und $f_0 \in \overline{\mathcal{M}}$, weil sowohl eine Auswahlfunktion $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \mapsto x_{\eta_1 \eta_2}$ als auch f_1 in der $\mathbf{J}$-Struktur $\overline{\mathcal{M}}$ liegen. Außerdem erfüllt f_0 die gewünschte Eigenschaft $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \sigma(\ \{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f_0(\eta_1, \eta_2) \in f_1(\eta_1) \wedge \psi(\ f_0(\eta_1, \eta_2), f_2(\eta_2)\ )\}\ )$, denn

$$\begin{aligned} \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in X \quad &\longleftrightarrow \quad x_{\eta_1 \eta_2} \text{ ist definiert} \\ &\longleftrightarrow \quad f_0(\eta_1, \eta_2) \in f_1(\eta_1) \ \wedge \ \psi^{\overline{\mathcal{M}}}(\ f_0(\eta_1, \eta_2), f_2(\eta_2)\ ). \end{aligned}$$

Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $\langle \langle \xi_1, \xi_2 \rangle, f_0 \rangle \tilde{\in} \langle \xi_1, f_1 \rangle$, aber außerdem auch $\mathbb{D} \models \psi(\ \langle \langle \xi_1, \xi_2 \rangle, f_0 \rangle, \langle \xi_2, f_2 \rangle\ )$, womit die Behauptung folgt. ⊠(Lemma 2.2)

Damit ist auch sofort klar, daß $\tilde{=}$ eine Äquivalenzrelation ist, so daß wir $\mathbb{D}$ nach
$\tilde{\mathbb{D}}$ dieser Relation faktorisieren können; wir erhalten $\tilde{\mathbb{D}} := \mathbb{D} / \tilde{=}$. Sei dann $[\cdot] : \mathbb{D} \longrightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ die durch diese Faktorisierung gegebene Abbildung. Dabei werden die Prädikate natürlich repräsentantenweise definiert, also

$$[\langle \xi_1, f_1 \rangle] \tilde{\in}_{\tilde{\mathbb{D}}} [\langle \xi_2, f_2 \rangle] \ :\longleftrightarrow \ \langle \xi_1, f_1 \rangle \tilde{\in}_{\mathbb{D}} \langle \xi_2, f_2 \rangle.$$

Die Repräsentantenunabhängigkeit folgt offensichtlich aus dem Satz von Łoś. Wir werden aufgrund dieser kanonischen Definitionen nicht zwischen den Strukturen $\mathbb{D}$ und $\tilde{\mathbb{D}}$ unterscheiden. Außerdem schreiben wir im weiteren oft $[\xi, f]$ statt $[\langle \xi, f \rangle]$. Nun ist $\tilde{\mathbb{D}}$ extensional, denn dafür haben wir gerade faktorisiert. Für die weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt werden wir zusätzlich folgende Annahme treffen:

Annahme: $\tilde{\mathbb{D}}$ sei fundiert.

Das muß nicht immer der Fall sein; im Gegenteil, wir werden uns im vierten Abschnitt sogar Gedanken machen, wann wir sicher sein können, daß die so konstruierten Pseudo-Ultraprodukte fundiert sein werden. Aber unter dieser zusätzlichen Voraussetzung ist der Isomorphiesatz von MOSTOWSKI anwendbar, da $\tilde{\in}$ offenbar
$k, \mathcal{M}$ mengenähnlich ist. Wir erhalten einen Isomorphismus $k : \tilde{\mathbb{D}} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$
$\tilde{\sigma}$ transitiv ist. Setze dann $\tilde{\sigma}(x) := k([0, \mathrm{const}_x])$ für $x \in \overline{\mathcal{M}}$, wobei $\mathrm{const}_x : 1 \longrightarrow \{x\}$ die konstante Funktion[6] mit dem Wert x und einem sehr einfachen Definitionsbereich ist. Wir zeigen nun nacheinander, daß diese so definierte Funktion genau die geforderten Eigenschaften besitzt.

(2.2.1) $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}$.

[6]Die Bezeichnung *konstante Funktion* ist hier eher ein wenig übertrieben, denn aufgrund des sehr kleinen Definitionsbereiches gilt $\mathrm{const}_x = \{\langle x, 0 \rangle\}$. Man beachte aber die ähnliche Situation im normalen Ultraprodukt.

Beweis von (2.2.1): Offensichtlich ist $\tilde{\sigma}$ eine Funktion mit dem gewünschten Definitions- sowie Wertebereich. Wir brauchen uns daher nur um die Erhaltungseigenschaft zu kümmern. Sei also $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Σ_0-Formel und $a_1, \ldots, a_n$ eine Folge von Elementen aus $\overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \\
\longleftrightarrow\ & \langle 0, \ldots, 0\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1, \ldots, \eta_n\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(\ \mathrm{const}_{a_1}(\eta_1), \ldots, \mathrm{const}_{a_n}(\eta_n)\ )\}) \\
\longleftrightarrow\ & \mathbb{D} \models \varphi(\ \langle 0, \mathrm{const}_{a_1}\rangle, \ldots, \langle 0, \mathrm{const}_{a_n}\rangle\ ) \\
\longleftrightarrow\ & \tilde{\mathbb{D}} \models \varphi(\ [0, \mathrm{const}_{a_1}], \ldots, [0, \mathrm{const}_{a_n}]\ ) \\
\longleftrightarrow\ & \mathcal{M} \models \varphi(\ \tilde{\sigma}(a_1), \ldots, \tilde{\sigma}(a_n)\ ).
\end{aligned}$$

Für die erste Äquivalenz beachte man, daß aufgrund der Σ_0-Erhaltumg von σ auch $\sigma(\varnothing) = \varnothing$ gilt, also mit $0 \in x$ haben wir insbesondere $0 \in \sigma(x)$; den zweiten Doppelpfeil garantiert uns der Satz von Łoś. ⊠ (2.2.1)

Wir können jetzt zeigen:

(2.2.2) $\tilde{\sigma}$ ist konfinal.

Beweis von (2.2.2): Sei also $k([\xi, f]) \in \mathcal{M}$ beliebig vorgegeben. Nun ist aber nach Definition $f \in \overline{\mathcal{M}}$, also auch $x := \mathrm{rng}(f) \in \overline{\mathcal{M}}$. Mit dem Satz von Łoś sieht man sofort, daß $\mathcal{M} \models k([\xi, f]) \in \tilde{\sigma}(x)$ gilt, denn

$$\begin{aligned}
& \mathbb{D} \models \langle \xi, f\rangle \in \langle 0, \mathrm{const}_x\rangle \\
\longleftrightarrow\ & \langle \xi, 0\rangle \in \sigma(\{\langle \eta, \tau\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f(\eta) \in \mathrm{const}_x(\tau)\}) \\
\longleftrightarrow\ & \langle \xi, 0\rangle \in \sigma(\{\langle \eta, \tau\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models f(\eta) \in \mathrm{rng}(f)\ \wedge\ \tau \in \mathrm{dom}(\mathrm{const}_x)\}) \\
\longleftrightarrow\ & \langle \xi, 0\rangle \in \sigma(\mathrm{dom}(f) \times \mathrm{dom}(\mathrm{const}_x)) \\
\longleftrightarrow\ & \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f))\ \wedge\ 0 \in \sigma(\mathrm{dom}(\mathrm{const}_x)).
\end{aligned}$$

Dabei gilt der linke Teil der Konjunktion aufgrund der Voraussetzung und der rechte wieder wegen $\sigma(\varnothing) = \varnothing$ und $\sigma(a \times b) = \sigma(a) \times \sigma(b)$. ⊠ (2.2.2)

Wir wissen jetzt, daß $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ konfinal ist. Nach Lemma 1.29 gilt dann, daß $\mathcal{M}$ wie gewünscht eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur ist. Schließlich bleibt nur noch ein letztes zu prüfen:

(2.2.3) $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$.

Beweis von (2.2.3): Es gilt $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathbf{J}_{\bar{\alpha}}^{\bar{A}} \subseteq \mathbf{J}_{\bar{\beta}}^{\bar{A}} = \mathrm{dom}(\tilde{\sigma})$. Schrittweise werden wir nun zeigen, daß $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)$ für beliebige $x \in \mathbf{J}_{\bar{\beta}}^{\bar{A}}$. Wir setzen dazu zunächst $Q := \bigcup \tilde{\sigma}\,``\, \mathbf{J}_{\bar{\alpha}}^{\bar{A}}$ und schauen uns diese Menge etwas genauer an. Es gilt nämlich Q

(2.2.4) $Q = \{\ k([\xi, f]) \in \mathcal{M} \mid f \in \mathbf{J}_{\bar{\alpha}}^{\bar{A}}\ \wedge\ \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f))\}$.

Beweis von (2.2.4): Für ξ und f wie oben definiere $x := \operatorname{rng}(f) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$. Dann folgt mit dem Satz von Łoś sofort $[\xi, f] \mathrel{\tilde{\in}} [0, \mathrm{const}_x]$; also auch $k([\xi, f]) \in k([0, \mathrm{const}_x]) = \tilde{\sigma}(x) \in Q$; somit ist $k([\xi, f]) \subseteq Q$. Um die andere Inklusion zu bekommen sei ein $k([\xi, f]) \in Q$ gegeben, d.h. zunächst nur $f \in \Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ und es existiert ein $x \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ mit $k([\xi, f]) \in \tilde{\sigma}(x)$. Mit dem Satz von Łoś bekommen wir wegen $[\xi, f] \mathrel{\tilde{\in}} [0, \mathrm{const}_x]$ wieder $\langle \xi, 0\rangle \in \sigma(\{\langle \eta, \tau\rangle \mid f(\eta) \in \mathrm{const}_x(\tau)\})$, also $\xi \in \sigma(\{\eta \mid f(\eta) \in x\})$. Weil nach Wahl von x natürlich $f' := f{\restriction}\{\eta \mid f(\eta) \in x\} \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ und – wie gerade gesehen – $\xi \in \sigma(\operatorname{dom}(f'))$ ist, bekommen wir mit dem Satz von Łoś schließlich $[\xi, f] \mathrel{\tilde{=}} [\xi, f']$, denn $\{\eta \mid f(\eta) = f'(\eta)\} = \operatorname{dom}(f') = \{\eta \mid f(\eta) \in x\}$; also gilt wie gewünscht $k([\xi, f]) = k([\xi, f'])$. ⊠ (2.2.4)

g Definiere nun eine Abbildung $g : Q \longrightarrow \mathbf{J}^A_\alpha$ durch $g(\,k([\xi, f])\,) := \sigma(f)(\xi)$. Nach der soeben festgestellten Struktur von Q ist σ überhaupt auf solche f anwendbar. Die Definition ist aufgrund des Satzes von Łoś korrekt. Es gilt nämlich:

$$
\begin{aligned}
& \langle \xi_1, f_1\rangle \mathrel{\tilde{=}} \langle \xi_2, f_2\rangle \\
\longleftrightarrow\quad & \langle \xi_1, \xi_2\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1, \eta_2\rangle \mid f_1(\eta_1) = f_2(\eta_2)\}) \\
\longleftrightarrow\quad & \langle \xi_1, \xi_2\rangle \in \{\langle \eta_1, \eta_2\rangle \mid \sigma(f_1)(\eta_1) = \sigma(f_2)(\eta_2)\} \\
\longleftrightarrow\quad & \sigma(f_1)(\xi_1) = \sigma(f_2)(\xi_2).
\end{aligned}
$$

Der analoge Beweis zeigt offenbar auch, daß $\langle \xi_1, f_1\rangle \mathrel{\tilde{\in}} \langle \xi_2, f_2\rangle$ genau dann gilt, wenn $\sigma(f_1)(\xi_1) \in \sigma(f_2)(\xi_2)$ gilt. Damit ist g strukturerhaltend.

(2.2.5) Außerdem ist g eine Surjektion.

Beweis von (2.2.5): Aufgrund der Konfinalität von σ existiert zu einem gegebenen $y \in \mathbf{J}^A_\alpha$ ein $x \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ mit $y \in \sigma(x)$. Dann gilt aber für $f := \mathrm{id}{\restriction}x \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ offenbar $y = (\,\mathrm{id}{\restriction}\sigma(x)\,)(y) = \sigma(\,\mathrm{id}{\restriction}(x)\,)(y) = \sigma(f)(y)$. ⊠ (2.2.5)

Also ist $Q = \mathbf{J}^A_\alpha$ und $g = \mathrm{id}$; dann erhalten wir aber für $x \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ sofort die gewünschte Gleichung: $\tilde{\sigma}(x) = k([0, \mathrm{const}_x]) = g(\,k([0, \mathrm{const}_x])\,) = \sigma(\mathrm{const}_x)(0) = \mathrm{const}_{\sigma(x)}(0) = \sigma(x)$. ⊠ (2.2.3)

Also haben wir jetzt unser gesuchtes akzeptierbares $\mathcal{M} = \langle \mathbf{J}^A_\beta, B\rangle$ gefunden, so daß wir folgendes Diagramm bekommen haben:

$$
\begin{tikzcd}
\langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B}\rangle \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \langle \mathbf{J}^A_\beta, B\rangle \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^A_\alpha \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}
$$

Definition 2.3 *Hierbei heißt $\tilde{\sigma}$ die kanonische Σ_0-Aufwärtserweiterung von σ auf $\langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B}\rangle$.*

Wir können aufgrund der sehr direkten Konstruktion des Pseudo-Ultraproduktes sogar eine sehr schöne Gestalt der Elemente finden.

Lemma 2.4 *Es gilt unter den Voraussetzungen wie oben:*

$$\mathcal{M} = \{\tilde{\sigma}(f)(\xi) \mid f \in \Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f))\}.$$

Beweis: Um unser Ziel zu erreichen, werden wir erst eine andere dafür hilfreiche Aussage beweisen. Sei dazu für $\xi < \alpha$ ein $\gamma < \overline{\alpha}$ mit $\xi < \sigma(\gamma)$ gewählt. Setze $\mathrm{id}_\gamma := \mathrm{id}\restriction\gamma$ und $k_\xi := k([\xi, \mathrm{id}_\gamma])$. Wir zeigen zunächst: γ k_ξ

(2.2.6) $\qquad k_\xi = \xi.$

Beweis von (2.2.6): Wir kommen schrittweise zum Ziel.

Behauptung 1: $k_\xi \in \mathrm{On}$,

denn $\langle \xi, \mathrm{id}_\gamma\rangle$ ist in $I\!D$ transitiv und konnex, weil wir aufgrund des Satzes von Łoś beim Nachrechnen $\langle \xi, \mathrm{id}_\gamma\rangle$ immer auf $\sigma(\xi)$ zurückführen können und das ist natürlich eine Ordinalzahl.

Behauptung 2: $\xi < \xi' \longrightarrow k_\xi < k_{\xi'}$,

denn es gilt offenbar nach dem Satz von Łoś: $\langle \xi, \mathrm{id}_\gamma\rangle \mathrel{\tilde{\in}} \langle \xi', \mathrm{id}_\gamma\rangle \longleftrightarrow \langle \xi, \xi'\rangle \in \sigma(\{\langle \eta, \eta'\rangle \mid \eta \in \eta'\}) \longleftrightarrow \sigma(\xi) \in \sigma(\xi') \longleftrightarrow \xi < \xi'$.

Behauptung 3: Sei $[\zeta, f] < k_\xi$. Dann existiert ein $\xi' < \xi$ mit $[\zeta, f] = k_{\xi'}$,

denn aus $\langle \zeta, f\rangle \mathrel{\tilde{\in}} \langle \xi, \mathrm{id}_\gamma\rangle$ folgt $\langle \zeta, \xi\rangle \in \sigma(\{\langle \eta, \tau\rangle \mid f(\eta) < \tau\})$; dabei sei o.B.d.A. $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$. Sonst setze man $f' := f\restriction\{\eta \mid f(\eta) < \gamma\}$; dann gilt $I\!D \models \langle \zeta, f\rangle = \langle \zeta, f'\rangle$ und somit $\langle \zeta, \xi\rangle \in \{\langle \eta, \tau\rangle \mid \sigma(f)(\eta) < \tau\}$, daher ist $\sigma(f)(\zeta) < \xi$ und es existiert ein $\xi' < \xi$ mit $\sigma(f)(\zeta) = \xi'$. Damit gilt dann $\langle \zeta, \xi'\rangle \in \{\langle \eta, \tau\rangle \mid \sigma(f)(\eta) = \tau\}$, also $I\!D \models \langle \zeta, f\rangle = \langle \xi', \mathrm{id}_\gamma\rangle$ und somit $[\langle \zeta, f\rangle] = k_{\xi'}$.

Damit ist nun auch (2.2.6) klar: Wegen der Monotonie gilt sofort $k_\xi \geq \xi$, aber wegen der Behauptung 3 kann $k_\xi > \xi$ nicht gelten. $\boxtimes$ (2.2.6)

Nun können wir auch unsere eigentliche Behauptung $k([\xi, f]) = \tilde{\sigma}(f)(\xi)$ beweisen. Nach (2.2.6) reicht es, sich dafür folgendes zu überlegen:

(2.2.7) $\qquad I\!D \models \langle \xi, f\rangle = \langle 0, \mathrm{const}_f\rangle\ (\ \langle \xi, \mathrm{id}_\gamma\rangle\ ).$

Nehmen wir an, wir hätten diese Behauptung schon gezeigt, dann gilt diese Gleichung auch in $\tilde{I\!D}$ und wir wenden daher auf ihr die Abbildung k an, so daß wir die gesuchte Aussage $k([\xi, f]) = k([0, \mathrm{const}_f])\ (\ k([\xi, \mathrm{id}_\gamma])\ ) = \tilde{\sigma}(f)(\xi)$ erhalten.

Beweis von (2.2.7): Das können wir sehr direkt beweisen. Man betrachte folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\langle\xi,0\rangle &\in \sigma(\gamma)\times\sigma(1)=\sigma(\gamma\times 1)= \\
&= \sigma(\{\langle\eta,\tau\rangle \mid f(\eta)=f(\eta)\wedge\eta<\gamma\wedge\tau=0\}) \\
&= \sigma(\{\langle\eta,\tau\rangle \mid f(\eta)=\mathrm{const}_f(0)\,(\,\mathrm{id}_\gamma(\eta)\,)\;\wedge\eta<\gamma\wedge\tau=0\})
\end{aligned}$$

Dann folgt zusammen mit dem Satz von Łoś die Behauptung. ⊠ (2.2.7)

⊠(Lemma 2.4)

2.3 Die kanonische Σ^*-Aufwärtserweiterung

Wir wollen jetzt unsere Problemstellung erweitern. Sei wieder $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B}\rangle$ eine akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Struktur. Sei erneut $\sigma : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\alpha}$ konfinal, wobei $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist. Wir suchen jetzt aber ein $\mathcal{M} = \langle \mathbf{J}^{A}_{\beta}, B\rangle$ und eine Abbildung $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{M}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \mathcal{M} \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A}_{\alpha} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

für alle $n<\omega$ mit $\omega\varrho^{n}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$.

Dazu werden wir wieder die Konstruktion des Pseudo-Ultraprodukts bemühen, wobei wir diese natürlich ein wenig modifizieren müssen. Setze dazu

$\Gamma^*(\overline{\alpha},\overline{\mathcal{M}})$

$$\begin{aligned}
\Gamma^*(\overline{\alpha},\overline{\mathcal{M}}) := \{\ f \quad|\quad & f \text{ ist eine Funktion}, \mathrm{dom}(f)\in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}, \\
& f\in\overline{\mathcal{M}} \text{ oder } f \text{ ist gute } \mathbf{\Sigma}_1^{(n)}(\overline{\mathcal{M}})\text{-Funktion}, \\
& \text{wobei } \omega\varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}.\ \}
\end{aligned}$$

Fällt das erste Projektum unterhalb $\overline{\alpha}$, dann kommen keine zusätzlichen Funktionen hinzu, so daß wir $\Gamma(\overline{\alpha},\overline{\mathcal{M}}) = \Gamma^*(\overline{\alpha},\overline{\mathcal{M}})$ haben. In diesem Fall stimmen die Σ_0- und Σ^*-Aufwärtserweiterung überein. Im anderen Fall, d.h. also $\omega\varrho^{1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$, ist natürlich ein $f\in\overline{\mathcal{M}}$ auch immer eine gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(0)}(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion, da wir f selbst als Parameter zur Definition von f nutzen dürfen.

Mit dieser Grundmenge können wir jetzt wie im letzten Abschnitt die Struktur $\mathbb{D}$

$\mathbb{D}$ entsprechend der Definition 2.1 durch $\mathbb{D} := \langle D, \tilde{\in}, \tilde{=}, \tilde{A}, \tilde{B}\rangle$ definieren, allerdings jetzt mit $D := \{\langle\xi,f\rangle \mid f\in\Gamma^*(\overline{\alpha},\overline{\mathcal{M}}), \xi\in\sigma(\mathrm{dom}(f))\}$. Dann können wir folgende Aussagen beweisen.

Theorem 2.5 (Σ^*-Aufwärtserweiterung) *Sei $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B}\rangle$ eine akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Struktur. Sei $\sigma : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\alpha}$ konfinal, wobei $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist. Falls $\mathbb{D}$ fundiert ist, dann existiert eine akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Struktur $\mathcal{M}$ und eine Erweiterung $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ mit*

- $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ *für* $\omega\varrho^{n}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$.
- $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_2^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ *für* $\omega\varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$.
- *Sei φ eine $\Sigma_0^{(n)}$-Formel, wobei $\omega\varrho^{n}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$.*

$$\begin{aligned}&\mathcal{M} \models \varphi([\xi_1, f_1], \ldots, [\xi_m, f_m]) \longleftrightarrow \\ &\langle \xi_1, \ldots, \xi_m\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1, \ldots, \eta_m\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(f_1(\eta_1), \ldots, f_m(\eta_m))\})\end{aligned}$$

- $\mathcal{M} = \{\tilde{\sigma}(f)(\xi) \mid f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f))\}$

Definition 2.6 *Die Abbildung $\tilde{\sigma}$ aus dem letzten Theorem nennen wir die kanonische feinstrukturelle Aufwärtserweiterung von σ auf $\overline{\mathcal{M}}$.*

Korollar 2.7 *Unter den Bedingungen des Theorems gilt das folgende:*

- *Falls $\omega\varrho^{1}_{\overline{\mathcal{M}}} < \overline{\alpha}$, dann ist die Σ^*-Aufwärtserweiterung gleich der Σ_0-Aufwärtserweiterung, also $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ konfinal.*
- *Falls $\omega\varrho^{\omega}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$, dann ist $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma^*}{\longrightarrow} \mathcal{M}$.*

Der Beweis dieses Theorems wird sich über den gesamten Rest des Abschnitts über mehrere Lemmata verteilen.

Genau wie in Theorem 2.2 bekommen wir den Satz von Łoś für Σ_0-Formeln. Wir faktorisieren $\mathbb{D}$ zu $\tilde{\mathbb{D}} := \mathbb{D}/\tilde{=}$. Nehmen wir an, daß $\tilde{\mathbb{D}}$ fundiert sei, dann können wir wieder den Isomorphiesatz von Mostowski anwenden und erhalten $k : \tilde{\mathbb{D}} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$ transitiv ist. Auch hier definieren wir die gesuchte Abbildung durch $\tilde{\sigma}(x) := k(\,[\langle 0, \mathrm{const}_x\rangle]\,)$ für $x \in \overline{\mathcal{M}}$. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir nicht nur wie im letzten Abschnitt $\mathbb{D}$ und $\tilde{\mathbb{D}}$, sondern zusätzlich diese beiden auch noch mit $\mathcal{M}$ identifizieren. Da wir im Falle der Σ_0-Aufwärtserweiterung ausführlich Unterschiede gemacht haben, sollte es keine Probleme geben, die folgenden Beweise in diesem Sinne zu verstehen. Wir können die Beweise von (2.2.1) und (2.2.3) wiederholen, so daß wir auch hier bekommen $\tilde{\mathbb{D}}$ $\mathcal{M}$

(2.3.1) $\qquad \tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ und $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$,

denn den benötigten Satz von Łoś für Σ_0-Formeln konnten wir schon bereitstellen.

Das alles ist aber im allgemeinen für unserere Ziele nicht genug Erhaltung. Induktiv werden wir daher jetzt im Rest des Abschnittes das folgende zeigen:

(2.3.2) $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ für n mit $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n} \geq \overline{\alpha}$.

Den Fall $n = 0$ haben wir schon abgehandelt. Für den Induktionschritt müssen wir sehr viel mehr arbeiten. Dazu werden wir zunächst *Pseudo-Projekta* für unser Ultraprodukt $\mathcal{M}$ definieren und mit ihnen

(2.3.3) $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ modulo Pseudo-Projekta für $n < \omega$ mit $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n} \geq \overline{\alpha}$

zeigen. Anstatt die richtigen Projekta zu nehmen, haben wir einen anderen Ersatz gefunden, der die gewünschten Nachweise ermöglicht. Jedoch werden wir uns dann im Anschluß davon überzeugen, daß die Pseudo-Projekta, obwohl im allgemeinen nicht vollständig, dennoch hinreichend mit den eigentlichen Projekta übereinstimmen.

Für $n < \omega$ mit $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n+1} \geq \overline{\alpha}$ setze nun

H_n (2.3.4) $H_n := \{[\xi, f] \mid f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \operatorname{rng}(f) \subseteq H_{\mathcal{M}}^{n}, \xi \in \sigma(\operatorname{dom}(f))\}$.

Für $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n+1}$ setze

$$H_n := \{[\xi, f] \mid f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \operatorname{rng}(f) \in H_{\mathcal{M}}^{n}, \xi \in \sigma(\operatorname{dom}(f))\}.$$

Dann gilt für $\omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\mathcal{M}}^{n+1}$:

(2.3.5) $H_n = \{[\xi, f] \mid f \in H_{\mathcal{M}}^{n}, \xi \in \sigma(\operatorname{dom}(f))\}$.

Beweis von (2.3.5): Die Inklusion ($\supseteq$) ist sofort einsichtig, da mit f auch $\operatorname{rng}(f)$ in $H_{\mathcal{M}}^{n}$ liegt, weil ein hinreichend großes Fragment von ZF gilt. Sei für die andere Inklusion ein f aus $\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ gegeben. Da sowohl $\operatorname{dom}(f)$ als auch $\operatorname{rng}(f)$ in $H_{\mathcal{M}}^{n}$ liegen, ist $f \subseteq \operatorname{dom}(f) \times \operatorname{rng}(f)$ in $H_{\mathcal{M}}^{n}$ beschränkt. Nun liegt f entweder sowieso schon in $\overline{\mathcal{M}}$ oder f ist $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$; aber dann ist f als beschränkte Teilmenge von $H_{\mathcal{M}}^{n}$ auch Element von $\overline{\mathcal{M}}$, da sonst das n-te Projektum weiter gefallen wäre. In jedem Fall ist f damit wegen Akzeptierbarkeit schon in $H_{\mathcal{M}}^{n}$ zu finden. $\boxtimes$ (2.3.5)

Wir bekommen sofort

(2.3.6) H_n ist transitiv.

Beweis von (2.3.6): Sei $[\xi, f] \in H_n$ gegeben. Betrachten wir ein $[\overline{\xi}, \overline{f}] \mathrel{\tilde{\in}} [\xi, f]$. Dann gilt nach Definition, daß $\langle \overline{\xi}, \xi \rangle \in \sigma(\ \{\langle \overline{\eta}, \eta \rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \overline{f}(\overline{\eta}) \in f(\eta)\}\ )$. Setze für $\langle \overline{\eta}, \eta \rangle \in \operatorname{dom}(\overline{f}) \times \operatorname{dom}(f)$

$$f'(\overline{\eta}, \eta) := \begin{cases} \overline{f}(\overline{\eta}) & : \quad \text{falls } \overline{f}(\overline{\eta}) \in f(\eta), \\ f(\eta) & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt nach Wahl $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(\overline{f}) \times \mathrm{dom}(f) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ und damit schließlich auch $[\overline{\xi}, \overline{f}] \doteq [\langle \overline{\xi}, \xi \rangle, f']$.

Es genügt nun zu zeigen, daß $[\langle \overline{\xi}, \xi \rangle, f'] \in H_n$ liegt.

Fall 1: $\omega \varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$.

Dann ist nach Definition von H_n in diesem Fall nichts weiter zu zeigen, denn es gilt: $\mathrm{rng}(f') \subseteq \bigcup \mathrm{rng}(f) \cup \mathrm{rng}(f) \subseteq H_n$.

Fall 2: $\omega \varrho^{n}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha} > \omega \varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}}$.

In diesem Fall ist f' als Element von $\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ entweder Element von $\overline{\mathcal{M}}$ oder höchstens $\mathbf{\Sigma}^{(n-1)}_1(\overline{\mathcal{M}})$-definierbar. Im letzten Fall ist $\mathrm{rng}(f')$ als (durch $\bigcup \mathrm{rng}(f) \cup \mathrm{rng}(f) \in H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$)[7] beschränkte Teilmenge in $H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$ Element von $\overline{\mathcal{M}}$ und damit in beiden Fällen wegen Akzeptierbarkeit schon Element von $H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$. ⊠ (2.3.6)

Abkürzend bezeichne $\mathcal{M}^\star$ die Struktur $\mathcal{M}$, wobei wir die anstatt die richtigen Projekta zu nehmen, auf die Pseudo-Projekta H_n für die $n < \omega$ zurückgreifen, für die wir eine Definition gegeben haben. Die restlichen Projekta bleiben erhalten. Die entscheidene Hilfe bietet uns auch hier eine Version vom Satz von Łoś. Allerdings werden wir eine besondere Form des Uniformisierungslemmas benötigen, die wir zuerst beweisen werden. $\mathcal{M}^\star$

Lemma 2.8 *Sei $R(y^m, x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})$ eine $\Sigma^{(m)}_1$-Formel, wobei $i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq m \leq n$ und $\omega \varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$. Seien weiterhin $f_1, \ldots, f_k$ gute $\mathbf{\Sigma}^{(n)}_1(\overline{\mathcal{M}})$-Funktionen, so daß f_j nach H^{i_j} abbildet und $\mathrm{dom}(f_i) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$. Dann existiert eine gute $\mathbf{\Sigma}^{(n)}_1(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion $g \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$, so daß g nach $H^m_{\overline{\mathcal{M}}}$ abbildet und R bezüglich der f_j uniformisiert, d.h. es gilt*

$$\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^m) R(y^m, f_1(\xi_1), \ldots, f_k(\xi_k)) \longleftrightarrow R(g(\xi_1, \ldots, \xi_k), f_1(\xi_1), \ldots, f_k(\xi_k)).$$

Darüber hinaus können wir es erreichen, daß $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f_1) \times \cdots \times \mathrm{dom}(f_k)$.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen des Lemmas gibt uns der normale Uniformisierungssatz 1.54 ein F, so daß

(a) F ist eine $\mathbf{\Sigma}^{(m)}_1(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion, die nach H^m abbildet und

(b) $\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^m) R(y^m, x_1, \ldots, x_k) \longleftrightarrow R(F(x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$.

Ohne die zusätzlich geforderten Bedingungen könnten wir einfach definieren

$$g(x_1, \ldots, x_k) \simeq F(f_1(x_1), \ldots, f_k(x_k)),$$

[7] Diese Menge liegt in $H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$, weil in diesem Fall $\mathrm{rng}(f) \in H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$ gilt und wir einen hinreichend großen Teil von **ZF** in $H^{n}_{\overline{\mathcal{M}}}$ zur Verfügung haben.

aber dann wissen wir nur $\mathrm{dom}(g) \subseteq u := \mathrm{dom}(f_1) \times \ldots \times \mathrm{dom}(f_k)$. Das reicht uns aber nicht, da wir unbedingt $\mathrm{dom}(g) \in \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}}$ haben wollen. Außerdem müssen die Werte in H^m liegen. Daher setzen wir zunächst

$$\tilde{F}(x_1,\ldots,x_k,y) \simeq \begin{cases} F(x_1,\ldots,x_k) & : \quad y \in u \text{ und definiert ist} \\ & \quad\ \text{mit Funktionswert in } H^m. \\ 0 & : \quad y \in u \text{ und } (\ F(x_1,\ldots,x_k) \\ & \quad\ \text{nicht definiert ist oder} \\ & \quad\ F(x_1,\ldots,x_k) \notin H^m\ ). \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{F}$ auch eine gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion nach H^m. Setze dann

$$g(x_1,\ldots,x_k) \simeq \tilde{F}(f_1(x_1),\ldots,f_k(x_k),\langle x_1,\ldots,x_k\rangle)$$

Offensichtlich erfüllt g die geforderten Bedingungen. ⊠(Lemma 2.8)

Dann steht dem Satz von Łoś nichts mehr im Wege.

Lemma 2.9 (Łoś – $\Sigma_0^{(n)}$ – **Pseudoprojekta)** *Sei φ eine beliebige $\Sigma_0^{(n)}$-Formel, wobei $n < \omega$ derart, daß $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$. Dann gilt:*

$$\mathcal{M}^\star \models \varphi([\xi_1,f_1],\ldots,[\xi_m,f_m]) \longleftrightarrow$$
$$\langle \xi_1,\ldots,\xi_m\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1,\ldots,\eta_m\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(f_1(\eta_1),\ldots,f_m(\eta_m))\}).$$

Beweis: Wir führen eine Induktion über $n < \omega$ mit $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$; sei dazu $\tilde{n}$ das maximale n mit dieser Eigenschaft. Den Induktionsanfang $n = 0$ haben wir schon betrachtet. Nehmen wir daher an, wir hätten die Behauptung schon für $n - 1 < \tilde{n}$ gezeigt und es gilt $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$. Sei dann φ eine $\Sigma_0^{(n)}$-Formel. Dann sind aufgrund der induktiven Definition 1.48 dieser Formelklasse verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: φ ist schon eine $\Sigma_0^{(n-1)}$-Formel; dann greift sofort die Induktionsvoraussetzung.

Fall 2: φ entstand durch Negation oder BOOLEsche Verknüpfung von Formeln, für die wir die Aussage schon voraussetzen.

Aufgrund der Σ_0-Erhaltung von σ ist dieser Fall auch schnell ersichtlich. Die verwendeten Methoden haben wir alle schon in dem Beweis des Satzes von Łoś für den Σ_0-Fall in Theorem 2.2 gesehen.

Fall 3: φ hat die Gestalt $(\ \exists y^{n-1}\ )\ \psi(y^{n-1},x)$ für eine $\Sigma_0^{(n-1)}$-Formel ψ.

Die Richtung $(\rightarrow)$ stellt kein Problem dar: Es gelte $\mathcal{M}^\star \models (\exists y^{n-1})\psi(y^{n-1},[\xi_2,f_2])$, d.h. es existiert ein $y = [\xi_1,f_1] \in H_{n-1}$ mit $\mathcal{M}^\star \models \psi([\xi_1,f_1],[\xi_2,f_2])$. Nach Induktionvoraussetzung gilt dann aber

$$\begin{aligned} \langle \xi_1,\xi_2\rangle &\in \sigma(\ \{\langle \eta_1,\eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \psi(f_1(\eta_1),f_2(\eta_2))\}\ ) \\ &\subseteq \sigma(\ \{\langle \eta_1,\eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models (\ \exists y^{n-1}\ )\ \psi(y^{n-1},f(\eta_2))\}\ ), \end{aligned}$$

denn wir haben aufgrund der Σ_0-Erhaltung $\sigma(G) \subseteq \sigma(H)$, für $G \subseteq H$.

Für $(\leftarrow)$ benötigen wir allerdings die neue Form des Uniformisierungssatzes. Nehmen wir an, es gelte $\xi \in \sigma(\{\eta|\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^{n-1})\psi(y^{n-1}, f(\eta))\})$ für ein f aus $\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$; dann ist f höchstens $\mathbf{\Sigma}_1^{(\tilde{n}-1)}(\overline{\mathcal{M}})$. Definiere nun R durch $\overline{\mathcal{M}} \models R(y^{n-1}, x) \;:\longleftrightarrow \psi(y^{n-1}, x)$. Dann ist R eine $\Sigma_0^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$-Relation. Nach Lemma 2.8 existiert dann eine gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(\tilde{n}-1)}(\overline{\mathcal{M}})$-Funktion $g \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$, so daß g nach $H^{n-1}_{\overline{\mathcal{M}}}$ abbildet mit $\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^{n-1})R(y^{n-1}, f(\xi)) \longleftrightarrow R(g(\xi), f(\xi))$, d.h. es gilt $\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^{n-1})\,\psi(y^{n-1}, f(\eta)) \longleftrightarrow \overline{\mathcal{M}} \models \psi(g(\eta), f(\eta))$, so daß wir schließlich $\xi \in \sigma(\,\{\eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \psi(g(\eta), f(\eta))\}\,)$ erhalten. Dann greift offensichtlich wieder die Induktionsvoraussetzung.

Fall 4: φ hat die Gestalt $(\exists y^n \in z^n)\psi(y^n, x, z)$ für eine $\Sigma_0^{(n)}$-Formel ψ, für die wir die Aussage schon voraussetzen.

Wir müssen für $[\xi_1, f_1] \in H_n$, $f_2 \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ zeigen, daß das folgende gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^\star \models (\exists y^n \in [\xi_1, f_1])\psi(y^n, [\xi_2, f_2], [\xi_1, f_1]) \\ \longleftrightarrow\quad & \langle\xi_1, \xi_2\rangle \in \sigma(\,\{\langle\eta_1, \eta_2\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^n \in f_1(\eta_1))\psi(y^n, f_2(\eta_2), f_1(\eta_1))\}\,) \end{aligned}$$

Die Richtung $(\rightarrow)$ stellt wie im letzten Fall wieder keine Schwierigkeit dar, so daß wir den Beweis übernehmen können. Die interessante Richtung ist $(\leftarrow)$. Dort werden wir erneut zwei Fälle unterscheiden. Nehmen wir an, daß $\langle\xi_1, \xi_2\rangle \in \sigma(\{\langle\eta_1, \eta_2\rangle|\overline{\mathcal{M}} \models (\exists y^n \in f_1(\eta_1))\psi(y^n, f_2(\eta_2), f_1(\eta_1))\})$ gilt.

Fall 4a: $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1} \geq \overline{\alpha}$.

In diesem Fall können wir den Beweis des Falls 3 imitieren. Unter der Voraussetzung des aktuellen Falls spielt nämlich die Beschränkung des Quantors gar keine Rolle, so daß wir einfach wie folgt eine Relation R definieren:

$$\overline{\mathcal{M}} \models R(y, x, z) \;:\longleftrightarrow\; y^n \in x \,\wedge\, \psi(y^n, x, z)$$

Dann ist R eine $\Sigma_0^{(n)}(\overline{\mathcal{M}})$-Relation. Das Lemma 2.8 gibt uns dann einen geeigneten Zeugen, so daß der Rest mit der Induktionsvoraussetzung wie im letzten Fall folgt.

Fall 4b: $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$.

In dieser Situation können wir das Lemma 2.8 nicht mehr anwenden. Allerdings liegt f_1 in diesem Fall in $H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$. Daher ist es möglich, mittels f_1 eine geeignete Funktion $g \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ zu definieren. Setze

$$g(\eta_1, \eta_2) \simeq \begin{cases} \text{das } <_{\overline{\mathcal{M}}}\text{-kleinste } y \in f_1(\eta_1) \text{ mit} & \\ \overline{\mathcal{M}} \models \psi(\,y, f_1(\eta_1), f_2(\eta_2)\,) & : \quad \text{falls definiert,} \\ f_1(\eta_1) & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

wobei $\langle\eta_1, \eta_2\rangle \in \mathrm{dom}(f_1) \times \mathrm{dom}(f_2) \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \subseteq H_n$.

Dann ist g offenbar $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$-definierbar[8], also – weil sowohl $\mathrm{dom}(g)$ als auch $\mathrm{rng}(g)$ beschränkte Teilmengen von $H^n_{\mathcal{M}}$ sind – Element von $\overline{\mathcal{M}}$ und damit wegen Akzeptierbarkeit $g \in H^n_{\mathcal{M}}$, also $[\langle \xi_1, \xi_2 \rangle, g] \in H_n$. Dann[9] ist $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ sowohl in $\sigma(\{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle | \overline{\mathcal{M}} \models g(\eta_1, \eta_2) \in f_1(\eta_1)\})$ als auch in $\sigma(\{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle | \overline{\mathcal{M}} \models \psi(g(\eta_1, \eta_2), f_2(\eta_2), f_1(\eta_1))\})$, so daß die Behauptung jetzt leicht mit der Induktionsvoraussetzung folgt. Damit ist auch diese Version des Satzes von Łoś bewiesen. ⊠(Lemma 2.9)

$\tilde{\sigma}$ Wir setzen nun den Beweis wie im Abschnitt 1 fort. Definiere $\tilde{\sigma}(x) := [0, \mathrm{const}_x]$ für $x \in \overline{\mathcal{M}}$. Nach dem Satz von Łoś ist $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}^\star$ für $\omega\varrho^n_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$ eine $\Sigma_0^{(n)}$-erhaltende Abbildung, denn für eine $\Sigma_0^{(n)}$-Formel $\varphi(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(x) \quad &\longleftrightarrow \quad 0 \in \sigma(\ \{\eta \,|\, \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(\mathrm{const}_x(\eta))\}\ ) \\ &\longleftrightarrow \quad \mathcal{M}^\star \models \varphi([0, \mathrm{const}_x]) \\ &\longleftrightarrow \quad \mathcal{M}^\star \models \varphi(\tilde{\sigma}(x)), \end{aligned}$$

wobei die erste Äquivalenz leicht einzusehen ist, wenn man $x = \mathrm{const}_x(0)$ und $\sigma(0) = 0$ beachtet. Damit gilt also insbesondere

$$H_n = \bigcup \tilde{\sigma}\text{ ''}\, H^n_{\mathcal{M}} \text{ für } \omega\varrho^n_{\mathcal{M}} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho^{n+1}_{\mathcal{M}}. \tag{2.3.7}$$

Beweis von (2.3.7): Für ($\subseteq$) sei $[\xi, f] \in H_n$. Setze dann $x := \mathrm{rng}(f) \in H^n_{\mathcal{M}}$. Offenbar gilt nach dem Satz von Łoś $[\xi, f] \mathrel{\tilde{\in}} [0, \mathrm{const}_x] = \tilde{\sigma}(x)$. Also $[\xi, f] \in \bigcup \tilde{\sigma}\text{ ''}\, H^n_{\mathcal{M}}$. Sei andererseits ein $x \in H^n_{\mathcal{M}}$ gegeben. Wir zeigen, daß $\tilde{\sigma}(x)$ eine Teilmenge von H_n ist. Sei dafür ein $[\xi, f] \in \tilde{\sigma}(x)$ beliebig gewählt. Setze $f' := f \restriction \{\eta \mid f(\eta) \in x\}$. Dann ist nach dem Satz von Łoś wieder $[\xi, f] \mathrel{\tilde{=}} [\xi, f']$. Aber nun ist zusätzlich $\mathrm{rng}(f') \subseteq x \in H^n_{\mathcal{M}}$ und f ist höchstens $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$, daher auch f'. Aber als beschränkte Teilmenge von $H^n_{\mathcal{M}}$ ist es schon Element von $\overline{\mathcal{M}}$; somit ist aber f' wegen Akzeptierbarkeit auch schon Element von $H^n_{\mathcal{M}}$. ⊠ (2.3.7)

Neben dem Satz von Łoś für $\Sigma_0^{(n)}$-Formeln mit $\omega\varrho^n_{\mathcal{M}} \geq \overline{\alpha}$ und der $\Sigma_0^{(n)}$-Erhaltung von $\tilde{\sigma}$ in diesem Fall bekommen wir für n mit $\omega\varrho^{n+1}_{\mathcal{M}} \geq \overline{\alpha}$ sogar eine bessere Erhaltungsstärke.

Lemma 2.10 *Sei $\omega\varrho^{n+1}_{\mathcal{M}} \geq \overline{\alpha}$. Dann gilt $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \xrightarrow[\Sigma_2^{(n)}]{} \mathcal{M}$.*

Beweis: Wir wissen schon, daß in diesem Fall $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ eine $\Sigma_1^{(n)}$-erhaltende Abbildung[10] ist. Damit ist sie insbesondere auch $\Sigma_2^{(n)}$-aufwärtserhaltend. Für die andere Richtung sei φ eine $\Pi_1^{(n)}$-Formel mit $\mathcal{M} \models (\ \exists z^n\ )\, \varphi(z^n, \tilde{\sigma}(x_1), \ldots, \tilde{\sigma}(x_m))$. Dann existiert ein Zeuge $[\xi, f] \in H_n$, so daß wir mit dem Satz von Łoś $\xi \in \sigma(A)$

[8]Hierbei geht wesentlich ein, daß f_1 und f_2 als Elemente von $\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ entweder selbst Element von $\overline{\mathcal{M}}$ oder höchstens $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$ sind.

[9]Das folgt analog dem Beweis von Lemma 2.2 für den Fall des beschränkten Quantors.

[10]Diese Abbildung ist in diesem Fall sogar $\Sigma_0^{(n+1)}$-erhaltend.

erhalten, wobei $A := \{\eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(f(\eta), x_1, \ldots, x_m)\}$, bekommen. Wegen der Σ_0-Erhaltung von σ ist insbesondere auch A nicht leer. Also gilt wegen $\operatorname{rng}(f) \subseteq H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ auch $\mathcal{M} \models (\exists z^n)\, \varphi(z^n, x_1, \ldots, x_m)$. ⊠(Lemma 2.10)

Lemma 2.11 *$\mathcal{M}$ ist eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur.*

Beweis: Wir wissen nach Lemma 1.30, daß die Bedingung, eine akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur zu sein, eine Q-Formel ist. Falls nun schon das erste Projektum von $\mathcal{M}$ unterhalb $\overline{\alpha}$ fällt, dann fallen die Konstruktionen des Σ^*- bzw. der Σ_0-Pseudo-Ultraproduktes zusammen und wir wissen, daß die kanonische Erweiterung nicht nur Σ_0-erhaltend, sondern auch noch konfinal ist. Gilt andererseits $\omega\varrho^1_{\mathcal{M}} > \overline{\alpha}$, dann ist die kanonische Erweiterung nach dem letzten Lemma sogar Σ_2-erhaltend. In beiden Fällen erhält sie also die Q-Bedingungen. ⊠(Lemma 2.11)

Damit ist unser Ziel fast erreicht. Allerdings haben wir die Aussage bisher nur mit $\mathcal{M}^\star$ statt $\mathcal{M}$. Wir zeigen nun, daß unsere Pseudo-Projekta den eigentlichen Projekta von $\mathcal{M}$ hinreichend ähneln. Genauer gesagt werden wir das folgende zeigen:

Lemma 2.12 *Für $n < \omega$ mit $\omega\varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$ gilt $H_n = H^n_{\mathcal{M}}$. Für $n < \omega$ mit $\omega\varrho^n_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}}$ gilt $H_n \subseteq H^n_{\mathcal{M}}$.*

Um das zu erreichen, zeigen wir zunächst folgendes:

Lemma 2.13 *Sei $\omega\varrho^n_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho^{n+1}_{\overline{\mathcal{M}}}$. Dann gilt für $H := \bigcup \tilde{\sigma}\,{}''H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$, daß $\tilde{\sigma}\restriction H^n_{\overline{\mathcal{M}}} : H^n_{\overline{\mathcal{M}}} \longrightarrow H$ die kanonische Σ_0-Aufwärtserweiterung von σ ist.*

Beweis von (2.13): Wir müssen nur zeigen, daß ein Element $x \in H$ die richtige Gestalt hat, da $\tilde{\sigma}\restriction H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ die Einschränkung eines Pseudo-Ultraproduktes entsprechend der Definition der kanonischen Aufwärtserweiterung ist. Da x insbesondere in $\mathcal{M}$ liegt, existieren ξ und f, so daß $[\xi, f] = x$ mit $f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ und $\xi \in \sigma(\operatorname{dom}(f))$. Wir müssen zeigen, daß es ein $f' \in \Gamma(\overline{\alpha}, H^n_{\overline{\mathcal{M}}})$ mit $[\xi, f] \,\tilde{=}\, [\xi, f']$ existiert. Offensichtlich sind nach Konstruktion die Funktionen in $\Gamma(\overline{\alpha}, H^n_{\overline{\mathcal{M}}})$ gerade die Funktionen in $H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$. Wegen der konfinalen Definition von H existiert zu x ein $a \in H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ mit $x \in \tilde{\sigma}(a)$. Dann können wir wegen $\xi \in \sigma(\{\eta \mid f(\eta) \in a\})$ und dem neuen Uniformisierungssatz 2.8 annehmen, daß $\operatorname{rng}(f) \subseteq a \in H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$ ist. Nun ist f höchstens $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$, also ist $f \in \overline{\mathcal{M}}$, d.h. aber nach Akzeptierbarkeit liegt f dann schon in $H^n_{\overline{\mathcal{M}}}$. Damit ist f' dann wie gewünscht. ⊠ (2.13)

Beweis des Lemmas 2.12: Wir beweisen diese Inklusionen induktiv über $n < \omega$. Für $n = 0$ ist die Aussage offensichtlich, denn wir haben $H^0_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Im Induktionsschritt nehmen wir zunächst $\omega\varrho^{(n+1)+1}_{\overline{\mathcal{M}}} \geq \overline{\alpha}$ an. Wir zeigen:

$$H_{n+1} \subseteq H^{n+1}_{\mathcal{M}}. \tag{2.3.8}$$

A

$h, \overline{A}'$

Beweis von (2.3.8): Dafür reicht es, daß $\langle H_{n+1}, A \cap H_{n+1}\rangle$ für beliebige $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}(\mathcal{M})$-Teilmenge A fügsam ist. Sei dafür $x \in H_{n+1}$, etwa $x = [\xi, f]$, gegeben. Für A existiert ein $p = [\zeta, g]$, so daß $A(z) \longleftrightarrow A'(z,p)$ für ein $\Sigma_1^{(n)}(\mathcal{M})$-definierbares A'. Nach Wahl von n gilt für $f, g \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ sogar $\mathrm{rng}(f), \mathrm{rng}(g) \subseteq H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Definiere $h(\eta) \simeq \{z \in f(\eta) \mid \overline{A}'(z, g(\zeta))\}$, wobei $\overline{A}'$ das Prädikat über $\overline{\mathcal{M}}$ bezeichne, das dieselbe Definition hat wie A' über $\mathcal{M}$. Falls $h(\eta)$ definiert ist, dann ist $h(\eta)$ als beschränkte $\Sigma_1^{(n)}(\overline{\mathcal{M}})$-Teilmenge von $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$ schon Element von $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Wir zeigen nun, daß die

Behauptung 1: $h \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$

gilt und damit auch $[\xi, h] \in H_{n+1}$, womit wir dann die

Behauptung 2: $[\xi, h] = A \cap [\xi, f]$

erhalten werden und daher mit dieser Inklusion fertig sind.

Beweis der Behauptung 1: Setze

$$\begin{aligned} y^{n+1} = \tilde{h}(x^{n+1}, w^{n+1}) \quad :\longleftrightarrow \quad & (\forall z^{n+1} \in y^{n+1})(\, z^{n+1} \in x^{n+1} \,\wedge\, \overline{A}'(z^{n+1}, w^{n+1})\,) \\ \wedge \quad & (\forall z^{n+1} \in x^{n+1})(\, \overline{A}'(z^{n+1}, w^{n+1}) \longrightarrow z \in y^{n+1}\,). \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{h}$ eine $\Sigma_0^{(n+1)}$-Funktion nach $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$, also ist $\tilde{h}$ eine gute Funktion. Daher ist aber h auch eine gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(r)}$-Funktion, wobei $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{r+1} \geq \overline{\alpha}$ und A', f, g $\mathbf{\Sigma}_1^{(r)}$, weil $h(\eta) \simeq \tilde{h}(f(\eta), g(\zeta))$. Also ist $h \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$. Wegen $\mathrm{rng}(h) \subseteq H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$ und $\xi \in \sigma(\mathrm{dom}(h))$ gilt auch $[\xi, h] \in H_{n+1}$. ⊠(Behauptung 1)

Beweis der Behauptung 2: Wegen

$$\begin{aligned} [\xi_1, h_1] \,\tilde{\in}\, [\xi, h] \quad &\longleftrightarrow \quad \langle \xi_1, \xi\rangle \in \tilde{\sigma}(\{\langle \eta_1, \eta\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models h_1(\eta_1) \in h(\eta)\}) \\ &\qquad\qquad = \{\langle \eta_1, \eta\rangle \mid \tilde{\sigma}(h_1)(\eta_1) \in \tilde{\sigma}(h)(\eta)\} \\ &\longleftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(h_1)(\xi_1) \in \tilde{\sigma}(h)(\xi) \end{aligned}$$

und $\tilde{\sigma}(h)(\xi) = \{x \in \tilde{\sigma}(f)(\xi) \mid A'(x, \tilde{\sigma}(g)(\zeta))\}$ gilt $\tilde{\sigma}(h_1)(\xi_1) \in \tilde{\sigma}(f)(\xi)$, also

$$\langle \xi_1, \xi\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1, \eta\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models h(\eta_1) \in f(\eta)\}),$$

d.h. $[\xi_1, h_1] \,\tilde{\in}\, [\xi, f]$. Außerdem erhalten wir: $A'(\tilde{\sigma}(h_1)(\xi_1), \tilde{\sigma}(g)(\xi))$, d.h.

$$\langle \xi_1, \zeta\rangle \in \sigma(\{\langle \eta_1, \eta\rangle \mid \overline{\mathcal{M}} \models \overline{A}'(h_1(\eta_1), g(\eta))\},$$

also $A'([\xi_1, h_1], [\zeta, g])$. Somit gilt $[\xi, h] \subseteq A \cap [\xi, f]$. Hierbei haben wir natürlich schon Gebrauch von der Eigenschaft $\sigma \subseteq \tilde{\sigma}$ gemacht. Da wir nur äquivalente Umformungen duchgeführt haben, gilt damit auch die andere Inklusion. ⊠(Behauptung 2)

Also gilt in diesem Fall $H_{n+1} \subseteq H_{\mathcal{M}}^{n+1}$. ⊠ (2.3.8)

Diese Inklusion bekommen wir auch für den Fall, daß wir gerade das letzte Projektum betrachten, welches noch oberhalb $\overline{\alpha}$ liegt. Wir können dafür die Beweisidee von (2.3.8) wiederholen, so daß im zu zeigenen Induktionsschritt – also in der Situation $\omega\varrho_{\overline{\alpha}}^{n+1} \geq \overline{\mathcal{M}} > \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{(n+1)+1}$ – $[\zeta, g], [\xi, f], A, A'$ wie oben gegeben seien. Nun ist aber $\mathrm{rng}(f) \in H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$, also $f \in H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Setze dann wieder $h(\eta) \simeq \{x \in f(\eta) \mid \overline{A}'(x, g(\zeta))\}$. Dann ist mit f auch h in $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Setze also $u := (\,\mathrm{dom}(f) \times \mathrm{rng}(f)\,) \cap \{\langle \xi, x\rangle \mid A'(x, g(\zeta))\}$. Somit ist u als beschränkte Teilmenge von $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$ auch Element $\overline{\mathcal{M}}$ und wieder nach Akzeptierbarkeit schon in $H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Außerdem haben wir $h = \{\langle \xi, x\rangle \in u \mid x \in f(\xi) \ \wedge\ \overline{A}'(\xi, g(\zeta))\}$. Also ist $h \in H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$ und daher auch $\mathrm{rng}(h) \in H_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$. Dann geht der Rest von den beiden Behauptungen 1 und 2 genauso wie oben durch.

Bisher haben wir $H_n \subseteq H_{\mathcal{M}}^n$ (in beiden Fällen), wie es in Lemma 2.12 behauptet wurde. Zeigen wir für die andere Inklusion zunächst:

(2.3.9) $\qquad H_n = \mathbf{J}_{\varrho_n}^A$ für ein $\varrho_n \leq \beta$, $\qquad \varrho_n$

d.h. wir haben damit schon $\varrho_n \leq \varrho_{\mathcal{M}}^n$.

Beweis von (2.3.9): Für $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1} \geq \overline{\alpha}$ gilt nach Lemma 2.10 sofort $\tilde{\sigma}\restriction H_{\overline{\mathcal{M}}}^n : \mathbf{J}_{\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n}^{\overline{A}} \underset{\Sigma_2}{\longrightarrow} \langle H_n, A \cap H_n\rangle$. Falls $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$, dann gilt nach Lemma 2.13 auch $\tilde{\sigma}\restriction H_{\mathcal{M}}^n : \mathbf{J}_{\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n}^{\overline{A}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \langle H_n, A \cap H_n\rangle$ konfinal. In beiden Fällen werden Q-Bedingungen erhalten, d.h. $\langle H_n, A \cap H_n\rangle$ ist die relativ zu A konstruierte akzeptierbare $\mathbf{J}$-Struktur.

$\boxtimes$ (2.3.9)

Wir zeigen nun für $\omega\varrho_{\overline{\alpha}}^{n+1} \geq \overline{\alpha}$, daß auch $\varrho_n \geq \omega\varrho_{\mathcal{M}}^n$ gilt, so daß wir damit in diesem Fall auch die noch offene Inklusion $H_{\mathcal{M}}^n \subseteq H_n$ bewiesen hätten. Sei also $\overline{A}$ eine in $\overline{p}$ definierbare $\Sigma_1^{(n-1)}(\overline{\mathcal{M}})$ Menge mit $\overline{A} \cap \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \notin \overline{\mathcal{M}}$. Sei weiterhin A die $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathcal{M})$-Teilmenge definiert in $p := \tilde{\sigma}(\overline{p})$ mit der gleichen Definition wie $\overline{A}$ über $\overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt auch hier

(2.3.10) $\qquad A \cap \omega\varrho_n \notin \mathcal{M}$.

Beweis von (2.3.10): Sonst gäbe es ein $[\xi, f] = A \cap \omega\varrho_n$ in $\mathcal{M}$, d.h. es gilt $R(\,[\xi, f]\,)$, wobei R eine $\Pi_1^{(n)}$-Definition in dem Parameter $p = \tilde{\sigma}(\overline{p})$ hat, gegeben durch $R(x) :\longleftrightarrow (\forall\xi^n)(A(\xi^n) \to \xi^n \in x) \wedge (\forall\xi^n)(\xi^n \in x \to A(\xi^n))$. Man beachte, daß ξ^n zur Zeit bezüglich $\mathcal{M}$ über H_n läuft. Dadurch dürfen wir auch den Satz von Łoś anwenden. Wir bekommen also für $X := \{\eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \overline{R}(\,f(\eta)\,)\}$, daß $\xi \in \sigma(X)$ ist, insbesondere ist dann $\sigma(X) \neq \varnothing$, also $X \neq \varnothing$. Dabei ist $\overline{R}$ mit derselben $\Pi_1^{(n)}$-Definition aus $\overline{p}$ entstanden wie R aus p. Somit haben wir aber den gewünschten Widerspruch gefunden, denn $R(\,f(\eta)\,)$ besagt gerade, daß $f(\eta) = \overline{A} \cap \omega\varrho_{\overline{\alpha}}^n$ gilt, also $\overline{A} \cap \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \in \overline{\mathcal{M}}$. $\boxtimes$ (2.3.10)

Daher existiert schon eine neue $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}$-Teilmenge von $\omega\varrho_{n+1}$, also $\varrho_{n+1} \geq \varrho_{\mathcal{M}}^{n+1}$.

$\boxtimes$(Lemma 2.12)

Fassen wir zusammen. Wir haben

(a) $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}^\star$, wobei $\mathcal{M}^\star = \mathcal{M}$ modulo $\langle H_n \mid \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \geq \overline{\alpha}\rangle$.

(b) $H_n = H_{\mathcal{M}}^n$ für $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1} \geq \overline{\alpha}$.

(c) $H_n \subseteq H_{\mathcal{M}}^n$ für $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$.

Also gilt $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ für $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \geq \overline{\alpha}$. Unser Ziel ist erreicht.

Außerdem haben wir gesehen, daß für $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^n \geq \overline{\alpha} > \omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n+1}$ gilt:

(2.3.11) $\quad \tilde{\sigma}\,\text{''}\, H_{\overline{\mathcal{M}}}^n \subseteq H_n$ konfinal.

In den Grundlagen haben wir uns darüber Gedanken gemacht, wie wir Abbildungen auf gute Funktionen anwenden können, die nicht notwendig im Definitionsbereich liegen müssen, falls geeignete Voraussetzungen erfüllt sind. Die Funktionen aus $\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$ erfüllen – wie man sofort sieht – die geforderten Bedingungen aus der Bemerkung 1.56. Wir erhalten daher die folgende

Bemerkung 2.14 *Wenn $f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$, dann ist $\tilde{\sigma}(f)$ immer eindeutig durch die funktional-absolute gute Definition von f bestimmt.*

Unter Verwendung dieser Bemerkung können wir den Beweis von Lemma 2.4 direkt verwenden, um auch hier eine schöne Gestalt des feinstrukturellen Pseudo-Ultraproduktes zu bekommen.

Lemma 2.15 *Unter den obigen Bedingungen gilt:*

$$\mathcal{M} = \{\tilde{\sigma}(f)(\xi) \mid f \in \Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}}), \xi \in \sigma(\mathrm{dom}(f))\}.$$

Damit ist das Theorem vollständig gezeigt. $\boxtimes$(Theorem 2.5)

Kapitel 3

Fundiertheit der Pseudo-Ultraprodukte

3.1 Allgemeines

Unter den Voraussetzungen aus dem letzten Kapitel können wir die Konstruktion der kanonischen Aufwärtserweiterung zwar immer durchführen, aber dennoch werden nicht alle derartige Erweiterungen die gewünschte Eigenschaft der Fundiertheit haben. Wir werden uns in diesem Kapitel mit Kriterien beschäftigen, die diese Eigenschaft garantieren. Eine dieser (wenn auch nicht hinreichenden) Bedingungen wird sein, daß die ordinale Höhe des Definitionsbereichs der zu hebenen Abbildung eine überabzählbare Konfinalität besitzt; daher werden wir uns im letzten Abschnitt darüber Gedanken machen, was wir im anderen Fall beweisen können. Als erstes betrachten wir aber einen oft schon ausreichenden Spezialfall, der sich ganz leicht beweisen läßt. Nebenbei erwähnen wir, daß man in der Literatur auch davon spricht, daß die kanonische Aufwärtserweiterung von σ auf $\overline{\mathcal{M}}$ *existiert*, wenn diese fundiert ist.

Zunächst können wir sofort die folgenden beiden Lemmata festhalten. Diese werden garantieren, daß die im zweiten Kapitel vorgestellten Konstruktionen *minimal* sind, d.h. falls überhaupt eine solche Erweiterung mit den gewünschten Erhaltungseigenschaften extistiert, dann können wir die kanonische Erweiterung in sie einbetten.

Lemma 3.1 *Sei $\sigma : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\alpha}$ eine konfinale Abbildung und $\mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \overline{B} \rangle$ akzeptierbare und fügsame $\mathbf{J}$-Strukturen, wobei $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{\mathcal{M}}$ ist. Existiert weiterhin eine Abbildung $\sigma' : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}$ mit $\sigma' \restriction \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} = \sigma$, dann existiert auch die kanonische Σ_0-Aufwärtserweiterung von σ auf $\overline{\mathcal{M}}$.*

Beweis: Die Fundiertheit des Pseudo-Ultraproduktes $\mathbb{D}$ ist gesichert, da wir eine Abbildung $\pi : \mathbb{D} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}$ definiert durch $\pi(\langle \xi, f \rangle) := \sigma'(f)(\xi)$ haben.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{N} \\
\overline{\mathcal{M}} \arrow[ur, "\sigma'", "\Sigma_0"'] \arrow[r, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \mathcal{M} \arrow[u, dotted, "\pi", "\Sigma_0"'] \\
\mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}_{\alpha}^{A} \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Dabei gelten die folgenden Äquivalenzen für eine beliebige Σ_0-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (o.B.d.A. sei $n = 1$):

$$\begin{aligned}
I\!D \models \varphi(\,\langle \xi, f\rangle\,) \quad &\longleftrightarrow \quad \xi \in \sigma(\{\eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(\,f(\eta)\,)\}) \\
&\longleftrightarrow \quad \xi \in \sigma'(\{\eta \mid \overline{\mathcal{M}} \models \varphi(\,f(\eta)\,)\}) \\
&\longleftrightarrow \quad \xi \in \{\eta \mid \mathcal{N} \models \varphi(\,\sigma'(f)(\eta)\,)\} \\
&\longleftrightarrow \quad \mathcal{N} \models \varphi(\,\sigma'(f)(\xi)\,) \\
&\longleftrightarrow \quad \mathcal{N} \models \varphi(\,\pi(\langle \xi, f\rangle)\,),
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten Äquivalenz den Satz von Łoś angewendet haben.

⊠(Lemma 3.1)

Der gleiche Beweis bezeugt die folgende Formulierung:

Lemma 3.2 *Sei* $\sigma : \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\alpha}^{A}$ *eine konfinale Abbildung und* $\mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}, \overline{B}\rangle$ *akzeptierbare und fügsame* $\mathbf{J}$*-Strukturen, wobei* $\overline{\alpha}$ *eine Kardinalzahl in* $\overline{\mathcal{M}}$ *ist. Existiert weiterhin für* $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$ *eine* $\Sigma_0^{(n)}$*-erhaltende Abbildung* $\sigma' : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{N}$ *mit* $\sigma' \restriction \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} = \sigma$*, dann existiert auch die kanonische feinstrukturelle Aufwärtserweiterung von* σ *auf* $\overline{\mathcal{M}}$*.*

Aufgrund des letzten Beweises können wir in einer Umformulierung der letzten Aussage das sogenannte *Interpolationslemma* zeigen:

Lemma 3.3 *Sei* $\sigma : \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\alpha}^{A}$ *eine konfinale Abbildung und seien* $\mathcal{N}$ *und* $\overline{\mathcal{M}} := \langle \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}, \overline{B}\rangle$ *akzeptierbare und fügsame* $\mathbf{J}$*-Strukturen, wobei* $\overline{\alpha}$ *eine Kardinalzahl in* $\overline{\mathcal{M}}$ *ist. Sei weiterhin für* $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$ *eine* $\Sigma_0^{(n)}$*-erhaltende Abbildung* $\sigma' : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{N}$ *mit* $\sigma' \restriction \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} = \sigma$ *gegeben. Dann gilt:*

(a) *Die kanonische Aufwärtserweiterung* $\tilde{\sigma} : \overline{\mathcal{M}} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{M}$ *von* σ *auf* $\overline{\mathcal{M}}$ *existiert.*

(b) *Es existiert eine eindeutige Abbildung* $\pi : \mathcal{M} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}$ *mit* $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma'$ *und* $\pi : \mathcal{M} \underset{\Sigma_0^{(n)}}{\longrightarrow} \mathcal{N}$ *für* $\omega\varrho_{\overline{\mathcal{M}}}^{n} \geq \overline{\alpha}$*. Dabei ist* π *definiert durch* $\pi(\,\tilde{\sigma}(f)(\xi)\,) := \sigma'(f)(\xi)$*.*

3.2 Fundiertheit der Σ_0-Erweiterung

Wir wollen in den beiden folgenden Abschnitten zwei Kriterien bereitstellen, die uns die Fundiertheit der Pseudo-Ultraprodukte garantieren. Dabei wird es in diesem Abschnitt darum gehen, die Σ_0-Variante zu behandeln.

Definition 3.4 *Wir sagen: α liegt bezüglich A gut in β, wenn*

(a) $\alpha \leq \beta$.

(b) *Falls $\alpha < \beta$, so* $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$.

(c) *Falls $\alpha < \beta$, dann* $(\forall \xi < \alpha)(\exists \tau \leq \alpha)(\xi < \tau \wedge \mathrm{cf}(\tau) > \omega \wedge \mathbf{J}^A_\beta \models \tau$ *ist regulär* $)$.

Die Metaformel in der Bedingung (c) der Definition besagt, daß entweder schon α selbst regulär in $\mathbf{J}^A_\beta$ liegt oder es gibt unterhalb von α konfinal viele Ordinalzahlen, die nicht nur regulär in $\mathbf{J}^A_\beta$ sind, sondern auch noch eine überabzählbare Konfinalität (in $\mathbf{V}$) besitzen.

Lemma 3.5 *Es liege α bezüglich A gut in β.*

(i) *Dann ist α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}^A_\beta$.*

(ii) *Außerdem liegt α dann bezüglich A gut in γ für $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.*

Beweis: Es liege α bezüglich A gut in β.
zu (i): Betrachten wir die Bedingung (c). Entweder ist α selbst regulär in $\mathbf{J}^A_\beta$, dann ist α natürlich eine Kardinalzahl; oder es existieren konfinal viele reguläre τ entsprechend (c), dann sind aber diese τ insbesondere Kardinalzahlen und α ist ein Limes von Kardinalzahlen, also selbst eine Limeskardinalzahl.
zu (ii): Wir müssen uns nur wieder die Bedingung (c) anschauen. Das stellt aber auch kein Problem dar, weil wir die gleiche in α konfinal liegende Folge der τ nehmen können, die auch immer noch die gleichen geforderten Eigenschaften in $\mathbf{J}^A_\gamma$ besitzt, wenn sie diese in $\mathbf{J}^A_\beta$ besaß. ⊠(Lemma 3.5)

Theorem 3.6 *Sei $\sigma : \mathbf{J}^A_\alpha \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'}$ konfinal, wobei α bezüglich A gut in β liegt. Dann ist die kanonische Aufwärtserweiterung $\tilde{\sigma} : \mathbf{J}^A_\beta \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathfrak{B}$ fundiert.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und wählen dazu eine hinreichend große aber immer noch abzählbare elementare Substruktur eines ZF^--Modells und führen dann aufgrund der Absolutheit der Fundierung einen Widerspruch herbei. Sei also θ regulär und hinreichend groß fixiert. Wähle mit Hilfe des Satzes von LÖWENHEIM-SKOLEM ein abzählbares $X \prec H_\theta$ mit $\tilde{\sigma}, \mathfrak{B} \in X$. Sei nun $\overline{H}$ der (inverse) MOSTOWSKI-Kollaps von X mit der Abbildung $\pi : \overline{H} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$, insbesondere π
ist $\overline{H}$ transitiv. Betrachte die Urbilder von $\tilde{\sigma}$ und $\mathfrak{B}$, etwa $\pi(\overline{\sigma}) = \tilde{\sigma}$ und $\pi(\overline{\mathfrak{B}}) = \mathfrak{B}$. $\overline{\sigma}, \overline{\mathfrak{B}}$

Nach unserer Annahme ist $\mathfrak{B}$ nicht fundiert. Wie oben schon erwähnt, ist damit aus Absolutheitsgründen auch

(3.2.1) $\overline{\mathfrak{B}}$ nicht fundiert.

$\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \tilde{\alpha}, \overline{A}$ Sei $\pi(\overline{\alpha}) = \alpha$, $\pi(\overline{\beta}) = \beta$, $\tilde{\alpha} := \sup \pi\,"\,\overline{\alpha}$ und $\pi(\overline{A}) = A$. Dann gilt

(3.2.2) $\tilde{\alpha} < \alpha$.

Beweis von (3.2.2): Nach Konstruktion von $\tilde{\alpha}$ gilt sofort $\tilde{\alpha} \leq \alpha$, da die Abbildung π hinreichend erhaltend ist. Es gilt $\mathrm{cf}(\tilde{\alpha}) = \omega$, weil $\overline{\alpha}$ abzählbar ist; aber $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$, weil α bezüglich A gut in β liegt. Hier greift die Bedingung (b) dieser Eigenschaft, weil $\alpha = \beta$ nach unserer Annahme nicht eintreffen kann; in diesem Fall wäre nämlich $\mathfrak{B} = \mathbf{J}_{\alpha'}^{A'}$ und eine solche $\mathbf{J}$-Struktur ist sicherlich fundiert. $\boxtimes$ (3.2.2)

Betrachten nun $\pi \restriction \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} : \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} \longrightarrow \mathbf{J}_{\tilde{\alpha}}^{A}$ und bilden davon die kanonische Aufwärtserweiterung $\tilde{\pi} : \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \tilde{\mathfrak{B}}$. Wir behaupten jetzt:

$\tilde{\mathfrak{B}}$

(3.2.3) $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist fundiert.

Beweis von (3.2.3): Betrachte $k : \tilde{\mathfrak{B}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\beta}^{A}$ definiert durch $k([\xi, f]) = \pi(f)(\xi)$. Hierbei ist die Definition korrekt, denn die Elemente von $\tilde{\mathfrak{B}}$ haben nach Konstruktion der kanonischen Erweiterung die Gestalt $[\xi, f]$ für $f \in \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$ und $\xi \in (\pi \restriction \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}})(\mathrm{dom}(f))$. Nun gilt für eine Σ_0-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ (o.B.d.A. $m = 1$):

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\mathfrak{B}} \models \varphi(\,[\xi, f]\,) \\
\overset{\text{Łoś}}{\longleftrightarrow}\quad & \xi \in \pi(\,\{\eta \mid \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}} \models \varphi(\,f(\eta)\,)\}\,) \\
\longleftrightarrow\quad & \xi \in \{\eta \mid \mathbf{J}_{\beta}^{A} \models \varphi(\,\pi(f)(\eta)\,)\} \\
\longleftrightarrow\quad & \mathbf{J}_{\beta}^{A} \models \varphi(\,\pi(f)(\xi)\,) \\
\longleftrightarrow\quad & \mathbf{J}_{\beta}^{A} \models \varphi(\,k([\xi, f])\,).
\end{aligned}
$$

Damit ist k offenbar Σ_0-erhaltend. $\boxtimes$ (3.2.3)

Wegen der Fundiertheit existiert aufgrund der Erhaltung der Q-Bedingungen und Lemma 1.30 ein $\tilde{\beta}$, so daß $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathbf{J}_{\tilde{\beta}}^{A}$. Dann gilt:

$\tilde{\beta}$

(3.2.4) $\tilde{\beta} < \alpha$.

Beweis von (3.2.4): Da α bezüglich A gut in β liegt und – wie schon oben bemerkt – $\alpha < \beta$, existiert nach (3.2.2) ein τ, so daß $\tilde{\alpha} < \tau \leq \alpha$, $\mathrm{cf}(\tau) > \omega$ und τ ist regulär in $\mathbf{J}_{\beta}^{A}$. Nehmen wir für einen Widerspruch nun an, daß $\alpha \leq \tilde{\beta}$, dann ist insbesondere $\tau \in \mathbf{J}_{\tilde{\beta}}^{A}$ und wegen $\tilde{\beta} \leq \beta$ (betrachte dazu die Σ_0-Einbettung $k : \mathbf{J}_{\tilde{\beta}}^{A} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\beta}^{A}$ definiert wie im Beweis von (3.2.3)) ist τ dann auch regulär in $\mathbf{J}_{\tilde{\beta}}^{A}$. Jedes $\xi < \tau$ hat nach Lemma 2.4 die Gestalt $\xi = \tilde{\pi}(f_\xi)(\eta_\xi)$, wobei $f_\xi : u_\xi \longrightarrow \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$,

$u_\xi \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$ und $\eta_\xi \in \pi(u_\xi)$. Nun liegt zusätzlich auch jedes f_ξ in $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}$, welches aber abzählbar ist, d.h. es existieren nur abzählbar viele solche f_ξ. Wegen der Konfinalität von τ muß es dann ein f geben, so daß die Menge

(3.2.5) $\{\xi \mid f = f_\xi\}$ in τ konfinal

liegt. Setze $\tilde{f} := \pi(f)\restriction\{\eta \mid \eta \in \mathrm{dom}(\pi(f)) \ \wedge \ \pi(f)(\eta) < \tau\}$. Dann ist $\tilde{f} \in \mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}$ und $\mathrm{dom}(\tilde{f}) \subseteq \tilde{\alpha} < \tau$. Also ist $\sup(\mathrm{rng}(\tilde{f})) < \tau$, da τ regulär in $\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}$ gewählt worden war.

(3.2.6) Also liegt $\mathrm{rng}(\tilde{f})$ beschränkt in τ.

Andererseits gilt für jedes ξ mit $f = f_\xi$ nach Definition $\xi = \tilde{f}(\eta_\xi)$ und damit insbesondere $\xi \in \mathrm{rng}(\tilde{f})$, was aber mit (3.2.5) einen Widerspruch zu (3.2.6) ergibt. Damit ist der Beweis vollständig. $\boxtimes$ (3.2.4)

Jetzt können wir aber sogar zeigen, daß

(3.2.7) $\overline{\mathfrak{B}}$ fundiert ist.

Dies stünde aber im Widerspruch zu (3.2.1).

Beweis von (3.2.7): Dazu definieren wir wieder eine geeignete Einbettung in eine fundierte Struktur. Betrachte $g : \overline{\mathfrak{B}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \sigma(\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}})$ definiert durch $g([\xi, f]) := \sigma\tilde{\pi}(f)(\pi(\xi))$. Die Definition ist zunächst wieder korrekt, weil $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}} = \mathrm{dom}(\tilde{\pi})$, $\tilde{\pi}(f) \in \mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}} \subseteq \mathbf{J}^A_\alpha = \mathrm{dom}(\sigma)$ und $\xi \in \overline{\sigma}(\mathrm{dom}(f)) \subseteq \overline{H} = \mathrm{dom}(\pi)$. Außerdem ist $\tilde{\beta} \in \mathrm{dom}(\sigma)$ nach (3.2.4) und damit auch $\sigma(\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}})$ definiert, weil $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathbf{J}^A_\alpha$. Darüber hinaus ist g auch Σ_0-erhaltend: Zunächst gilt $\sigma\tilde{\pi}\restriction\overline{\alpha} = \sigma\pi\restriction\overline{\alpha} = \pi\overline{\sigma}\restriction\overline{\alpha}$, denn für $\xi < \overline{\alpha}$ ist $\tilde{\pi}(\xi) = \pi(\xi)$ nach Konstruktion der kanonischen Erweiterung der Ausgangsabbildung. Außerdem gilt $\sigma\pi(\xi) = \pi\overline{\sigma}(\xi)$ aufgrund des kommutierenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}^A_\alpha \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'} \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\overline{\sigma}", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{\pi^{-1}(A')}_{\pi^{-1}(\alpha')} \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Damit kommen wir nun schnell zum Ziel. Für $X_{f,f'} := \{\langle \eta, \eta' \rangle \mid f(\eta) \in f'(\eta')\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& [\xi, f] \in_{\overline{\mathfrak{B}}} [\xi', f'] \\
\longleftrightarrow \quad & \langle \xi, \xi' \rangle \in \overline{\sigma}(X_{f,f'}) \\
\longleftrightarrow \quad & \langle \pi(\xi), \pi(\xi') \rangle \in \pi\overline{\sigma}(X_{f,f'}) \\
\longleftrightarrow \quad & \langle \pi(\xi), \pi(\xi') \rangle \in \sigma\tilde{\pi}(X_{f,f'}) \\
\longleftrightarrow \quad & \langle \pi(\xi), \pi(\xi') \rangle \in X_{\sigma\tilde{\pi}(f), \sigma\tilde{\pi}(f')} \\
\longleftrightarrow \quad & \sigma\tilde{\pi}(f)(\pi(\xi)) \in \sigma\tilde{\pi}(f')(\pi(\xi')) \\
\longleftrightarrow \quad & g([\xi, f]) \in g([\xi', f']).
\end{aligned}
$$

Also ist $\overline{\mathfrak{B}}$ fundiert, weil $\sigma(\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}})$ fundiert ist. ⊠ (3.2.7)

Die Struktur des Beweises sollte durch das folgende Diagramm noch deutlicher werden.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{J}^A_\beta \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & \mathfrak{B} \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rrd, dotted] & \overline{\mathfrak{B}} \arrow[rrd, dotted, "g"'] & & \mathbf{J}^A_\alpha \arrow[r, "\sigma"] \arrow[u, "\subseteq"'] & \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'} \arrow[u, "\subseteq"] \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[r] \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[rrd, dotted, "\pi \restriction \mathbf{J}_{\tilde{\alpha}}"'] & \mathbf{J}^{\pi^{-1}(A')}_{\pi^{-1}(\alpha')} \arrow[u, "\subseteq", "\tilde{\pi}"'] & \tilde{\mathfrak{B}} = \mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}} \arrow[ru, "\subseteq"] & \sigma(\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}) \arrow[ru, "\subseteq"'] & \\
 & & \mathbf{J}^A_{\tilde{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] & &
\end{tikzcd}
$$

Damit ist der Widerspruch vollständig. ⊠(Theorem 3.6)

3.3 Fundiertheit der Σ^*-Erweiterung

Wie versprochen werden wir uns in diesem Abschnitt um ein Kriterium für die Fundiertheit der feinstrukturellen Pseudo-Ultraprodukte kümmern. Dafür werden wir einen stärkeren Begriff zur Verfügung stellen.

Definition 3.7 *Wir sagen: α liegt bezüglich A sehr gut in β, wenn*

(a) $\alpha \leq \beta$.

(b) *Falls $\alpha < \beta$, so* $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$.

(c) *Falls $\alpha < \beta$, dann* $(\forall \xi < \alpha)(\exists \tau \leq \alpha)$
$(\xi < \tau \wedge \mathrm{cf}(\tau) > \omega \wedge \mathbf{J}^A_\beta \models \tau$ *ist eine Nachfolgerkardinalzahl*$)$.

Vergleichen wir zuerst diese mit der Definition 3.4. Weil Nachfolgerkardinalzahlen offenbar regulär sind, gilt: Wenn α bezüglich A sehr gut in β liegt, dann liegt α auch bezüglich A gut in β, im allgemeinen natürlich nicht umgekehrt. Wir haben in der Definition 3.7 lediglich die Bedingung (c) verstärkt. Wir können nun die Bemerkung 3.5 mit dem neuen Begriff wiederholen und ergänzen:

Bemerkung 3.8 *Es liege α bezüglich A sehr gut in β.*

(i) *Dann liegt α bezüglich A auch gut in β.*

(ii) *Offenbar ist α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}^A_\beta$.*

(iii) *Außerdem liegt α dann bezüglich A sehr gut in γ für $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.*

Theorem 3.9 *Sei $\sigma : \mathbf{J}^A_\alpha \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'}$ konfinal, wobei α bezüglich A sehr gut in β liegt. Dann ist die kanonische feinstrukturelle Aufwärtserweiterung $\tilde{\sigma} : \mathbf{J}^A_\beta \underset{\Sigma^{(n)}_0}{\longrightarrow} \mathfrak{B}$, wobei $n < \omega$ mit $\omega\varrho^n_{\mathbf{J}^A_\beta} > \alpha$, fundiert.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und unterscheiden dazu zwei Fälle entsprechend der Lage von α bezüglich der Projekta von $\mathbf{J}^A_\beta$. Wenn die Aussage des Theorems falsch ist, dann wissen wir, daß $\alpha < \beta$ gilt, denn sonst wäre $\mathfrak{B} = \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'}$ und damit natürlich fundiert.

Fall 1: $\omega\varrho^\omega_{\mathbf{J}^A_\beta} \geq \alpha$.

Mit diesem Fall können wir relativ schnell fertig werden. Als erstes stellen wir fest:

(3.3.1) Es liegt α bezüglich A sehr gut in $\beta + 1$.

Beweis von (3.3.1): Wir wissen schon, daß nach Voraussetzung, α bezüglich A sehr gut in β liegt. Damit sind schon (a) und (b) der Eigenschaften der Definition 3.7 erledigt. Wir schauen uns die Bedingung (c) an und beweisen gleich die folgenden beiden Tatsachen, die unter der Voraussetzung des aktuellen Falls gelten.

(3.3.2) Kardinalzahlen kleiner α bleiben beim Übergang von $\mathbf{J}^A_\beta$ nach $\mathbf{J}^A_{\beta+1}$ erhalten.

(3.3.3) Nachfolgerkardinalzahlen kleiner α bleiben beim Übergang von $\mathbf{J}^A_\beta$ nach $\mathbf{J}^A_{\beta+1}$ erhalten.

Offensichtlich folgt aus der zweiten Aussage die erste, aber wir können die erste schnell beweisen und dann für die zweite Tatsache ausnutzen; dann hätten wir mit der Voraussetzung, daß α bezüglich A sehr gut in β liegt, die Bedingung (c) erfüllt.

Beweis von (3.3.2): Angenommen, wir haben eine Kardinalzahl δ in $\mathbf{J}^A_\beta$, die in $\mathbf{J}^A_{\beta+1}$ etwa durch ein $f : \gamma \xrightarrow{\text{auf}} \delta$ mit $f \in \mathbf{J}^A_{\beta+1} \setminus \mathbf{J}^A_\beta$ kollabiert wird. Wegen (1.2.2), $\mathbf{\Sigma}_\omega(\mathbf{J}^A_\beta) = \mathcal{P}(\mathbf{J}^A_\beta) \cap \mathbf{J}^A_{\beta+1}$, ist $f \in \mathbf{\Sigma}_\omega(\mathbf{J}^A_\beta)$. Da unsere $\mathbf{J}$-Strukturen gesund sind und für solche Objekte nach Lemma 1.49 die Definierbarkeit und die $*$-Definierbarkeit zusammenfallen, gibt es ein $n < \omega$, so daß $f \in \mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_\beta^A)$. Die Funktion f können wir durch ein Standardargument kanonisch in einer Teilmenge von γ kodieren. Definiere eine Relation $R \subseteq \gamma \times \gamma$ durch $\xi \, R \, \eta \;:\longleftrightarrow\; f(\xi) < f(\eta)$. Dann verschlüsselt zunächst R als Weg durch δ in γ Schritten die Surjektion f, aber R als Teilmenge von $\gamma \times \gamma$ können wir natürlich auch selbst wieder als Teilmenge von γ kodieren, denn γ ist eine Kardinalzahl. Nun tritt f noch nicht in der Stufe β der $\mathbf{J}$-Hierarchie auf, d.h. wir haben eine neue Teilmenge von γ in der Stufe $\beta + 1$ gefunden. Mit anderen Worten, das n-te Projektum von $\mathbf{J}_\beta^A$ fällt mindestens bis γ. Aber das ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, denn damit bekommen wir die folgende (echte) Ungleichung: $\omega\varrho^\omega_{\mathbf{J}_\beta^A} \leq \omega\varrho^n_{\mathbf{J}_\beta^A} \leq \gamma < \alpha \leq \omega\varrho^\omega_{\mathbf{J}_\beta^A}$. ⊠ (3.3.2)

Beweis von (3.3.3): Es gelte $\mathbf{J}_\beta^A \models \delta = \gamma^+$ für eine $\mathbf{J}_\beta^A$-Kardinalzahl γ. Wir behaupten, daß diese Formel auch schon in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$ gilt. Wenn das nicht der Fall ist, dann können wir zwei Fälle unterscheiden. Dazu wenden wir (3.3.2) an und wissen, daß δ in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$ zumindest eine Kardinalzahl sein muß.

Entweder

- $\mathbf{J}_{\beta+1}^A \models \delta = \eta^+$ für ein $\eta \neq \gamma$.
  Vergleichen wir die Lage von η bezüglich γ.

  Wenn $\eta < \gamma$, dann gilt insbesondere $\eta < \gamma < \delta$, dann ist aber γ keine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$, was aber unserer Tatsache (3.3.2) widerspricht.

  Wenn $\gamma < \eta$, dann gibt es aber schon in $\mathbf{J}_\beta^A$ eine Surjektion von γ auf η, erst recht in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$. Also haben wir wieder einen Widerspruch mit (3.3.2) bekommen.

oder

- δ ist eine Limeskardinalzahl in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$.
  Dann gibt es insbesondere eine Kardinalzahl λ in $\mathbf{J}_{\beta+1}^A$ mit $\gamma < \lambda < \delta$. Der Widerspruch folgt jetzt genauso mit (3.3.2) wie oben, denn es existiert schon eine Surjektion von γ auf λ in $\mathbf{J}_\beta^A$.

Mehr Fälle können nicht eintreten, d.h. die Annahme war falsch. ⊠ (3.3.3)
Damit sind dann alle Bedingungen an α erfüllt. ⊠ (3.3.1)

Da wir uns mühselig die Voraussetzungen[1] für das Theorem 3.6 erarbeitet haben, wenden wir es auf die gegebene Abbildung σ an. Wir erhalten die Σ_0-Aufwärtserweiterung $\tilde{\sigma} : \mathbf{J}_{\beta+1}^A \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_\gamma^{A'}$, wobei γ nach dem obigen Theorem existiert.

$\tilde{\sigma}, \gamma$

[1] Eigentlich haben wir sogar eine stärkere Beziehung zwischen α und $\beta + 1$ hergeleitet als wir wirklich brauchen. Dennoch ist es der springende Punkt an dieser Stelle, weshalb wir für die Fundiertheit im feinstrukturellen Fall die Eigenschaft “sehr gut” anstatt nur “gut” genommen haben. Dieser Beweis bräche zusammen, versuchten wir wie oben im Fall 1 aus “α liegt bezüglich A gut in β” auch “α liegt bezüglich A gut in $\beta + 1$” zu folgern.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}^A_{\beta+1} \arrow[r, dotted, "\tilde\sigma", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A'}_{\gamma} \\
\mathbf{J}^A_{\alpha} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A'}_{\alpha'} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Wir erinnern uns an die Definition des Ultraprodukts. Wir führten die Mengen $\Gamma(\alpha, \mathbf{J}^A_{\beta+1})$ und $\Gamma^*(\alpha, \mathbf{J}^A_\beta)$ ein; man beachte, daß die Bezeichnungen der Grundmengen bei der Bildung des Ultraproduktes in diesen Mengen gleich unserer Situation angepaßt sind, und zwar derart, wie wir sie hier wirklich benutzt haben. Dann gilt hier in unserem Fall:

(3.3.4) $\quad \Gamma^*(\alpha, \mathbf{J}^A_\beta) \subseteq \Gamma(\alpha, \mathbf{J}^A_{\beta+1})$.

Beweis von (3.3.4): Sei $[\xi, f] \in \Gamma^*(\alpha, \mathbf{J}^A_\beta)$. Wenn $f \in \mathbf{J}^A_\beta$, dann ist nichts zu zeigen. Im noch fehlenden Fall ist $f \in \mathbf{\Sigma}^{(n)}_1(\mathbf{J}^A_\beta)$ für $n < \omega$ mit $\omega\varrho^{n+1}_{\mathbf{J}^A_\beta} \geq \alpha$. Wegen der Gesundheit ist wieder $\mathbf{\Sigma}^*(\mathbf{J}^A_\beta) = \mathbf{\Sigma}_\omega(\mathbf{J}^A_\beta)$, d.h. f ist definierbar über $\mathbf{J}^A_\beta$ und damit insbesondere ein Element von $\mathbf{J}^A_{\beta+1}$. Also auch in diesem Fall gilt $[\xi, f] \in \Gamma(\alpha, \mathbf{J}^A_{\beta+1})$. $\boxtimes$ (3.3.4)

Damit folgt aber die Fundierung des $*$-Ultraproduktes $\mathfrak{B}$ aus der Fundierung des Σ_0-Ultraproduktes $\mathbf{J}^{A'}_\gamma$, denn wenn eine unendlich oft absteigende $\tilde\in$-Kette in $\mathfrak{B}$ existierte, dann würde diese auch in $\mathbf{J}^{A'}_\gamma$ zu finden sein, weil nach dem Satz von Łoś gilt:

$$\begin{aligned}
& [\xi, f] \,\tilde\in_{\mathfrak{B}}\, [\zeta, g] \\
\longleftrightarrow \quad & \langle \xi, \zeta \rangle \in \sigma(\ \{\langle \eta, \theta \rangle \mid \mathbf{J}^A_\beta \models f(\eta) \in g(\theta)\}\ ) \\
\longleftrightarrow \quad & [\xi, f] \,\tilde\in_{\mathbf{J}^{A'}_\gamma} [\zeta, g].
\end{aligned}$$

Damit ist der erste Fall fertig.

Fall 2: $\quad \omega\varrho^{n+1}_{\mathbf{J}^A_\beta} < \alpha \leq \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^A_\beta}$.

Hier müssen wir etwas mehr arbeiten. Dennoch haben wir den größten Teil schon hinter uns, weil dieser Fall den Beweis des ersten Theorems nahezu imitiert. Nehmen wir also das Gegenteil an, d.h. $\mathfrak{B}$ ist nicht fundiert. Auch hier wählen wir ein hinreichend großes und reguläres θ. Sei wieder $X \prec H_\theta$ mit X abzählbar und $\tilde\sigma$, $\mathfrak{B} \in X$ gewählt. Dazu sei $\overline{H}$ der (transitive) Mostowski-Kollaps von X mit der dazugehörigen (inversen) Abbildung $\pi : \overline{H} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$. Seien $\overline{\sigma}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ bzw. $\overline{A}$ die $\overline{\sigma}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{A}$
π-Urbilder von $\tilde\sigma$, α, β, $\mathfrak{B}$ bzw. A. Wieder aus Absolutheitsgründen zusammen mit unserer Annahme bekommen wir, daß

(3.3.5) $\quad \overline{\mathfrak{B}}$ nicht fundiert

$\tilde{\alpha}$ ist. Setze wieder $\tilde{\alpha} := \sup \pi\,``\,\overline{\alpha}$. Genauso wie in (3.2.2) folgt wegen $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ auch hier

(3.3.6) $\qquad \tilde{\alpha} < \alpha.$

Wir bilden jetzt die feinstrukturelle Aufwärtserweiterung von $\pi \restriction \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \xrightarrow[\Sigma_0]{} \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\alpha}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta} \arrow[r, dotted, "\tilde{\pi}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \tilde{\mathfrak{B}} \\
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\pi", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\alpha}} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\mathfrak{B}}$ Diese sei etwa gegeben durch $\tilde{\pi} : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta} \xrightarrow[\Sigma_0^{(n)}]{} \tilde{\mathfrak{B}}$. Wir können den Beweis von (3.2.3) verwenden, um folgendes zu zeigen:

(3.3.7) $\qquad \tilde{\mathfrak{B}}$ ist fundiert.

Beweis von (3.3.7): Betrachte $k : \tilde{\mathfrak{B}} \xrightarrow[\Sigma_0]{} \mathbf{J}^{A}_{\beta}$ definiert durch $k([\xi, f]) = \pi(f)(\xi)$. Dabei ist die Definition korrekt, denn die Elemente von $\tilde{\mathfrak{B}}$ haben wieder nach Konstruktion der kanonischen Erweiterung die Gestalt $[\xi, f]$ für $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta}$ bzw. $f \in \mathbf{\Sigma}^{(n-1)}_1(\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta})$ und $\xi \in (\pi \restriction \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}})(\mathrm{dom}(f))$. Es gilt für eine Σ_0-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ – o.B.d.A. $m = 1$:

$$\begin{array}{cl}
 & \mathfrak{B} \models \varphi(\,[\xi, f]\,) \\
\stackrel{\text{Łoś}}{\longleftrightarrow} & \vec{\xi} \in \pi(\,\{\eta \mid \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta} \models \varphi(\,f(\eta)\,)\}\,) \\
\longleftrightarrow & \xi \in \{\eta \mid \mathbf{J}^{A}_{\beta} \models \varphi(\,\pi(f)(\eta)\,)\} \\
\longleftrightarrow & \mathbf{J}^{A}_{\beta} \models \varphi(\,\pi(f)(\xi)\,) \\
\longleftrightarrow & \mathbf{J}^{A}_{\beta} \models \varphi(\,k([\xi, f])\,).
\end{array}$$

Hier sollten wir die dritte Äquivalenz rechtfertigen; genauer gesagt sollten wir erwähnen, warum wir die Abbildung π überhaupt auf f anwenden können. Für $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta}$ ist das kein Problem, weil wir $\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\beta} \subseteq \overline{H} = \mathrm{dom}(\pi)$ haben. Falls unser f hier nicht herunterfällt, dann nutzen wir Bemerkung 1.56, die uns garantiert, daß wir die Abbildung π doch wie gewünscht anwenden können. $\boxtimes$ (3.3.7)

Wir wissen, daß dann wegen der Übertragung von Q-Formeln $\tilde{\mathfrak{B}}$ auch eine akzep-
$\tilde{\beta}$ tierbare $\mathbf{J}$-Struktur ist. Sei also $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}}$. Wir wollen auch hier zeigen:

(3.3.8) $\qquad \tilde{\beta} < \alpha.$

Damit wären wir dann wie im vorigen Theorem fertig, weil wir dann nämlich eine Einbettung $g : \overline{\mathfrak{B}} \xrightarrow[\Sigma_0]{} \sigma(\mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}})$ definieren können (mit der gleichen Definition und damit auch mit dem gleichen Beweis der Erhaltungsstärke – wobei wir wieder den Zusatz mit der funktional-absoluten Definition der guten $\mathbf{\Sigma}_1^{(n-1)}(\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}})$-Funktionen im Hinterkopf behalten). Diese Einbettung bezeugt dann wiederum, daß $\overline{\mathfrak{B}}$ fundiert ist, weil $\sigma(\mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}})$ fundiert ist, was aber (3.3.5) widerspricht.

Für dieses Ziel zeigen wir zwei kleine technische Details. Setze $\tilde{\varrho} := \sup \tilde{\pi}\," \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$ $\tilde{\varrho}$
und $\overline{\varrho} := \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$. $\overline{\varrho}$

(3.3.9) $\qquad \tilde{\varrho} < \alpha.$

Beweis von (3.3.9): Setze $\pi^\star := \tilde{\pi}\restriction\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}$. Wir zeigen zunächst: $\pi^\star$

(3.3.10) $\qquad \pi^\star : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}}$ ist die kanonische Aufwärtserweiterung von $\pi\restriction\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} : \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\alpha}}$.

Beweis von (3.3.10): Als erstes können wir wegen Lemma 3.5 feststellen, daß $\overline{\alpha}$ bezüglich $\overline{A}$ gut in $\omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$ liegt, denn α liegt bezüglich A gut in β, also aufgrund der Erhaltungseigenschaften von π liegt auch $\overline{\alpha}$ bezüglich $\overline{A}$ gut in $\overline{\beta}$ und nach Voraussetzung für unseren aktuellen Fall (wieder zusammen mit der Erhaltung von π) gilt außerdem $\overline{\alpha} \leq \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}} \leq \overline{\beta}$. Bilden wir die Aufwärtserweiterung $\overline{\pi}$, dann erhalten wir nach Theorem 3.6 ein fundiertes Σ_0-Pseudo-Ultraprodukt, etwa $\mathbf{J}^{A}_{\gamma}$. Nach Konstruk- γ
tion der Pseudo-Ultraprodukte wissen wir sofort, daß wegen $\Gamma(\overline{\alpha}, \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}) \subseteq \Gamma(\overline{\alpha}, \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}})$ auch $\mathbb{D}(\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}, \pi\restriction\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}) \subseteq \mathbb{D}(\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}, \pi\restriction\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}})$ gilt. Damit bekommen wir diese Inklusion auch beim Mostowski-Kollaps, so daß wir $\mathbf{J}^{A}_{\gamma} \subseteq \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}}$ erhalten, insbesondere ist $\overline{\pi} \subseteq \tilde{\pi}$. Daher gilt auch sofort $\mathbf{J}^{A}_{\gamma} \subseteq \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}}$, denn für ein $\overline{\pi}(f)(\xi) \in \mathbf{J}^{A}_{\gamma}$ mit $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}$ und $\xi \in \pi(\mathrm{dom}(f))$ gilt $\overline{\pi}(f) = \tilde{\pi}(f) = \pi^\star(f)$, insbesondere ist $\overline{\pi}(f)(\xi) = \pi^\star(f)(\xi) \in \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}} \arrow[rrr, "\subseteq"] \arrow[d, "\pi"'] & & & \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}} \arrow[rrr, "\subseteq"] \arrow[dl, "\overline{\pi}"'] \arrow[dr, "\pi^\star"] & & & \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\
\mathbf{J}^{A}_{\tilde{\alpha}} \arrow[rr, "\subseteq"'] & & \mathbf{J}^{A}_{\gamma} \arrow[rr, "\subseteq"'] & & \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}} \arrow[rr, "\subseteq"'] & & \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}}
\end{tikzcd}
$$

Wir zeigen noch $\mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}} \subseteq \mathbf{J}^{A}_{\gamma}$. Aufgrund der $\mathbf{L}$-Struktur genügt es, sich auf Ordinalzahlen zu beschränken. Sei also $\delta < \tilde{\varrho}$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß es ein $f' \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}$ mit $\mathrm{dom}(f') \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\alpha}}$, $\xi \in \pi(\mathrm{dom}(f'))$ und $\delta = \tilde{\pi}(f')(\xi)$ gibt, so daß $\delta = \overline{\pi}(f')(\xi) \in \mathbf{J}^{A}_{\gamma}$ ist. Wegen $\mathbf{J}^{A}_{\tilde{\varrho}} \subseteq \mathbf{J}^{A}_{\tilde{\beta}}$ $(= \tilde{\mathfrak{B}})$ gibt es ein $f \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}$ mit $\delta = \tilde{\pi}(f)(\xi)$. Wir werden jetzt die konfinale Definition von $\tilde{\varrho}$ ausnutzen; fixiere daher ein $\nu < \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$ mit $\delta = \tilde{\pi}(f)(\xi) < \tilde{\pi}(\nu)$ und setze $D := \{\eta \mid f(\eta) < \nu\}$ und $f' := f\restriction D$. Dann ist

- $f' \in \mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\varrho}}$ wegen Akzeptierbarkeit,

- und außerdem gilt $D \in \mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}} = \mathrm{dom}(\pi)$,

  denn D liegt mit f offenbar auch in $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$, so daß es als beschränkte Teilmenge von $\mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}}$ wegen Akzeptierbarkeit schon in $\mathbf{J}_{\overline{\alpha}}^{\overline{A}}$ zu finden ist, da $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$ ist.

Nun gilt $\tilde{\pi}(f)(\xi) = \tilde{\pi}(f')(\xi)$, da offensichtlich $\xi \in \pi(\mathrm{dom}(f'))$, denn $\pi(\mathrm{dom}(f')) = \pi(D) = \tilde{\pi}(D) = \{\eta \,|\, \tilde{\pi}(f)(\eta) < \tilde{\pi}(\nu)\} \ni \xi$. Aber auf gemeinsamen Definitionsbereich haben f und f' die gleichen Funktionswerte. Also $\delta = \tilde{\pi}(f')(\xi)$. $\boxtimes$ (3.3.10)

Jetzt schauen wir noch einmal auf den Beweis des letzten Theorems. Dort haben wir in (3.2.4) nachgewiesen, nämlich daß die ordinale Höhe des gebildeten Pseudo-Ultraproduktes kleiner α ist. Genau der gleiche Beweis – mit der entsprechenden Ersetzung von $\tilde{\beta}$ durch $\tilde{\varrho}$ – zeigt hier unsere aktuelle Behauptung: $\tilde{\varrho} < \alpha$. $\boxtimes$ (3.3.9)

Ein Detail benötigen wir noch:

(3.3.11) $\quad \tilde{\varrho} = \omega\varrho_{\tilde{\beta}}^{n}$.

Beweis von (3.3.11): In der Konstruktion des Pseudo-Ultraproduktes entsprechend der Definition einer kanonischen Aufwärtserweiterung haben wir in Lemma 2.12 schon gesehen, daß $H_n \subseteq H^n_{\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}}$, wobei die H_n mit Hilfe der Pseudo-Projekta entstanden sind[2]. Damit bekommen wir also $\tilde{\varrho} \leq \omega\varrho_{\tilde{\beta}}^{n}$. Wir zeigen jetzt, daß wir in unserem Fall auch die andere Ungleichung bekommen. Wir wissen, daß es die $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}})$-Funktion $\tilde{h}^{n-1}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$ gibt, so daß $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}} = \tilde{h}^{n-1}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}(\omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}} \times \{p\})$ gilt[3], wobei p der Standardparameter von $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$ ist. Wir zeigen nun:

(3.3.12) $\quad \mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}} = \tilde{h}^{n-1}_{\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}}(\tilde{\varrho} \times \{\tilde{\pi}(p)\})$.

Dann erhalten wir mit Hilfe von $\tilde{\pi}(p)$ aus $\tilde{\varrho}$ in $\Sigma_1^{(n-1)}$-Art das ganze Universum $\mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}$, nach dem Lemma 1.40 bedeutet das gerade, daß $\omega\varrho_{\tilde{\beta}}^{n} \leq \tilde{\varrho}$ gilt. Unser Ziel wäre damit erreicht. Es bleibt der

Beweis von (3.3.12): Hierbei genügt es, die Ungleichung ($\subseteq$) nachzuweisen. Sei also ein $x \in \mathbf{J}^A_{\tilde{\beta}}$ gegeben, d.h. es existiert ein $f \in \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$ oder ein gutes $f \in \boldsymbol{\Sigma}_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}})$ mit $x = \tilde{\pi}(f)(\zeta)$ für ein geeignetes ζ im Definitionsbereich. Dann ist f etwa $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}})$-definierbar im Parameter $q \in \mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}}$. Nach obiger Diskussion existiert nun eine natürliche Zahl i und ein $\xi < \omega\varrho^{n}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}$ mit $q = \tilde{h}^{n-1}_{\mathbf{J}^{\overline{A}}_{\overline{\beta}}}(i, \langle\xi, p\rangle)$. Damit ist f aber $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}})$-definierbar[4] in den Parametern ξ und p. Dann finden wir auch eine in p gute $\Sigma_1^{(n-1)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}^{\overline{A}})$-Funktion f' mit $f'(\eta) \simeq f(\eta, \xi)$. Dann ist aber $\tilde{\pi}(f')$ eine gute

[2]Siehe (2.3.4).

[3]Vergleiche Definition 1.59 und die dort eingeführte Schreibweise.

[4]Hier nutzen wir aus, daß F gut ist und daß gute Funktionen unter Einsetzung abgeschlossen sind.

$\Sigma_1^{(n-1)}(\mathbf{J}^A_{\tilde\beta})$-Funktion in $\tilde\pi(p)$. Außerdem gilt aufgrund der Erhaltungseigenschaften $\tilde\pi(f')(\eta) \simeq \tilde\pi(f)(\eta, \tilde\pi(\xi))$. Daher gilt insbesondere $x = \tilde\pi(f')(\zeta) \simeq \tilde\pi(f)(\zeta, \tilde\pi(\xi))$. Weil aber $\tilde\pi(\xi) < \tilde\varrho$ ist, gilt somit $x \in \tilde h^{n-1}_{\mathbf{J}^A_{\tilde\beta}}(\tilde\varrho \times \{\tilde\pi(p)\})$. ⊠ (3.3.12)

Damit hat $\tilde\varrho$ die Gestalt des n-ten Projektums von $\mathbf{J}^A_{\tilde\beta}$. ⊠ (3.3.11)

Nun können wir unseren Beweis weiterführen.

Beweis von (3.3.8): Angenommen, $\alpha \leq \tilde\beta$. Dann bekommen wir insbesondere $\omega\varrho^n_{\mathbf{J}^A_{\tilde\beta}} = \tilde\varrho < \alpha \leq \tilde\beta$, womit aber α keine Kardinalzahl in $\mathbf{J}^A_{\tilde\beta+1}$ sein kann, weil nach der Voraussetzung des aktuellen Falls $\mathbf{J}^A_{\tilde\beta+1} \models |\alpha| \leq \omega\varrho^n_{\tilde\beta}$ gilt. Da α bezüglich A sehr gut in β liegt, folgt zusammen mit der Bemerkung 3.5, daß $\tilde\beta \geq \beta$ ist. Wegen $\omega\varrho^n_{\mathbf{J}^A_{\tilde\beta}} = \tilde\varrho < \alpha \leq \omega\varrho^n_{\mathbf{J}^A_\beta}$ gilt aber $\beta \neq \tilde\beta$, also zusammen

$$\tilde\beta > \beta. \tag{3.3.13}$$

Nun haben wir aber im Beweis von (3.3.7) eine Σ_0-erhaltende Einbettung $k : \mathbf{J}^A_{\tilde\beta} \longrightarrow \mathbf{J}^A_\beta$ konstruiert, die natürlich insbesondere schwach monoton ist, d.h. für $\nu < \tilde\beta$ ist $\nu \leq k(\nu) < \beta$. Also $\tilde\beta \leq \beta$. Widerspruch zu (3.3.13)! ⊠ (3.3.8)

Damit ist der Beweis des Theorems vollständig. ⊠(Theorem 3.9)

3.4 Häufige Erweiterbarkeit

Wie wir bereits festgestellt haben, können wir zwar relativ schnell eine Aufwärtserweiterung entsprechend dem letzten Kapitel definieren, aber das Problem der Fundiertheit des Pseudo-Ultraprodukt bleibt. In den vorangehenden Abschnitten haben wir uns bereits einige Situationen überlegt, die diese Eigenschaft garantieren. Bezeichne $\overline{\alpha}$ die ordinale Höhe des Definitionsbereichs der Abbildung, die wir erweitern wollen und sei weiterhin $\overline{M}$ mit einer ordinalen Höhe $\overline{\beta}$ das Ziel der Hebung. Dann war es für die Konstruktion notwendig, daß $\overline{\alpha}$ eine Kardinalzahl in $\overline{M}$ ist. Wir haben uns überlegt, daß wir die Fundiertheit bekamen, falls $\overline{\alpha}$ (sehr) gut in $\overline{\beta}$ liegt. Dabei ging aber wesentlich im Beweis ein, daß $\mathrm{cf}(\overline{\alpha}) > \omega$ gilt. Aber was machen wir im anderen Fall?

Eine Lösung für den abzählbar-konfinalen Fall bietet an dieser Stelle das *Lemma über die häufige Erweiterbarkeit von Einbettungen*[5], allerdings auf eine vielleicht zunächst verwundernde Art und Weise. Wir werden nicht direkt garantieren können, daß *eine* beliebige Aufwärtserweiterung fundiert ist. Anstatt nur *eine* Erweiterung

[5] Im Englischen bezeichnet man diese Aussage als Frequent Extension of Embeddings Lemma.

zu bilden, werden wir gleich mehrere betrachten. Unter geeigneten Voraussetzungen wird dann dieses Lemma garantieren, daß eine große Menge von diesen Erweiterungen fundiert sein wird, d.h. die gewünschte Eigenschaft tritt nicht bei allen betrachteten Erweiterungen auf, aber dennoch sehr häufig.

Wir werden dieses Lemma in der Regel gerade in diesen Grenzfällen, also falls das oben angesprochene Problem mit der abzählbaren Konfinalität vorliegt, verstärkt anwenden, aber dennoch ist die Aussage dieses Kriteriums nicht auf diesen Fall beschränkt. Als Anwendung werden wir dieses Lemma im Beweis des Überdeckungslemmas heranziehen. Wir werden zunächst zusätzlich die Existenz einer geeigneten Funktion voraussetzen, die uns im Beweis des Überdeckungslemmas nicht stören wird, die aber wesentlich schon alleine für die Formulierung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit sein wird. Später im sechsten Kapitel werden wir ähnliche Versionen zeigen, die auf diese Annahme verzichten.

τ, γ Sei γ regulär und überabzählbar und $\tau > \gamma$ beliebig vorgegeben, so daß eine Funktion $f : \gamma \xrightarrow{\text{auf}} \mathbf{J}_\tau$ existiert. Ein Grund, warum wir in Kapitel 6 versuchen werden, Verallgemeinerungen zu finden, ist die Tatsache, daß diese Abbildung in Bezug auf die eigentliche Aussage des Theorems eher untergeordneten Charakter besitzt. Sie ist lediglich eine Hilfsfunktion, die es uns ermöglicht, Submodelle von $\mathbf{J}_\tau$ durch Ordinalzahlen geeignet kodieren zu können. Dadurch können wir zum Beispiel die Aussage, daß es *viele* Submodelle mit einer gewissen Eigenschaft gibt, durch eine geeignete Formulierung über Ordinalzahlen ausdrücken; so werden wir in diesem Sinne über *stationär viele* Ordinalzahlen mit einer gewissen Eigenschaft der assoziierten Submodelle sprechen.

Später werden wir dann versuchen, diesen Umweg mittels einer solchen Abbildung f zu vermeiden, indem wir geeignete Begriffe auf den eigentlichen Submodellen verwenden; doch an dieser Stelle werden wir die übersichtliche Struktur der Ordi-
X_α nalzahlen gezielt ausnutzen. Setze daher $X_\alpha := f\,\text{"}\,\alpha$ für $\alpha < \gamma$. Wir definieren nun die uns eigentlich interessierende Ausgangsmenge

$\mathcal{C}$
$$\mathcal{C} := \{\alpha < \gamma \mid X_\alpha \prec \mathbf{J}_\tau \ \wedge\ X_\alpha \cap \gamma = \alpha \ \wedge\ \sup(X_\alpha \cap \mathrm{On}) = \tau \ \wedge\ \gamma \in X_\alpha\}.$$

Wir sehen sofort, daß $\mathcal{C}$ eine club Menge ist, denn man kann die durch die Definition gegebene Konjunktion wieder aufspalten, so daß es genügt, die Mengen $\{\alpha \mid X_\alpha \prec \mathbf{J}_\tau\}$ bzw. $\{\alpha \mid X_\alpha \cap \gamma = \alpha\}$ als club nachzuweisen[6]; wobei die Abgeschlossenheit jeweils offensichtlich ist und für die Unbeschränktheit definiere man sich für vorgegebenes $\alpha_0 < \gamma$ für die erste Menge eine Inklusionskette $\langle Z_i \mid i < \omega\rangle$, die zusätzlich noch die beiden Bedingungen $Z_{2i+1} = X_\beta$ für ein $\alpha_0 < \beta < \gamma$ und $Z_{2i+2} \prec \mathbf{J}_\tau$ als SKOLEM-Abschluß von Z_{2i+1} erfüllt. Dann hat die Vereinigung der

[6]Die noch fehlenden beiden Eigenschaften spielen für diesen Nachweis keine große Rolle.

Z_i die Gestalt X_α für geeignetes $\alpha < \gamma$, so daß dieses α in der ersten Menge zu finden ist. Für die zweite Menge betrachte man eine Folge $\langle \alpha_i \mid i < \omega \rangle$, wobei α_{i+1} minimal mit $X_{\alpha_{i+1}} \supseteq X_{\alpha_i} \cup \alpha_i$ und $\alpha_{i+1} \geq \mathrm{lub}(X_{\alpha_i} \cap \gamma)$ gewählt sei. Dann gilt für $\alpha := \sup_{i<\omega} \alpha_i$ die gewünschte Gleichung[7] $X_\alpha \cap \gamma = \alpha$.

Wir definieren nun die entscheidenen Einbettungen, die wir anschließend erweitern wollen. Sei nach dem Kondensationsprinzip $\sigma_\alpha : \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X_\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{C} \cup \{\gamma\}$. Dann gilt $\sigma_\gamma = \mathrm{id}$, weil $X_\gamma = f\,''\,\gamma = \mathbf{J}_\tau$, also insbesondere gilt $\tau_\gamma = \tau$. Außerdem $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$
gilt wegen $X_\alpha \cap \gamma = \alpha$ auch $\alpha = \mathrm{crit}(\sigma_\alpha)$; da damit aber in X_α keine Ordinalzahl zwischen α und γ liegt, gilt auch $\sigma_\alpha(\alpha) = \gamma$.

Weiterhin gilt für $\alpha \leq \beta$ nach Konstruktion immer $X_\alpha \subseteq X_\beta$, so daß wir diese Einbettungen geeignet kombinieren können und $\sigma_{\alpha\beta} := \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha$ für $\alpha \leq \beta$ in $\mathcal{C}$ definieren $\sigma_{\alpha\beta}$
dürfen. Dann ist $\sigma_{\alpha\beta} : \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau_\beta}$, denn wir sind in der folgenden Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{J}_\tau & & \\
\mathbf{J}_{\tau_\alpha} \arrow[r, "\sigma_\alpha", "\Sigma_\omega"'] \arrow[rrrr, bend right, "\sigma_{\alpha\beta}"'] & X_\alpha \arrow[ur, "\prec"] \arrow[rr, "\subseteq"'] & & X_\beta \arrow[ul, "\prec"'] \arrow[r, "\sigma_\beta^{-1}", "\Sigma_\omega"'] & \mathbf{J}_{\tau_\beta}
\end{tikzcd}$$

Außerdem erhalten wir für einen Limespunkt λ in $\mathcal{C}$ immer

$$\mathbf{J}_{\tau_\lambda} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C} \cap \lambda} \mathrm{rng}(\sigma_{\alpha\lambda}), \tag{3.4.1}$$

denn für ein $x \in \mathbf{J}_{\tau_\lambda}$ liegt natürlich $\sigma_\lambda(x)$ in X_λ, so daß wegen $X_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C} \cap \lambda} X_\alpha$ ein $\alpha < \lambda$ aus $\mathcal{C}$ mit $\sigma_\lambda(x) \in X_\alpha = \mathrm{rng}(\sigma_\alpha)$ existiert. Aber dann finden wir auch ein $y \in \mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ mit $\sigma_\alpha(y) = \sigma_\lambda(x)$, so daß schließlich $\sigma_{\alpha\lambda}(y) = \sigma_\lambda^{-1}\sigma_\alpha(y) = x$ gilt und somit wie gewünscht x im Wertebereich von $\sigma_{\alpha\lambda}$ liegt. Die andere Inklusion ist offensichtlich. Eine ganz wesentliche und später (im sechsten Kapitel) nicht mehr vorhandene Eigenschaft dieser Submodelle ist die mögliche Identifizierung des Submodells X_α mit seinem Schnitt $X_\alpha \cap \gamma$, dem kritischen Punkt der entsprechenden Einbettung σ_α; wir erhalten nämlich, daß $X_\alpha \neq X_\beta$ genau dann gilt, wenn $X_\alpha \cap \gamma \neq X_\beta \cap \gamma$ ist, also nach Wahl von $\mathcal{C}$ genau dann, wenn $\alpha \neq \beta$ gilt.

Eine im Beweis später wesentliche Eigenschaft der noch zu konstruierenen Menge wird die Beschränktheit von abzählbaren Teilmengen sein, so daß wir an dieser Stelle naheliegend unsere club Menge geeignet wie folgt ausdünnen. Da die Menge

[7] Für $\beta \in \alpha$ existiert ein $i < \omega$ mit $\beta \in \alpha_i$, so daß wegen der ersten Bedingung β auch in $X_{\alpha_{i+1}} \subseteq X_\alpha$ ist. Ist $\beta \in X_\alpha \cap \gamma$, dann existiert auch hier aufgrund der Definition der Mengen X_ξ ein $i < \omega$ mit $\beta \in X_{\alpha_i} \cap \gamma$, so daß β aufgrund der zweiten Bedingung schon in $\alpha_{i+1} \subseteq \alpha$ zu finden ist.

der Ordinalzahlen mit überabzählbarer Konfinalität wegen der Regularität von γ stationär in $\gamma > \omega$ liegt[8], können wir sofort das folgende festhalten:

$\mathcal{D}$ (3.4.2) $\quad \mathcal{D} := \{\alpha \in \mathcal{C} \mid \mathrm{cf}(\alpha) > \omega\}$ liegt stationär in γ.

Mit dieser technischen Vorarbeit liest sich das Lemma über die häufige Erweiterbarkeit wie folgt:

Theorem 3.10 (Version 1, Jensen 1974) *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ stationär in γ. Für $\alpha \in \mathcal{S}$ sei $\mu_\alpha > \tau_\alpha$ beliebig gewählt, so daß τ_α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ ist; weiterhin sei $\tilde{\sigma}_\alpha : \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathfrak{A}_\alpha$ die kanonische Aufwärtserweiterung von σ_α. Dann gibt es eine club Menge $\mathcal{C} \subseteq \gamma$, so daß für jedes $\alpha \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ das Pseudo-Ultraprodukt $\mathfrak{A}_\alpha$ fundiert ist.*

Offenbar ist die Aussage des Theorems äquivalent zu der Formulierung, daß die Menge $\{\alpha \in \mathcal{S} \,|\, \mathfrak{A}_\alpha$ ist nicht fundiert$\}$ nicht stationär in γ liegt. Diese Formulierung wird uns vor allem im sechsten Kapitel interessieren.

Beweis des Theorems 3.10: Wir werden zwei Fälle unterscheiden. Später werden wir zwar nur den folgenden ersten Fall anwenden, dennoch sollten wir das Theorem in seiner vollen Stärke beweisen; dabei wird der Beweis des zweiten Teils keine zusätzlichen Schwierigkeiten bereiten, da wir ihn auf den ersten Teil zurückführen können.

τ **Fall 1:** $\mathrm{cf}(\tau) = \omega$.

Um einen Widerspruch zu bekommen, nehmen wir das Gegenteil an; liege also die Menge $\{\alpha \in \mathcal{S} | \mathfrak{A}_\alpha$ ist nicht fundiert$\}$ stationär in γ. Wir können außerdem o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{A}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{S}$ nicht fundiert ist, indem man sich im anderen Fall auf die obige stationäre Teilmenge von $\mathcal{S}$ beschränkt. Darüber hinaus seien
μ_α die μ_α minimal mit der Eigenschaft gewählt, daß $\mathfrak{A}_\alpha$ nicht fundiert ist. Aufgrund der Nicht-Fundiertheit existiert eine unendlich oft absteigende $\in_{\mathfrak{A}_\alpha}$-Kette; sei etwa $[\xi^\alpha_{i+1}, f^\alpha_{i+1}] \in_{\mathfrak{A}_\alpha} [\xi^\alpha_i, f^\alpha_i]$ für $i < \omega$, wobei nach Konstruktion f^α_i aus $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ und ξ^α_i aus $\sigma_\alpha(\mathrm{dom}(f^\alpha_i))$ stammt. Nach dem Satz von Łoś gilt dann also

(3.4.3) $\quad \langle \xi^\alpha_{i+1}, \xi^\alpha_i \rangle \in \sigma_\alpha(\ \{\langle \eta, \eta' \rangle \mid f^\alpha_{i+1}(\eta) \in f^\alpha_i(\eta')\}\ ).$

Wir möchten nun erreichen, daß die Ordinalzahlen β der zu betrachtenen Menge unter den ξ^α_i für $\alpha < \beta$ abgeschlossen sind. Dazu wählen wir für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ ein $\beta_\alpha > \alpha$ mit $\{\xi^\alpha_i \,|\, i < \omega\} \subseteq \mathrm{rng}(\sigma_{\beta_\alpha})$. Wir haben zwar nach Konstruktion $\xi^\alpha_i \in \sigma_\alpha(\mathrm{dom}(f^\alpha_i))$ gegeben, aber eben nicht notwendig schon $\xi^\alpha_i \in \mathrm{rng}(\sigma_\alpha)$. Wir betrachten nun $\overline{\mathcal{C}} := \{\alpha < \gamma \mid (\ \forall \overline{\alpha} < \alpha\ )(\ \beta_{\overline{\alpha}} < \alpha\ )\}$ und stellen fest, daß $\overline{\mathcal{C}}$ eine club Menge in

[8] Man nehme sich zu einer gegebenen club Menge eine monotone Aufzählung derselben her und betrachte das bezüglich dieser Aufzählung ω_1-te Element.

γ ist, wobei die Unbeschränktheit aus der Regularität von $\gamma > \omega$ folgt. Setze dann $\mathcal{S}' := \mathcal{S} \cap \overline{\mathcal{C}}$; dann ist natürlich $\mathcal{S}'$ wieder eine in γ stationäre Menge. Außerdem gilt jetzt für $\alpha < \beta$ in $\mathcal{S}'$ offensichtlich $\{\xi_i^\alpha \mid i < \omega\} \subseteq \mathrm{rng}(\sigma_\beta)$. Schreiben wir nun für fi- $\mathcal{S}'$
xierte α und β aus $\mathcal{S}'$ abkürzend $\overline{\xi}_i$ für $\sigma_\beta^{-1}(\xi_i^\alpha)$, dann gilt nach (3.4.3) durch Anwendung der Abbildung σ_β^{-1} offenbar $\langle \overline{\xi}_{i+1}, \overline{\xi}_i \rangle \in \sigma_{\alpha\beta}(\{\langle \eta, \eta' \rangle \mid f_{i+1}^\alpha(\eta) \in f_i^\alpha(\eta')\})$. Also gilt nach dem Satz für Łoś in dem Pseudo-Ultraprodukt $[\overline{\xi}_{i+1}, f_{i+1}^\alpha] \in_{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}} [\overline{\xi}_i, f_i^\alpha]$, wobei $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} : \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \longrightarrow \mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ die kanonische Aufwärtserweiterung von $\sigma_{\alpha\beta}$ ist. Wir haben daher gezeigt:

(3.4.4) $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ ist für alle $\alpha < \beta$ in $\mathcal{S}'$ nicht fundiert.

Das führen wir nun schrittweise zum Widerspruch. Dazu werden wir einige Abbildungen definieren. Um den Überblick nicht zu verlieren, steht am Ende des Beweises ein Übersichtsdiagramm, das die wesentlichsten Zusammenhänge zeigen sollte. Betrachte nun ein abzählbares $Y \prec H_\theta$, wobei θ regulär und hinreichend groß[9] fi- Y, θ
xiert sei, d.h. $\mathcal{S}'$, $\langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}' \rangle \in Y$. Somit liegen auch die Familien $\langle \mu_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{S}' \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_\alpha | \alpha \in \mathcal{S}' \rangle$, $\langle \mathfrak{A}_\alpha | \alpha \in \mathcal{S}' \rangle$, $\langle \sigma_{\alpha\beta} | \alpha, \beta \in \mathcal{S}' \rangle$ und $\langle \tilde{\sigma}_{\alpha\beta} | \alpha\beta \in \mathcal{S}' \rangle$ in Y. An dieser Stelle geht auch die Voraussetzung des aktuellen Falls ein, denn für ein $\alpha \in \mathcal{S}' \cap Y$, welches aufgrund der Stationarität von $\mathcal{S}'$ existieren muß, ist mit σ_α auch $\mathrm{rng}(\sigma_\alpha) = X_\alpha$ eine Teilmenge von Y, die aber nach Konstruktion der Menge $\mathcal{C}$ eine in τ konfinale Folge in sich trägt, so daß wir nur unter der gegebenen Voraussetzung an τ eine abzählbare Struktur Y bekommen können. Sei nun $\pi : H \overset{\sim}{\longleftrightarrow} Y$ durch den (inver- π, H
sen) MOSTOWSKI-Kollaps gegeben, wobei H dann transitiv ist. Sei $\pi(\overline{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}'$ und $\overline{\mathcal{S}}$
$\overline{\beta} \in \overline{\mathcal{S}}$ ein Limespunkt von $\overline{\mathcal{S}}$. Sei $\beta := \pi(\overline{\beta}) \in \mathcal{S}'$, $\pi(\overline{\tau}_\beta) = \tau_\beta$ und $\pi(\overline{\mu}_\beta) = \mu_\beta$. Da $\overline{\beta}, \beta, \overline{\tau}_\beta, \overline{\mu}_\beta$
wegen $\beta \in \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ immer $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$ gilt und H natürlich inbesondere selbst abzählbar ist, muß das Bild einer beliebigen Teilmenge von H unter der Abbildung π beschränkt in der durch (3.4.1) gegebenen Vereinigung liegen; d.h. insbesondere existiert ein $\alpha \in \beta \cap \mathcal{S}'$, so daß $\pi\,\text{"}\,\mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$ schon vollständig in $\mathrm{rng}(\sigma_{\alpha\beta})$ liegt. Wir definieren nun $\sigma : \mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ durch $\sigma := \sigma_{\alpha\beta}^{-1} \pi \restriction \mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$, wobei die Σ_ω-Erhaltung σ
aufgrund der Hintereinanderausführung elementarer Abbildungen folgt. Sei dann $\tilde{\sigma} : \mathbf{J}_{\overline{\mu}_\beta} \longrightarrow \mathfrak{A}'$ die kanonische Aufwärtserweiterung[10] von σ. Dann können wir die $\tilde{\sigma}, \mathfrak{A}'$
Fundiertheit des derart gebildeten Pseudo-Ultraproduktes nachweisen.

(3.4.5) $\mathfrak{A}'$ ist fundiert.

BEWEIS VON (3.4.5): Wir nutzen das Standardargument und geben eine Einbettung $\sigma' : \mathfrak{A}' \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\mu_\beta}$ an, die durch $\sigma'([\xi, f]) := \pi(f)(\sigma_{\alpha\beta}(\xi))$ definiert ist. Diese σ'
Abbildung ist zunächst korrekt definiert, da nach Konstruktion für $[\xi, f] \in \mathfrak{A}'$ immer

[9] Das heißt, daß alle von uns betrachteten Objekte sich in H_θ als Elemente wieder finden lassen.

[10] Die notwendige Konfinalität von σ folgt leicht aus gegebenen Umständen: für ein $y \in \mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ existiert aufgrund der Konfinalität von π ein $x \in \mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$ mit $\pi(x) \supseteq \sigma_{\alpha\beta}(y)$; da aber nach Wahl der Wertebereich von $\pi \restriction \mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$ vollständig im Wertebereich von $\sigma_{\alpha\beta}$ liegt, folgt die gewünschte Konfinalität von σ offenbar sofort.

$f \in \mathbf{J}_{\overline{\mu}_\beta} \subseteq H = \mathrm{dom}(\pi)$ und außerdem $\mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta} \subseteq \mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ gilt; wobei das letztere schon aus Kardinalitätsgründen folgt: $\overline{\tau}_\beta$ ist als Element der transitiven Menge H natürlich selbst abzählbar, aber wegen $\alpha \in \mathcal{D}$ ist natürlich α insbesondere überabzählbar und damit nach Konstruktion auch τ_α. Somit erhalten wir nach dem Satz von Łoś

$$\begin{aligned} & [\xi_0, f_0] \in_{\mathfrak{A}'} [\xi_1, f_1] \\ \longleftrightarrow\quad & \langle \xi_0, \xi_1 \rangle \in \sigma_{\alpha\beta}^{-1} \pi(\ \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \mid f_0(\eta_0) \in f_1(\eta_1)\}\ ) \\ \longleftrightarrow\quad & \langle \xi_0, \xi_1 \rangle \in \sigma_{\alpha\beta}^{-1}(\ \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \mid \pi(f_0)(\eta_0) \in \pi(f_1)(\eta_1)\}\ ) \\ \longleftrightarrow\quad & \langle \sigma_{\alpha\beta}(\xi_0), \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1) \rangle \in \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \mid \pi(f_0)(\eta_0) \in \pi(f_1)(\eta_1)\} \\ \longleftrightarrow\quad & \pi(f_0)(\ \sigma_{\alpha\beta}(\xi_0)\ ) \in \pi(f_1)(\ \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1)\ ) \\ \longleftrightarrow\quad & \sigma([\xi_0, f_0]) \in \sigma([\xi_1, f_1]). \end{aligned}$$

Da wir aber keine unendlich oft absteigenden $\in$-Ketten (in $\mathbf{J}_{\mu_\beta}$) haben, ist die Behauptung bewiesen. ⊠ (3.4.5)

$\mathfrak{A}, \mu$ Daher existiert ein μ mit $\mathfrak{A}' = \mathbf{J}_\mu$. Wir wollen einsehen, daß $\mu_\alpha \leq \mu$ ist. Wir wissen, daß nach Voraussetzung τ_α in $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ eine Kardinalzahl ist. Wenn nun τ_α keine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_\mu$ ist, dann gilt offenbar sofort die gewünschte Ungleichung. Im anderen Fall können wir $\underline{\sigma} : \mathbf{J}_\mu \longrightarrow \mathfrak{A}$ als kanonische Aufwärtserweiterung von σ_α betrachten; wir können in dieser Situation die Nicht-Fundiertheit nachweisen.

(3.4.6) $\mathfrak{A}$ ist nicht fundiert.

Beweis von (3.4.6): Setze dazu $\overline{\mathfrak{A}}_\beta := \pi^{-1}(\mathfrak{A}_\beta)$. Es gibt dann ξ_i und f_i für $i < \omega$, so daß aufgrund der Nicht-Fundiertheit jeweils $[\xi_{i+1}, f_{i+1}] \in_{\overline{\mathfrak{A}}_\beta} [\xi_i, f_i]$ gilt; dann gilt aber auch $[\pi(\xi_{i+1}), \pi(f_{i+1})] \in_{\mathfrak{A}_\beta} [\pi(\xi_i), \pi(f_i)]$, so daß wir nach dem Satz von Łoś sofort wissen, daß $\langle \pi(\xi_{i+1}), \pi(\xi_i) \rangle$ in $\sigma_\beta(\ \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \in \tau_\beta^2 \mid \pi(f_{i+1})(\eta_0) \in \pi(f_i)(\eta_1)\}\ )$ liegt. Nun ist aber die Menge $\{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \in \tau_\beta^2 \mid \pi(f_{i+1})(\eta_0) \in \pi(f_i)(\eta_1)\}$ nichts anderes als $\pi(\ \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \in \overline{\tau}_\beta^2 \mid f_{i+1}(\eta_0) \in f_i(\eta_1)\}\ )$, so daß schließlich $\langle \pi(\xi_{i+1}), \pi(\xi_i) \rangle$ in $\sigma_\beta(\ \pi(Z_i)\ )$ liegt; dabei sei $Z_i := \{\langle \eta_0, \eta_1 \rangle \in \overline{\tau}_\beta^2 \mid f_{i+1}(\eta_0) \in f_i(\eta_1)\}$. Dann gilt aber auch $\sigma_\beta \pi(Z_i) = \sigma_\beta\ \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{-1}\ \pi(Z_i) = \sigma_\beta \sigma_{\alpha\beta}\ \sigma(Z_i)$ nach der obigen Definition von σ; darüber hinaus folgt aus unserer Konstruktion, daß $\sigma_\beta \sigma_{\alpha\beta}$ und σ_α die gleichen Abbildungen sind, also ist letztendlich $\langle \pi(\xi_{i+1}), \pi(\xi_i) \rangle \in \sigma_\alpha(\ \sigma(Z_i)\ )$, d.h. wir bekommen schließlich wie gewünscht $[\pi(\xi_{i+1}), \tilde{\sigma}(f_{i+1})] \in_{\mathfrak{A}} [\pi(\xi_i), \tilde{\sigma}(f_i)]$. Somit gilt die behauptete Aussage. ⊠ (3.4.6)

Daher folgt auch in diesem Fall aufgrund der minimalen Wahl von μ_α sofort die gewünschte Ungleichung, so daß wir in jedem Fall das folgende bewiesen haben:

(3.4.7) $\mu_\alpha \leq \mu$.

Nehmen wir noch einmal die Abbildung $\sigma' : \mathbf{J}_\mu \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\mu_\beta}$ aus (3.4.5) zu Hilfe, die durch $\sigma'(\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(f')(\xi)\ ) := \pi(f')(\ \sigma_{\alpha\beta}(\xi)\ )$ definiert war, dann finden wir auch eine

Abbildung $\sigma'' : \mathfrak{A}_{\alpha\beta} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\mu_\beta}$, die durch $\sigma''([\xi', f']) := \sigma'(f')(\xi')$ gegeben ist. Für den Nachweis der Erhaltungsstärke muß man sich die einzelnen Abbildungen anschauen; dazu überlegen wir uns, daß σ' eine Erweiterung von $\sigma_{\alpha\beta}$ darstellt: Sei also ein $x \in \mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ gegeben, dann existieren ein $f' \in \mathbf{J}_{\overline{\mu}_\beta}$ und ein $\xi' \in \sigma(\ \mathrm{dom}(f')\ )$ mit $x = \tilde{\sigma}(f')(\xi')$. Da aber σ konfinal in $\mathbf{J}_{\tau_\alpha}$ abbildet, können wir annehmen, daß f schon in $\mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$ liegt[11]. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}(x) &= \sigma_{\alpha\beta}(\ \tilde{\sigma}(f')(\xi')\ ) \\
&= \sigma_{\alpha\beta}(\ \sigma(f')(\xi')\ ) \\
&= \sigma_{\alpha\beta}(\ \sigma_{\alpha\beta}^{-1}\pi(f')(\xi')\ ) \\
&= \pi(f')(\ \sigma_{\alpha\beta}(\xi')\ ) \\
&= \sigma'(\ \tilde{\sigma}(f')(\xi')\ ) \ = \ \sigma'(x).
\end{aligned}$$

Der Rest folgt aber dann ganz leicht, denn $[f_1, \xi_1] \in_{\mathfrak{A}_{\alpha\beta}} [f_2, \xi_2]$ ist nach dem Satz von Łoś äquivalent zu $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \sigma_{\alpha\beta}(\ \{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle \mid f_1(\eta_1) \in f_2(\eta_2)\}\ )$. Mit der obigen Überlegung können wir an dieser Stelle die Abbildung $\sigma_{\alpha\beta}$ äquivalent durch σ' ersetzen, so daß wir schließlich $\langle \xi_1 \xi_2 \rangle \in \{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle | \sigma'(f_1)(\eta_1) \in \sigma'(f_2)(\eta_2)\}$ und damit wie gewünscht $\sigma'(f_1)(\xi_1) \in \sigma'(f_2)(\xi_2)$ erhalten. Aber aufgrund dieser Erhaltung muß $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ fundiert sein. Widerspruch zu (3.4.4)!

Wir geben zum Schluß noch das am Anfang versprochene Diagramm, das die Vielzahl von Abbildungen ein wenig näher bringen soll.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}' = \mathbf{J}_\mu \arrow[rr, "\sigma'"] & & \mathbf{J}_{\mu_\beta} & & \\
\mathbf{J}_{\overline{\mu}_\beta} \arrow[ur, "\tilde{\sigma}"] & & \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \arrow[ul, "\subseteq"'] \arrow[rr, "\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}"] & & \mathfrak{A}_{\alpha\beta} \arrow[ul, "\sigma''"'] & \\
 & & & \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \arrow[ul, "\subseteq"] \arrow[rr, "\sigma_{\alpha\beta}"] & & \mathbf{J}_{\tau_\beta} \arrow[ul, "\subseteq"'] \\
 & & \mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta} \arrow[uull, "\subseteq"'] \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[urrr, "\pi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

⊠(Fall 1)

[11] Die Existenz folgt beispielsweise ganz schnell mit den gegebenen Methoden, wenn man die kanonische Aufwärtserweiterung von σ auf $\mathbf{J}_{\overline{\tau}_\beta}$ betrachtet, d.h. man erweitert also die vorhandene Abbildung nicht wirklich, aber dennoch reicht die im zweiten Kapitel behandelte Theorie aus, um nun eine solche Darstellung wie gewünscht zu finden.

Fall 2: $\mathrm{cf}(\tau) > \omega$.

Wir werden diesen Fall auf den ersten zurückführen und zeigen daher unter Benutzung des vorigen Falls das folgende

Lemma 3.11 *Seien jetzt zusätzlich $\alpha < \tau'_\alpha \leq \tau_\alpha$ und weiterhin $\mu'_\alpha > \tau'_\alpha$ gegeben, so daß τ'_α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu'_\alpha}$ ist. Setze dann $\sigma'_\alpha := \sigma_\alpha \restriction \mathbf{J}_{\tau'_\alpha}$. Betrachte die kanonische Aufwärtserweiterung $\tilde{\sigma}'_\alpha : \mathbf{J}_{\mu'_\alpha} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathfrak{A}_\alpha$ von σ'_α auf $\mathbf{J}_{\mu'_\alpha}$. Dann gibt es eine club Menge $\mathcal{C} \subseteq \gamma$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ fundiert ist.*

Da der uns interessierende Fall enthalten ist, genügt es offenbar, diese Form zu beweisen. Der Grund für diese Umformung wird sich im Beweis zeigen; wir werden nämlich durch Einschränkungen der vorhandenen Einbettungen neue Einbettungen betrachten, um den ersten Fall anwenden zu können.

Beweis des Lemmas 3.11: Erneut nehmen wir das Gegenteil an und leiten daraus einen Widerspruch ab. Sei also $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ stationär, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{S}'$ nicht fundiert ist. Dabei seien die τ'_α minimal mit dieser Eigenschaft gewählt. Anschließend wählen wir zu den τ'_α die μ'_α minimal.

Behauptung 1: Es gibt ein $\tau' < \tau$ mit $\sigma'_\alpha : \mathbf{J}_{\tau'_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau'}$ für alle $\alpha \in \mathcal{S}'$.

Das reicht uns, denn damit haben wir bezüglich der Einbettungen eine ähnliche Situation wie im ersten Fall. Aufgrund der minimalen Wahl am Anfang des Beweises bekommen wir schließlich die

Behauptung 2: $\mathrm{cf}(\tau') = \omega$.

An dieser Stelle bezeugt der schon bewiesene erste Fall einen Widerspruch, denn wir können jetzt den bereits nachgewiesenen abzählbar konfinalen Fall des aktuellen Lemmas für τ' statt τ anwenden, da wir die nötigen Voraussetzungen mit den beiden Behauptungen bereit gestellt haben.

Beweis der Behauptung 1: Seien für $\alpha \leq \beta$ in $\mathcal{S}'$ die Abbildungen $\sigma'_{\alpha\beta}$ analog $\sigma_{\alpha\beta}$ durch ${\sigma'_\beta}^{-1}\sigma'_\alpha$ definiert, dann definieren wir für eine Limeszahl $\lambda \in \mathcal{S}'$ eine Abbildung $h(\lambda) := \min\{\alpha \in \mathcal{C} \mid \tau'_\lambda \in \mathrm{rng}({\sigma'}_{\alpha\lambda})\}$, falls $\tau'_\alpha < \tau$. Dabei beachte (3.4.1) für Limeszahlen λ, sowie die Konvention, daß $\sigma_{\alpha\lambda}(\tau_\alpha) := \tau_\lambda$ sein soll. Diese Vereinbarung ist nur notwendig, wenn wir hier gerade den Fall $\tau'_\alpha = \tau_\alpha$ haben. Mit diesen Bemerkungen ist h wohldefiniert und wir beobachten, daß h eine regressive Funktion auf einer stationären Menge ist. Nach dem Satz von Fodor können wir o.B.d.A. annehmen, daß $h(\lambda) = \alpha_0$ für alle $\lambda \in \mathcal{S}'$ gilt; zusätzlich soll auch noch $\alpha_0 < \min(\mathcal{S}')$ gelten. Da $\sigma^{-1}_{\alpha_0\lambda}(\tau'_\lambda) \leq \tau_{\alpha_0}$ ist, können wir erneut nach dem Satz von Fodor annehmen, so daß es ein $\tilde{\tau}$ gibt mit $\sigma^{-1}_{\alpha_0\lambda}(\tau'_\lambda) = \tilde{\tau}$ für alle $\lambda \in \mathcal{S}'$. Setze dann $\tau' := \sigma_{\alpha_0}(\tilde{\tau})$. Dann gilt also $\sigma_\alpha(\tau'_\alpha) = \tau'$ für beliebige $\alpha \in \mathcal{S}'$. Somit haben wir insbesondere auch die behauptete Aussage, da sich die geforderte Elementarität aufgrund der Einschränkung einer Einbettung mit einer solchen Erhaltungstärke auf eine (uniform definierbare) $\mathbf{J}$-Stufe überträgt. ⊠(Behauptung 1)

Beweis der Behauptung 2: Nehmen wir das Gegenteil an und wählen ein $\alpha \in \mathcal{S}'$ beliebig. Da $\mathfrak{A}_\alpha$ nicht fundiert ist, existieren $\delta'_i \in \mathrm{On} \cap \mathfrak{A}_\alpha$ mit $\mathfrak{A}_\alpha \models \delta'_{i+1} < \delta'_i$ für alle $i < \omega$. Nach Konstruktion existieren $f_i \in \mathbf{J}_{\mu'_\alpha}$ und $\xi_i \in \sigma_\alpha(\mathrm{dom}(f_i))$, so daß $\delta_i = \tilde{\sigma}'_\alpha(f_i)(\xi_i)$ gilt. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\mathrm{dom}(f_i) = \nu_i$ für ein $\nu_i < \tau'_\alpha$ ist. Setze $\nu := \sup\{\nu_i \mid i < \omega\}$. Da $\nu_i < \sigma_\alpha(\tau'_\alpha) = \tau'$, gilt $\nu < \tau'_\alpha$ aufgrund der Annahme. Nach der Wahl der δ_i und der von ν wissen wir, daß die kanonische Aufwärtserweiterung von $\sigma_\alpha \restriction \mathbf{J}_\nu$ nicht fundiert sein kann. Das steht aber im Widerspruch zur minimalen Wahl von τ'_α. ⊠(Behauptung 2)

⊠(Lemma 3.11)

⊠(Fall 2)

Damit ist der Beweis des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit vollständig.

⊠(Theorem 3.10)

Bemerkung 3.12 *Die Aussage des Theorems gilt auch für $\mu_\alpha = \infty$, denn falls $\mathfrak{A}_\alpha$ nicht fundiert ist, so gibt es schon ein $\mu < \infty$, so daß $\mathfrak{A}'$ nicht fundiert ist, wobei $\sigma' : \mathbf{J}_\mu \longrightarrow \mathfrak{A}'$ die kanonische Aufwärtserweiterung von σ_α ist*[12]*. Dann greift das vorige Theorem.*

Der Beweis des Theorems 3.10 zeigt, daß wir folgende Version nachgewiesen haben.

Korollar 3.13 *Sei γ überabzählbar und regulär, sowie $\tau > \gamma$ gegeben. Seien darüber hinaus eine in γ club liegende Menge $\mathcal{C}$, eine Folge $\langle \tau_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{C} \cup \{\gamma\} \rangle$ und kommutierende Abbildungen $\sigma_{\alpha\beta}$ für $\alpha \leq \beta$ in $\mathcal{C} \cup \{\gamma\}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

- $\sigma_{\alpha\beta} : \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau_\beta}$.
- $\tau_\gamma = \gamma$, $\tau_\alpha \leq \tau_\beta$ *für* $\alpha \leq \beta$ *in* $\mathcal{C} \cup \{\gamma\}$.
- $\alpha = \mathrm{crit}(\sigma_{\alpha\beta})$ *für* $\alpha < \beta$ *in* $\mathcal{C} \cup \{\gamma\}$.
- $\mathbf{J}_{\tau_\lambda} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{C} \cap \lambda} \mathrm{rng}(\sigma_{\alpha\lambda})$ *für Limespunkte* λ *in* $\mathcal{C} \cup \{\gamma\}$.

Sei $\mathcal{D}$ die Teilmenge von $\mathcal{C}$, bestehend aus den Elementen mit überabzählbarer Konfinalität, $\mathcal{S}$ eine beliebige in γ stationäre Teilmenge von $\mathcal{D}$ und wähle zu jedem α in $\mathcal{S}$ ein $\mu_\alpha > \tau_\alpha$, so daß τ_α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ ist. Bezeichne $\tilde{\sigma}_\alpha : \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \longrightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ die kanonische Aufwärtserweiterung von σ_α, wobei $\sigma_\alpha := \sigma_{\alpha\gamma} \restriction \tau_\alpha$, d.h. $\sigma_\alpha : \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau^*_\alpha}$ für $\tau^*_\alpha := \sup \sigma_{\alpha\gamma} `` \tau_\alpha$ ist eine konfinale Abbildung. Dann ist die Menge $\{\alpha \in \mathcal{S} \mid \mathfrak{A}_\alpha$ ist nicht fundiert$\}$ nicht statonär in γ.

[12] Wähle dafür μ mit $f_i \in \mathbf{J}_\mu$ für $i < \omega$, wobei diese Funktionen die Nicht-Fundiertheit bezeugen, d.h. es gilt $[\xi_{i+1}, f_i] \in_{\mathfrak{A}_\alpha} [\xi_i, f_i]$.

Der Unterschied zu der Formulierung in Theorem 3.10 liegt gerade darin, daß wir nun nicht mit Hilfe der vorher gegebenen Abbildung f die in das Korollar 3.13 eingehenden Objekte konkret festgelegt haben, sondern nur noch die Existenz solcher Objekte fordern, die die zum Beweis benötigten Eigenschaften besitzen. Der mit Abstand einfachste Weg, sich solche Objekte zu schaffen, ist der oben angedeutete über die vorhandene Surjektion. Darüber hinaus wird es auch aufgrund der eingehenden Homogenität im Zusammenspiel der Objekte $\sigma_{\alpha\beta}$ und τ_α mit den Ordinalzahlen schwer werden, eine solche Voraussetzung ohne derartige Überführungsabbildungen – wie etwa die Abbildung f – zu erhalten. Somit ist zwar die gegebene Surjektion aus der unmittelbaren Formulierung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit entfernt worden, aber dennoch ist es nur ein kleiner Gewinn. Die Frage, der wir uns im sechsten Kapitel widmen werden, bleibt:

> **Frage:** Können wir eine Formulierung des Theorems 3.10 finden, die gänzlich ohne Übergang zu den Ordinalzahlen auskommt?

Wir werden später eine Erweiterung des Theorems für feinstrukturelle Anwendungen benötigen. Daher beweisen wir das folgende Theorem über die feinstrukturelle Erweiterbarkeit wie folgt.

Theorem 3.14 (Version 1 – FS) *Seien $\mathcal{S}, \tau_\alpha, \mu_\alpha$ wie oben für $\alpha \in \mathcal{S}$ definiert. Sei nun aber $\tilde{\sigma}_\alpha : \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \longrightarrow \mathfrak{A}_\alpha$ die kanonische feinstrukturelle Aufwärtserweiterung. Dann gibt es eine club Menge $C \subseteq \gamma$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ fundiert ist für beliebiges $\alpha \in \mathcal{S} \cap C$.*

Beweis: Der gleiche Beweis wie der von der Σ_0-Erweiterung in Theorem 3.10 zeigt hier die Behauptung. Beachten wir, daß wir in der Definition der feinstrukturellen Erweiterung nicht nur Funktionen genommen haben, die Elemente der Grundstruktur waren, sondern zusätzlich auch noch geeignete gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}$-Funktionen; dann können wir zusammen mit der Bemerkung 1.57, die aussagt, daß sich Abbildungen mit dem Definitionsbereich des Grundbereiches auch auf solche Funktionen ohne Erhaltungsverlust erweitern lassen, den obigen Beweis fast wörtlich übernehmen.

$\boxtimes$(Theorem 3.14)

Kapitel 4

Das Überdeckungslemma

4.1 Allgemeines

Ein wichtiger Meilenstein in der Entwicklung der Mengenlehre im Zusammenhang mit dem konstruktiblen Universum ist das Überdeckungslemma aus den 70er Jahren, dessen Bedeutung wir im folgenden durch Angabe einiger Korollare bestärken möchten; darüber hinaus werden wir in diesem Kapitel einen Beweis dieses Theorems als Anwendung von den eher technisch erscheinenden Lemmata über die kanonische Aufwärtserweiterung und das Fundiertheitsverhalten der derart gebildeten Pseudo-Ultraprodukte angeben.

Aus dem Überdeckungslemma bekommen wir interessante Folgerungen, die den Zusammenhang zwischen GÖDELS konstruktiblen Universum $\mathbf{L}$ und dem ganzen Universum $\mathbf{V}$ näher beschreiben. Grob gesagt können wir feststellen, daß entweder $0^\#$ existiert und damit $\mathbf{L}$ sehr *klein* und *schmal* gegenüber dem ganzen Universum ist, oder andererseits, wenn $0^\#$ nicht existiert, dann sagt uns das Überdeckungslemma, daß $\mathbf{L}$ sehr *groß* und *breit* im Universum liegt. Mit anderen Worten, wenn $0^\#$ existiert, dann ist $\mathbf{V}$ sehr verschieden von $\mathbf{L}$; im anderen Fall sind sich $\mathbf{V}$ und $\mathbf{L}$ sehr ähnlich. Doch bevor wir uns den Auswirkungen zuwenden, sollten wir den eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels formulieren:

Theorem (Überdeckungslemma, JENSEN 1974) *Wenn $0^\#$ nicht existiert, dann läßt sich jede überabzählbare Menge von Ordinalzahlen durch eine konstruktible Menge von Ordinalzahlen der gleichen (realen) Mächtigkeit überdecken.*

Das Theorem besagt also insbeondere, daß wir für jede Menge $X \subseteq \mathrm{On}$ ein $Y \in \mathbf{L}$ finden, welches X überdeckt und höchstens Mächtigkeit $\max(|X|, \aleph_1)$ hat. Aus dem noch zu beweisenden obigen Theorem bekommen wir die folgenden Korollare, die wir hier, obwohl aus der Literatur bekannt, trotzdem noch einmal aufführen möchten.

Korollar 4.1 *Wenn $0^\#$ nicht existiert, dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Wenn* $\kappa > \omega_1$ *in* $\mathbf{L}$ *regulär ist, dann gilt* $\mathrm{cf}(\kappa) = |\kappa|$.

(b) *Kardinalzahlen größer als* ω_1 *sind regulär, wenn sie es in* $\mathbf{L}$ *sind.*

(c) *Für eine singuläre Kardinalzahl* β *gilt* $(\beta^+)^{\mathbf{L}} = \beta^+$.

(d) *Singuläre Kardinalzahlen sind auch in* $\mathbf{L}$ *singulär.*

(e) *Für eine singuläre Kardinalzahl* β *mit* $(\forall \gamma < \beta)(2^\gamma < \beta)$ *gilt* $2^\beta = \beta^+$.

(f) *Falls für eine singuläre Kardinalzahl* β *eine nicht-konstruktible Teilmenge existiert, so gibt es schon eine nicht-konstruktible Teilmenge einer Ordinalzahl echt kleiner* β.

Beweis: Nehmen wir an, $0^\#$ existiere nicht.
zu (a): Wäre es nicht der Fall, dann gäbe es ein in κ konfinal liegendes $X \subseteq \kappa$ mit $|X| < |\kappa|$. Somit gibt es nach dem Überdeckungslemma ein $Y \in \mathbf{L}$ mit $X \subseteq Y \subseteq \kappa$ und $|Y| = \max(|X|, \aleph_1)$. Also gilt wegen $\kappa > \omega_1$ sofort $(\mathrm{cf}(\kappa))^{\mathbf{L}} \leq (|Y|)^{\mathbf{L}} < \kappa$. Widerspruch! Dabei folgt die letzte Ungleichung wie folgt: Im anderen Fall wäre nämlich $(|Y|)^{\mathbf{L}} = \kappa$, so daß es insbesondere in $\mathbf{V}$ eine Bijektion zwischen κ und Y, aber andererseits auch zwischen Y und X gibt – das kann aber wegen $|X| < |\kappa|$ nicht sein.

zu (b): Das folgt sofort aus (a).

zu (c): Falls $(\beta^+)^{\mathbf{L}} < \beta^+$ gelten würde, dann hätten wir auch $|(\beta^+)^{\mathbf{L}}| = \beta$ und daher $\mathrm{cf}((\beta^+)^{\mathbf{L}}) = \mathrm{cf}(\beta) < \beta \leq |(\beta^+)^{\mathbf{L}}|$. Widerspruch zu (a)!

zu (d): Sei $X \subseteq \beta$ eine in β konfinal liegende Teilmenge der Mächtigkeit $\mathrm{cf}(\beta) < \beta$. Sei dann $Y \in \mathbf{L}$ mit $X \subseteq Y \subseteq \beta$ und $|Y| = \max(|X|, \aleph_1)$ gegeben; dann bezeugt aber $Y \in \mathbf{L}$ wegen $(|Y|)^{\mathbf{L}} < \beta$ die Singularität von β in $\mathbf{L}$.

zu (e): Sei $\kappa = \mathrm{cf}(\beta)$. Dann existiert für jedes $X \subseteq \beta$ mit $|X| = \kappa$ nach dem Überdeckungslemma ein $Y \in \mathbf{L}$ mit $X \subseteq Y \subseteq \beta$ und $|Y| = \max(\kappa, \aleph_1) < \beta$. Daher erhalten wir schließlich $2^\beta = \beta^{\mathrm{cf}(\beta)} = |\{X \subseteq \beta \,|\, |X| = \kappa\}| \leq |\bigcup\{\mathcal{P}(Y) : Y \in \mathbf{L}, Y \subseteq \beta, |Y| < \beta\}| \leq \beta^+ \cdot \beta = \beta^+$.

zu (f): Sei ein $X \subseteq \beta$ mit $X \notin \mathbf{L}$ gegeben. Dann existiert auch eine nicht-konstruktible Teilmenge $Y \subseteq \beta$ mit $|Y| \leq \mathrm{cf}(\beta)$, denn für eine monotone Aufzählung $\langle \beta_\nu \,|\, \nu < \mathrm{cf}(\beta) \rangle$ von Y ist dann auch $Y' := \{X \cap \beta_\nu \,|\, \nu < \mathrm{cf}(\beta)\}$ nicht konstruktibel, da $X = \bigcup Y'$. Da sich $Y' \subseteq \mathbf{L}_\beta$ auch als Teilmenge von β kodieren läßt, erhalten wir nach dem Überdeckungslemma ein Y' überdeckendes $Z \in \mathcal{P}(\beta) \cap \mathbf{L}$ mit $|Z| = |Y'| = \mathrm{cf}(\beta) < \beta$. Daher liegt aber mit Y' auch das Urbild von Y' unter dem Mostowski-Kollaps von Z, der mit Z natürlich auch selbst konstruktibel ist, nicht in $\mathbf{L}$; dieses Urbild ist aber eine Teilmenge vom Ordnungstyp von Z, der offenbar echt kleiner als β ist[1]. ⊠(Korollar 4.1)

[1]Da $|Z| < \beta$ und β eine Kardinalzahl ist, muß $\mathrm{otp}(Z) \neq \beta$ gelten.

Interessanterweise können wir jetzt eine verblüffende Charakterisierung von $0^\#$ festhalten.

Korollar 4.2 *$0^\#$ existiert genau dann, wenn $\aleph_\omega$ regulär in $\mathbf{L}$ ist.*

Beweis: Wenn $0^\#$ existiert, dann ist $\aleph_\omega$ nach Korollar 1.77 unerreichbar in $\mathbf{L}$. Wenn andererseits $0^\#$ nicht existiert, dann folgt die Behauptung aus dem Korollar 4.1 (d). ⊠(Korollar 4.2)

Definition 4.3 *Mit dem kombinatorischen Prinzip $\square_\kappa$ meinen wir die Aussage, daß es eine Folge $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \ \wedge \ \mathrm{Lim}(\alpha)\rangle$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

(a) *C_α liegt club in α.*

(b) $\mathrm{cf}(\alpha) < \kappa \ \longrightarrow \ |C_\alpha| < \kappa$.

(c) *Wenn $\overline{\alpha}$ ein Limespunkt von C_α ist, dann haben wir die Kohärenzeigenschaft $C_{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} \cap C_\alpha$.*

Korollar 4.4 *Wenn $0^\#$ nicht existiert, dann gilt $\square_\kappa$ für alle singulären Kardinalzahlen.*

Beweis: Da wir mit Hilfe einer feinstrukturellen Analyse – aber ohne zusätzliche Annahmen an das Universum – $\square_\kappa$ für alle unendlichen Kardinalzahlen κ innerhalb $\mathbf{L}$ beweisen können[2], betrachten wir eine solche Folge $\langle C_\alpha \,|\, \alpha < (\kappa^+)^{\mathbf{L}}, \mathrm{Lim}(\alpha)\rangle \in \mathbf{L}$ für eine singuläre Kardinalzahl κ, nun allerdings aus der Sicht des ganzen Universums. Da die Eigenschaften der C_α alle absolut sind, haben sie diese auch in $\mathbf{V}$. Das einzige Problem bei der Übertragung einer solchen Folge von $\mathbf{L}$ nach $\mathbf{V}$ ist die Möglichkeit, daß sie zu *kurz* sein könnte, d.h. in dem Fall $(\kappa^+)^{\mathbf{L}} < \kappa^+$ gäbe es Probleme; dies stünde aber im Widerspruch zu Korollar 4.1 (c). ⊠(Korollar 4.4)

Korollar 4.5 *Wenn $0^\#$ nicht existiert und* GCH *gilt, dann gibt es einen κ^+-*SUSLIN *Baum für jede singuläre Kardinalzahl κ.*

Beweis: Wir haben nach Korollar 4.4 eine $\square_\kappa$-Folge zur Verfügung; Nach [Dev84, Kapitel IV, Abschnitt 2] ist das schon ausreichend, um einen κ^+-SUSLIN Baum konstruieren zu können. ⊠(Korollar 4.5)

Definition 4.6 *Mit der Singulären Kardinalzahl-Hypothese* (SCH) *meinen wir die Aussage, daß für alle singulären Kardinalzahlen β mit $2^{\mathrm{cf}(\beta)} < \beta$ immer $\beta^{\mathrm{cf}(\beta)} = \beta^+$ gilt.*

Im nächsten Korollar werden wir zeigen, daß in der Abwesenheit von $0^\#$ die singuläre Kardinalzahl-Hypothese postitiv entschieden wird. Das bedeutet, daß alles

[2] Vergleiche [Dev84, Kapitel IV,Absch.5].

zum Thema der Kardinalzahlarithmetik gesagt ist, denn mit dem Resultat von EASTON wissen wir, daß wir (fast) alle Freiheiten bezüglich der Wahl der Kardinalität der Potenzmenge regulärer Kardinalzahlen haben. Lediglich die beiden notwendigen Bedingungen, Monotonie und KÖNIG-Ungleichung $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ müssen beachtet werden. Durch EASTON-FORCING können wir derart die Potenzfunktion von regulären Kardinalzahlen festlegen.

Bei den singulären Zahlen sieht das Problem ganz anders aus. So garantiert der schon mit verblüffend einfachen mengentheoretischen Mitteln zu beweisende Satz von SILVER zusammen mit der Voraussetzung, daß die Aussage von GCH schon auf einer stationären Menge unterhalb einer singulären Zahl β gilt, daß dann auch schon $2^\beta = \beta^+$ erfüllt ist. Außerdem gilt $2^\beta = 2^\alpha$ für ein $\alpha < \beta$, falls für hinreichend großes[3] $\gamma < \beta$ auch $2^\gamma = 2^\alpha$ ist. Somit hängt der Wert der Potenzfunktion sehr stark vom Werteverlauf dieser Abbildung unterhalb dieser singulären Zahl ab. Diese Abhängigkeit läßt sich zusammen mit der Gimel-Funktion $\gimel(\beta) := \beta^{\mathrm{cf}(\beta)}$ sehr schön wie folgt darstellen:

$$2^\beta = \begin{cases} \gimel(\beta) & : \text{ falls } \beta \text{ eine Nachfolgerkardinalzahl} \\ 2^{<\beta} \cdot \gimel(\beta) & : \text{ falls } \beta \text{ eine Limeskardinalzahl und} \\ & \quad \text{für hinreichend große } \alpha < \beta \text{ ist } 2^\alpha \text{ konstant} \\ \gimel(2^{<\beta}) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Der Wert $\beta^{\mathrm{cf}(\beta)}$ hat also erheblichen Einfluß auf den Verlauf der Potenzfunktion. Beim EASTON-FORCING bekommen die singulären Kardinalzahlen den kleinstmöglichen Wert zugeordnet. Das läßt sich äquivalent mit $\beta^{\mathrm{cf}(\beta)} = \max(2^{\mathrm{cf}(\beta)}, \beta^+)$ ausdrücken.

Die Aussage SCH ist natürlich eine Folgerung von GCH: Für singuläre Limeskardinalzahlen β gilt $2^{\mathrm{cf}(\beta)} = \mathrm{cf}(\beta)^+ < \beta$ und auch $\beta^+ = 2^\beta = (2^{<\beta})^{\mathrm{cf}(\beta)} = \beta^{\mathrm{cf}(\beta)}$. Das folgende Korollar zeigt auch, daß es schon große Kardinalzahlannahmen benötigt, um SCH zu verletzten.

Korollar 4.7 *Wenn $0^\#$ nicht existiert, dann gilt* SCH.

Beweis: Natürlich ist $\beta^{\mathrm{cf}(\beta)} \geq \beta^+$. Für die andere Ungleichung betrachten wir $X := [\beta]^{\mathrm{cf}(\beta)}$. Dann gilt[4] $|X| = \beta^{\mathrm{cf}(\beta)}$, so daß nur $|X| \leq \beta^+$ zu zeigen bleibt. Nach dem Überdeckungslemma existiert nun für jedes $Y \in X$ ein $Z \in \mathcal{P}(\beta) \cap \mathbf{L}$ mit $|Z| = \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\beta)$, welches Y überdeckt. Also gilt $X \subseteq \bigcup\{[Z]^{\mathrm{cf}(\beta)} \mid Z \in A\}$, wobei $A := \{Z \in \mathcal{P}(\beta) \cap \mathbf{L} \,:\, |Z| = \aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\beta)\}$. Dabei gilt $|A| \leq |\mathcal{P}(\beta) \cap \mathbf{L}| = |\beta^{+\mathbf{L}}| \leq \beta^+$ und für ein $Z \in A$ bekommen wir $|[Z]^{\mathrm{cf}(\beta)}| = (\aleph_1 \cdot \mathrm{cf}(\beta))^{\mathrm{cf}(\beta)} = 2^{\mathrm{cf}(\beta)} \cdot 2^{\mathrm{cf}(\beta)}$. Gilt nun $2^{\mathrm{cf}(\beta)} < \beta$, dann erhalten wir zusammenfassend wie gewünscht $|X| \leq \sup\{\, |[Z]^{\mathrm{cf}(\beta)}| \,:\, Z \in A\} \cdot |A| \leq \beta \cdot \beta^+ = \beta^+$. ⊠(Korollar 4.7)

[3] Das heißt, daß ein $\gamma' < \beta$ existiert, so daß die Bedingung für alle γ mit $\gamma' \leq \gamma < \beta$ gilt.

[4] Für Kardinalzahlen $\lambda \leq \beta$ gilt bekanntlich $\beta^\lambda = |[\beta]^\lambda|$.

Damit beenden wir unsere Betrachtungen zu den Auswirkungen des Überdeckungslemmas; natürlich sind die aufgeführten Folgerungen nur als Auswahl zu verstehen.

4.2 Ein Beweis des Überdeckungslemmas

Im folgenden werden wir das Überdeckungslemma für $\mathbf{L}$ beweisen.

Theorem 4.8 (Überdeckungslemma, JENSEN **1974)** *Wenn* $0^{\#}$ *nicht existiert, dann gibt es für jedes überabzählbare* $X \subseteq \mathrm{On}$ *ein* $Y \in \mathbf{L}$ *mit* $X \subseteq Y$ *und* $|X| = |Y|$.

Der Beweis, obwohl im Detail gesehen eher lang und technisch, ist von der Idee her leicht zu beschreiben. Wir zeigen es indirekt und nehmen uns für einen Widerspruch ein minimales $\tau \in \mathrm{On}$, für das es ein Gegenbeispiel $X \subseteq \tau$ gibt. Dann muß τ aufgrund der minimalen Wahl in $\mathbf{L}$ eine Kardinalzahl sein. Außerdem gilt $|X| < |\tau|$, weil wir sonst $Y := \tau$ wählen könnten. Wir definieren rekursiv ein $H \prec \mathbf{L}_\tau$ mit $|X| = |H|$, das X überdeckt und geeignete Abschlußeigenschaften besitzt. Ein Kondensationsargument garantiert die Existenz eines $\overline{\tau}$, so daß $\mathbf{L}_{\overline{\tau}}$ isomorph zu H mittels eines Isomorphismus σ ist. Nach Definition von H wird $\overline{\tau} < \tau$ sein.

Ist nun $\overline{\tau}$ eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$, dann heben wir diese Abbildung auf ganz $\mathbf{L}$. Stellt sich heraus, daß das Pseudo-Ultraprodukt fundiert ist, dann haben wir die Existenz von $0^{\#}$ nachgewiesen. Widerspruch! Wenn aber $\overline{\tau}$ keine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$ ist, dann existiert ein kleinstes $\overline{\beta}$, so daß ein Projektum von $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}$ unter $\overline{\tau}$ fällt. Nun liegt $\overline{\tau}$ sehr gut in $\overline{\beta}$, so daß die feinstrukturelle Aufwärtserweiterung $\tilde{\sigma}$ von σ fundiert ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\overline{\beta}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \mathbf{J}_\beta \\
\mathbf{L}_{\overline{\tau}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_0"'] & H \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

wobei $\omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1} < \overline{\tau} \leq \omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n}$. Es gilt die Gleichung $\mathbf{J}_{\overline{\beta}} = \tilde{h}_{\overline{\beta}}^{n+1}(\omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1} \times \{p_{\overline{\beta}}\})$, weil für die Stufen von $\mathbf{L}$ alle Standardparameter sehr gute Parameter sind. Setze dann $\tilde{Y} := \tilde{h}_\beta^{n+1}(\,\sigma(\omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1}) \times \{\sigma(p_{\overline{\beta}})\}\,)$. Dann ist $\tilde{Y} \in \mathbf{L}$, $|\tilde{Y}|^{\mathbf{L}} < \tau$ und $X \subseteq \tilde{Y}$. Diese Überdeckung von X ist vielleicht in ihrer Mächtigkeit noch zu groß, aber dann können wir aufgrund der minimalen Wahl von τ einen Widerspruch ableiten, indem wir eine Bijektion $g : \delta \longleftrightarrow \tilde{Y}$ in $\mathbf{L}$ finden und $\overline{X} := g^{-1}\,"\,X$ setzen. Wegen $\overline{X} \subseteq \delta < \tau$ finden wir eine Überdeckung $\overline{Y}$ von $\overline{X}$ entsprechend dem Theorem. Dann erfüllt aber auch $g\,"\,\overline{Y}$ die geforderten Eigenschaften des Theorems bezüglich X. Widerspruch!

Genau diese Strategie können wir im Fall einer überabzählbaren Konfinalität von τ verfolgen. Im anderen Fall wird der Nachweis der Fundiertheit des konstruierten

Pseudo-Ultraproduktes schwieriger, so daß wir auf das Lemma über die häufige Erweiterbarkeit zurückgreifen werden. Das Argument bleibt aber im Prinzip das gleiche. Wenden wir uns nun den einzelnen Details zu.

Beweis des Theorems 4.8: Für einen Widerspruch nehmen wir das Gegenteil X an, d.h. $0^\#$ existiere nicht und wir haben eine überabzählbare Teilmenge $X \subseteq \mathrm{On}$, zu der wir keine konstruktible Überdeckung $Y \in \mathbf{L}$ von X mit gleicher Mächtigkeit τ (gemessen in $\mathbf{V}$) finden können. Setze $\tau := \mathrm{lub}(X)$, dabei können wir X derart wählen, daß τ minimal ist. Schon mit dieser Wahl von X bekommen wir

(4.2.1) $\qquad |\tau| \geq \omega_2,$

denn wenn $|\tau| < \omega_2$ gelten würde, dann wäre $|\tau| = \omega_1$, so daß wir $Y := \tau$ ansetzen können und somit X kein Gegenbeispiel war. Widerspruch!

(4.2.2) $\qquad \tau$ ist in $\mathbf{L}$ eine Kardinalzahl.

Beweis von (4.2.2): Sonst finden wir ein konstruktibles f, so daß $\mathbf{L} \models f : \gamma \xrightarrow{\text{auf}} \tau$ für ein $\gamma < \tau$. Nun kann aber $\tilde{X} := f^{-1}\text{''}\, X$ wegen der Minimalität von τ kein Gegenbeispiel für das Überdeckungslemma sein, denn es gilt offensichtlich $\mathrm{lub}(\tilde{X}) \leq \gamma < \tau$. Also existiert für $\tilde{X}$ ein $\tilde{Y} \in \mathbf{L}$ mit den entsprechenden Eigenschaften des Theorems. Setze dann $Y := f\text{''}\,\tilde{Y}$ und wir erhalten dann $X = f\text{''}\,\tilde{X} \subseteq f\text{''}\,\tilde{Y} = Y$ und $|X| = |f\text{''}\,\tilde{X}| = |\tilde{X}| = |\tilde{Y}| = |f\text{''}\,\tilde{Y}| = |Y|$. Nun ist mit f auch Y konstruktibel, so daß wir erneut einen Widerspruch zur Wahl von X haben. $\boxtimes$ (4.2.2)

(4.2.3) $\qquad$ Für $\omega_2 \leq \kappa < \tau$, wobei κ regulär in $\mathbf{L}$ ist, gilt $\mathrm{cf}(\kappa) = |\kappa|$.

Beweis von (4.2.3): Nehmen wir an, wir hätten ein das Gegenteil bezeugendes κ, dann setze $\tilde{\gamma} := \mathrm{cf}(\kappa) < |\kappa|$, d.h. es existiert (in $\mathbf{V}$) ein $f : \tilde{\gamma} \longrightarrow \kappa$ mit konfinalem Wertebereich in κ. Betrachte dann $\tilde{X} := \mathrm{rng}(f) \subseteq \kappa$. Dann ist aber $\tilde{X}$ auch schon ein Gegenbeispiel für das Theorem, denn sonst existierte schon eine in κ konfinale Folge in $\mathbf{L}$ der Mächtigkeit $\tilde{\gamma}$, was der Regularität von κ innerhalb von $\mathbf{L}$ widerspräche. Das ist dann aber ein Widerspruch zur minimalen Wahl von τ. $\boxtimes$ (4.2.3)

Also hat insbesondere jedes κ mit $\omega_2 \leq \kappa < \tau$, das regulär in $\mathbf{L}$ ist, in $\mathbf{V}$ eine γ überabzählbare Konfinalität. Setze nun $\gamma := |X|$, dann wissen wir schon, daß

(4.2.4) $\qquad \omega < \gamma < |\tau| \leq \tau$

gilt. Falls $\gamma = |\tau|$ wäre, dann hätten wir in X erneut kein Gegenbeispiel gefunden, denn wir können wieder $Y := \tau \in \mathbf{L}$ wählen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall 1: $\mathrm{cf}(\tau) > \omega$.

Wir werden zeigen, daß entweder $0^\#$ existiert oder X gar kein Gegenbeispiel war. Dazu konstruieren wir rekursiv aus X ein $H \prec \mathbf{L}_\tau$ wie folgt:

$H^{(0)}$:= das kleinste $H \prec \mathbf{L}_\tau$ mit $X \subseteq H$, d.h. wir nehmen einen SKOLEM-Abschluß bezüglich $\mathbf{L}_\tau$ von X.

$H^{(\alpha+1)}$:= das kleinste $H \prec \mathbf{L}_\tau$ mit $H^{(\alpha)} \cup \underline{H}^{(\alpha)} \subseteq H$; dabei bezeichne $\underline{H}^{(\alpha)}$ die Menge der Limespunkte von abzählbaren Folgen von Ordinalzahlen aus der Menge $H^{(\alpha)}$.

$H^{(\lambda)} := \bigcup_{\alpha<\lambda} H^{(\alpha)}$ für Limeszahlen λ.

Setze abschließend $H := H^{(\omega_1)}$, dann sind nach Konstruktion X und H natürlich gleichmächtig, da wir in der iterierten Definition am Anfang X mittels SKOLEM-Funktionen abgeschlossen haben, wobei die Mächtigkeit nicht erhöht wird, da X schon überabzählbar ist. Nun garantiert uns das Kondensationsprinzip für $\mathbf{L}$ die Existenz von σ und $\overline{\tau}$ mit $\sigma : \mathbf{L}_{\overline{\tau}} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} H$. Dann gilt aber wegen $|\overline{\tau}| = |\mathbf{L}_{\overline{\tau}}| =$ $\sigma, \overline{\tau}$
$|H| = |X| = \gamma < |\tau|$ sofort $\overline{\tau} < \tau$ und damit insbesondere $\sigma \neq \mathrm{id}$. Um später die Fundiertheit eines geeigneten Pseudo-Ultraproduktes garantieren zu können, zeigen wir das folgende:

(4.2.5) Ist $\overline{\tau}$ eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_\beta$, dann liegt $\overline{\tau}$ sehr gut in β.

BEWEIS VON (4.2.5): Dieser Nachweis gliedert sich in zwei Hilfsschritte.

(4.2.6) $\left\{\right.$ Für $\kappa \in H$ regulär in $\mathbf{L}$ mit $\omega_2 \leq \kappa < \tau$ existiert keine abzählbare und in $\tilde{\kappa}$ konfinale Folge, deren Werte nur in H liegen, wobei $\tilde{\kappa} := \sup(\kappa \cap H)$.

BEWEIS VON (4.2.6): Angenommen, es gibt ein solches $\tilde{\kappa}$ mit abzählbarer Konfinalität. Dann ist damit $\tilde{\kappa}$ ein Limespunkt von Ordinalzahlen aus H, der schon in einer Konstruktionsstufe $H^{(\alpha)}$ aufgetreten sein muß, d.h. $\tilde{\kappa}$ ist wegen der Abschlußeigenschaft von $H^{(\omega_1)} = H$ schon selbst enthalten. Nach Definition gilt aber für ξ mit $\tilde{\kappa} \leq \xi < \kappa$, daß $\xi \notin H$; also ist $\tilde{\kappa} = \kappa$. Widerspruch zu (4.2.3)! ⊠ (4.2.6)

Damit können wir schließlich zeigen:

(4.2.7) $\left\{\right.$ Für hinreichend große $\overline{\kappa} < \overline{\tau}$ gilt: Wenn $\overline{\kappa}$ in $\mathbf{L}_{\overline{\tau}}$ regulär ist, dann ist $\mathrm{cf}(\overline{\kappa}) > \omega$, d.h. es existiert ein $\overline{\xi} < \overline{\tau}$, so daß jedes in $\mathbf{L}_{\overline{\tau}}$ reguläre $\overline{\kappa}$ mit $\overline{\xi} < \overline{\kappa} < \overline{\tau}$ eine überabzählbare Konfinalität besitzt.

BEWEIS VON (4.2.7): Falls nicht, dann gibt es insbesondere ein solches in $\mathbf{L}_{\overline{\tau}}$ reguläres $\overline{\kappa} < \overline{\tau}$ mit $\sigma(\overline{\kappa}) \geq \omega_2$ und abzählbarer Konfinalität. Dann ist aber auch $\kappa := \sigma(\overline{\kappa})$ regulär in $\mathbf{L}_\tau$, also nach Akzeptierbarkeit auch in $\mathbf{L}$. Nach Konstruktion des MOSTOWSKI-Kollaps ist $\overline{\kappa}$ der Ordnungstyp von $\kappa \cap H$. Hätten wir nun eine abzählbare konfinal in $\overline{\kappa}$ liegende Folge, dann fänden wir aufgrund der Beziehung zwischen beiden über den MOSTOWSKI-Kollaps auch eine solche in κ, die nur aus Elementen aus H bestände. Widerspruch zu (4.2.6). ⊠ (4.2.7)

Damit kommen wir nun schnell zum Ziel, denn wir können entsprechend der Definition 3.7 jetzt schnell die drei Bedingungen zeigen. Offenbar gilt sofort nach Voraussetzung $\overline{\tau} < \beta$; außerdem gilt nach Konstruktion von H, das abgeschlossen unter abzählbaren Limespunkten ist, zusammen mit der Voraussetzung $\operatorname{cf}(\tau) > \omega$ auch sofort $\operatorname{cf}(\overline{\tau}) > \omega$. Darüber hinaus ist für den Fall, daß $\overline{\tau}$ in $\mathbf{J}_\beta$ keine Nachfolgerkardinalzahl ist, offenbar $\overline{\tau}$ in $\mathbf{J}_\beta$ eine Limeskardinalzahl und somit ein Limes von Nachfolgerkardinalzahlen. Dann folgt mit (4.2.7) die gewünschte Behauptung.

$\boxtimes$ (4.2.5)

Wir unterscheiden nun wiederum zwei Unterfälle:

Fall 1.1: $\overline{\tau}$ ist eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$.

Wir bilden die kanonische Aufwärtserweiterung von σ und erhalten das folgende Diagramm[5]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[rr, dotted, "\tilde{\sigma}", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & & \mathfrak{A} \\
\mathbf{L}_{\overline{\tau}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[rr, "\sigma", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & & \mathbf{L}_\tau \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Nach Theorem 3.9 ist $\mathfrak{A}$ fundiert, also wegen $\operatorname{dom}(\tilde{\sigma}) = \mathbf{L}$ haben wir auch $\mathfrak{A} = \mathbf{L}$. Da schon σ nicht die Identität war, ist natürlich auch $\tilde{\sigma} \neq \operatorname{id}$, d.h. wir haben eine nicht-triviale Σ_1-erhaltende Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$; somit existiert $0^\#$. Widerspruch!

Fall 1.2: $\overline{\tau}$ ist keine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$.

Also existiert eine Surjektion $f : \delta \xrightarrow{\text{auf}} \overline{\tau}$ in $\mathbf{L}$, wobei δ eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$ ist. Betrachte dann die Relation $R \subseteq \delta \times \delta$ definiert durch $\alpha \, R \, \beta :\longleftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$. Dann kodiert R den durch f gegebenen Weg durch $\overline{\tau}$ in δ Schritten. Nun ist aber $|\delta \times \delta|^{\mathbf{L}} = |\delta|^{\mathbf{L}} = \delta$, d.h. wir können R wiederum als ein $X_f \subseteq \delta$ verschlüsseln. Mit
$\overline{\beta}$ f liegt dann auch X_f in $\mathbf{L}$. Daher finden wir auch ein $\overline{\beta}$ mit $X_f \in \mathcal{P}(\delta) \cap \mathbf{J}_{\overline{\beta}+1} \setminus \mathbf{J}_{\overline{\beta}}$ und $\delta < \overline{\tau} \leq \overline{\beta}$. Nach (1.2.2) und Lemma 1.49 gilt $\mathcal{P}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}) \cap \mathbf{J}_{\overline{\beta}+1} = \mathbf{\Sigma}_\omega(\mathbf{J}_{\overline{\beta}}) = \mathbf{\Sigma}^*(\mathbf{J}_{\overline{\beta}})$. Also ist X_f schon $*$-definierbar über $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}$, so daß das letzte Projektum $\omega\varrho_{\overline{\beta}}^\omega$
$\overline{\beta}$ zumindest bis δ und daher echt unterhalb $\overline{\tau}$ fallen muß. Sei nun $\overline{\beta}$ minimal gewählt, so daß $\omega\varrho_{\overline{\beta}}^\omega < \overline{\tau}$, aber trotzdem $\omega\varrho_\xi^\omega \geq \overline{\tau}$ für $\overline{\tau} \leq \xi < \overline{\beta}$ ist. Dann erhalten wir aber aufgrund dieser Wahl von $\overline{\beta} \geq \overline{\tau}$ entweder

(4.2.8) $\quad \overline{\beta} = \overline{\tau}$ oder $\mathbf{J}_{\overline{\beta}} \models$ "$\overline{\tau}$ ist eine Kardinalzahl"

Beweis von (4.2.8): Die minimale Wahl von $\overline{\beta}$ garantiert uns, daß es in $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}$ keine Kollabierungsfunktion für $\overline{\tau}$ geben kann, denn sonst könnten wir diese als Teilmenge

[5] Die Konfinalität von σ folgt wegen $\sup \sigma\,"\,\overline{\tau} = \tau$ nach Lemma 1.32.

einer Ordinalzahl $\delta < \overline{\tau}$ kodieren, welche ein Projektum einer Stufe $\xi < \overline{\beta}$ – hierbei ist $\xi + 1$ der Index in der $\mathbf{J}$-Hierarchie, in der die Kollabierungsfunktion aufgetaucht ist – mindestens bis δ fallen ließe, d.h. wir hätten ein $\overline{\tau} < \xi < \overline{\beta}$ mit $\omega\varrho_{\xi}^{\omega} \leq \delta < \overline{\tau}$ gefunden. Das schlossen wir aber gerade aus. $\boxtimes$ (4.2.8)

Aufgrund von (4.2.5) wissen wir an dieser Stelle schon, daß $\overline{\tau}$ sehr gut in $\overline{\beta}$ liegt. Wir bilden nun die kanonische feinstrukturelle Aufwärtserweiterung von σ. Diese ist dann nach Theorem 3.9 fundiert, d.h. es existiert ein β und ein $\tilde{\sigma} \supseteq \sigma$ entsprechend β, $\tilde{\sigma}$
dem folgenden Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\overline{\beta}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0^{(n)}"'] & \mathbf{J}_{\beta} \\
\mathbf{L}_{\overline{\tau}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\text{konfinal},\Sigma_0"'] & \mathbf{L}_{\tau} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}
$$

Dabei ist $n < \omega$ derart gewählt, daß $\omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1} < \overline{\tau} \leq \omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n}$ gilt. Da der Standardparameter $p_{\overline{\beta}}$ ein sehr guter Parameter ist, existiert eine gute $\mathbf{\Sigma}_1^{(n)}(\mathbf{J}_{\overline{\beta}})$-Funktion[6] $\overline{F}$, definiert in $p_{\overline{\beta}}$, so daß $\mathbf{J}_{\overline{\beta}} = \overline{F}\,"\,\omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1}$. Setze dann $\overline{\varrho} := \omega\varrho_{\overline{\beta}}^{n+1}$ und $\varrho := \sigma(\overline{\varrho})$. Sei nun F die Funktion mit der gleichen funktional absoluten Definition über $\mathbf{J}_{\beta}$ im Parameter $p := \sigma(p_{\overline{\beta}})$ wie $\overline{F}$ über $\mathbf{J}_{\overline{\beta}}$ in $p_{\overline{\beta}}$. Wegen Lemma 1.51 erhält aber $\tilde{\sigma}$ die Funktion F, so daß wir für $\overline{\xi} \in \mathrm{dom}(\overline{F})$ auch immer $\tilde{\sigma}(\overline{\xi}) \in \mathrm{dom}(F)$ und sogar $F(\tilde{\sigma}(\overline{\xi})) = \tilde{\sigma}(\overline{F}(\overline{\xi}))$ erhalten. Somit gilt dann: $\tilde{\sigma}\,"\,\mathbf{J}_{\overline{\beta}} = \tilde{\sigma}\,"\,\overline{F}\,"\,\overline{\varrho} = F\,"\,\sigma\,"\,\overline{\varrho} \subseteq F\,"\,\varrho$, wobei die Inklusion wegen $\sup(\sigma\,"\,\overline{\varrho}) \leq \sigma(\overline{\varrho}) = \varrho$ gilt.

Setze nun $\tilde{Y} := F\,"\,\varrho$. Natürlich haben wir, daß $\tilde{Y}$ in $\mathbf{L}$ liegt, aber darüber hinaus gilt sogar $|\tilde{Y}|^{\mathbf{L}} \leq |\varrho|^{\mathbf{L}} \leq \varrho < \tau$, wobei in der echten Ungleichung $\overline{\varrho} < \overline{\tau}$ eingeht, und es gilt $X \subseteq \tilde{Y}$, denn $X \subseteq Y = \sigma\,"\,\mathbf{L}_{\overline{\tau}} \subseteq \tilde{\sigma}\,"\,\mathbf{J}_{\overline{\beta}} \subseteq F\,"\,\varrho = \tilde{Y}$. Sei nun $\tilde{\delta} := |\tilde{Y}|^{\mathbf{L}}$ und $g \in \mathbf{L}$ mit $g : \tilde{\delta} \longleftrightarrow \tilde{Y}$. Setze $\overline{X} := g^{-1}\,"\,X$. Dann ist $\overline{X} \subseteq \tilde{\delta}$ immer noch $\overline{X}$
überabzählbar, so daß wir wegen der minimalen Wahl von $\tau = \mathrm{lub}(X)$ und $\tilde{\delta} < \tau$ nun ein $\overline{Y} \in \mathbf{L}$ mit den Eigenschaften $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$, $|\overline{X}| = |\overline{Y}|$ entsprechend dem Theorem erhalten. Wenn wir nun $Z := g\,"\,\overline{Y}$ setzen, dann ist Z offenbar eine konstruktible Überdeckung von X mit $|X| = |Z|$, so daß wir einen Widerspruch zur Wahl von X als Gegenbeispiel des Theorems haben. $\boxtimes$(Fall 1)

Fall 2: $\mathrm{cf}(\tau) = \omega$.

In diesem Fall müssen wir etwas mehr arbeiten. Auch hier möchten wir die Argumente vom ersten Fall wiederholen, allerdings können wir aufgrund der Konfinalität von τ nicht unser Kriterium für die Fundiertheit der Aufwärtserweiterung anwenden; das war aber wesentlich. Stattdessen werden wir das Lemma über die häufige

[6]Eine solche Funktion erhält man, indem man etwa die iterierte SKOLEM-Funktion $\tilde{h}_{\overline{\beta}}^{n+1}(i, \langle \xi, p \rangle)$ nimmt und $\overline{F}(\prec i, \xi \succ) := \tilde{h}_{\overline{\beta}}^{n+1}(i, \langle \xi, p_{\overline{\beta}} \rangle)$ definiert.

Erweiterbarkeit nutzen. Dazu müssen wir aber erst die technischen Voraussetzungen erfüllen, d.h. insbesondere benötigen wir zur Anwendung dieses Lemmas die in die Formulierung eingehenden Objekte. Ausgangspunkt war allerdings eine Surjektion. Dazu wählen wir ein reguläres γ mit $|X| < \gamma$ und $\omega_1 < \gamma \leq \tau$, also etwa $\gamma := \max(|X|^+, \omega_2)$. Wir hätten gern eine Surjektion $g : \gamma \overset{\text{auf}}{\longrightarrow} |\tau|$ in unserem Universum; im allgemeinen können wir das nicht erwarten, daher *erzwingen* wir es. Wir bekommen eine Kollapsfunktion g, indem wir mit dem bekannten Kollaps-FORCING $\mathbf{Fn}(\gamma, |\tau|, \gamma)$ erzwingen.

Wir arbeiten ab jetzt in $\mathbf{V}[g]$, in dem γ immer noch regulär ist, weil dieses FORCING Konfinalitäten unterhalb γ aufgrund der γ-Abgeschlossenheit erhält. Außerdem ist X immer noch unüberdeckbar[7], allerdings werden wir das nicht ausnutzen müssen, da unser Widerspruch sich direkt auf das konstruktible Universum beziehen wird, welches bekanntlich zwischen solchen Modellen absolut ist. Wegen $|\mathbf{L}_\tau| = |\tau|$ finden wir nun leicht ein $f : \gamma \overset{\text{auf}}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau$. Wir definieren $X_\alpha, \mathbf{L}_{\tau_\alpha}, \mathcal{C}, \mathcal{D}_0, \sigma_\alpha, \sigma_{\alpha,\beta}$ entsprechend dem Lemma über die häufige Erweiterbarkeit 3.10:

- $X_\alpha := f\,\text{"}\,\alpha$ für $\alpha < \gamma$.
- $\mathcal{C} := \{\alpha < \gamma \mid X_\alpha \prec \mathbf{L}_\tau \ \wedge\ X_\alpha \cap \gamma = \alpha \ \wedge\ \sup(X_\alpha \cap \mathrm{On}) = \tau \ \wedge\ \gamma \in X_\alpha\}$.
- $\sigma_\alpha : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X_\alpha$ für $\alpha \in \mathcal{C} \cup \{\gamma\}$.
- $\sigma_{\alpha\beta} := \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \underset{\mathbf{\Sigma}_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_{\tau_\beta}$ für $\alpha < \beta$.
- $\mathcal{D}_0 := \{\alpha \in \mathcal{C} \mid \mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega_1\}$.

Da $|X| < \gamma$ und γ regulär ist, liegt X beschränkt in der Vereinigung $\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathrm{rng}(\sigma_\alpha)$, d.h. existiert ein $\alpha_0 < \gamma$ mit $X \subsetneq \mathrm{rng}(\sigma_{\alpha_0})$. Wir unterscheiden nun auch hier
$\mathcal{D}_1$ wieder zwei Fälle. Definiere dafür $\mathcal{D}_1 := \{\alpha < \gamma \mid \tau_\alpha$ ist eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}\}$ und
$\mathcal{D}_2$ $\mathcal{D}_2 := \gamma \setminus \mathcal{D}_1$.

Fall 2.1: $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ ist stationär in γ.

Wir wollen jetzt das Lemma über die häufige Erweiterbarkeit anwenden. Dazu setzen wir $\mathcal{S} := \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ und für $\alpha \in \mathcal{S}$ sei $\mu_\alpha := \infty$. Wir bilden für jedes $\alpha \in \mathcal{S}$ die Aufwärtserweiterung von σ_α und erhalten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}_\alpha", "\text{konfinal}, \mathbf{\Sigma}_0"'] & \mathfrak{A}_\alpha \\
\mathbf{L}_{\tau_\alpha} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma_\alpha", "\text{konfinal}, \mathbf{\Sigma}_0"'] & X_\alpha \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

[7]Das FORCING fügt aufgrund seiner γ-Abgeschlossenheit keine Folgen der Größe kleiner γ hinzu.

Dann garantiert uns das oben angesprochene Lemma eine in γ stationäre Teilmenge von $\mathcal{S}$, deren Elemente nur fundierte Pseudo-Ultraprodukte indizieren; insbesondere existiert *ein* $\alpha \in \mathcal{S}$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ fundiert ist. Natürlich ist $\in_\alpha := \in_{\mathfrak{A}_\alpha}$ auch mengenähnlich – betrachten wir dazu

$$\begin{aligned} \in_\alpha'' \{[\overline{\xi}, \overline{f}]\} &= \{[\xi, f] \mid [\xi, f] \in_\alpha [\overline{\xi}, \overline{f}]\} \\ &= \{[\xi, f] \mid \langle \xi, \overline{\xi} \rangle \in \sigma_\alpha(\{\langle \eta, \overline{\eta} \rangle \mid f(\eta) \in \overline{f}(\overline{\eta})\})\} \end{aligned}$$

Da mit $\overline{f} \in \mathbf{L}$ auch $\operatorname{rng}(f)$ eine Menge ist, gibt es nur mengenviele Funktionen f, die in der obigen Menge vorkommen, mit $\operatorname{rng}(f) \subseteq \operatorname{rng}(\overline{f})$ und $\operatorname{dom}(f) \in \mathbf{L}_{\tau_\alpha}$, erneut einer Menge. Nach dem MOSTOWSKI-Isomorphiesatz ist der Kollaps von $\mathfrak{A}_\alpha$ nun wohldefiniert, so daß dieser nach dem Kondensationslemma $\mathbf{L}$-Struktur hat. Nun wird aber $\mathbf{L}$ durch $\tilde{\sigma}_\alpha$ eingebettet, so daß der Kollaps nur ganz $\mathbf{L}$ sein kann; aber $\tilde{\sigma}_\alpha$ ist außerdem konfinal und Σ_0-erhaltend, also sogar Σ_1-erhaltend. Damit haben wir eine nicht-triviale Σ_1-erhaltende Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$. Nach Definition 1.76 bedeutet das gerade, daß $0^\#$ existiert. Widerspruch!

Fall 2.2: Fall 2.1 versagt, d.h. $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1$ ist nicht stationär in γ.

Wegen des Schubfachprinzips ist dann mit $\mathcal{D}_0$ auch $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_2$ stationär in γ. Setze also $\mathcal{S} := \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_2 \setminus \alpha_0$. Für $\alpha \in \mathcal{S}$ sei μ_α minimal[8] mit $\omega\varrho_{\mu_\alpha}^\omega < \tau_\alpha$. Natürlich haben wir $\mu_\alpha \geq \tau_\alpha$ und auch, daß τ_α nach Wahl von μ_α eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ ist, so daß wir nun die feinstrukturelle Aufwärtserweiterung von σ_α bilden können.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}_\alpha"] & \mathfrak{A}_\alpha \\ \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma_\alpha"'] & X_\alpha \arrow[u, dotted, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

Dann garantiert uns das Lemma über die häufige feinstrukturelle Erweiterbarkeit die Existenz eines $\alpha \in \mathcal{S}$, für das $\mathfrak{A}_\alpha$ fundiert ist. Sei also $\mathfrak{A}_\alpha = \mathbf{J}_{\tilde{\mu}}$, dann wissen wir, daß $\tilde{\sigma}_\alpha$ nach Konstruktion $\Sigma_0^{(n)}$-erhaltend ist, wobei $n < \omega$ derart, daß $\omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1} < \tau_\alpha \leq \omega\varrho_{\mu_\alpha}^n$. Wir werden jetzt ganz direkt eine Überdeckung Y von X mit Hilfe feinstruktureller Mittel angeben können, die eventuell noch nicht klein genug ist, uns aber trotzdem wie im Fall 1 zum Widerspruch führen wird. Aus der Feinstruktur[9] für $\mathbf{L}$ wissen wir, daß die Gleichung

(4.2.9) $$\mathbf{J}_{\mu_\alpha} = \tilde{h}_{\mu_\alpha}^{n+1}(\omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1} \times \{p_{\mu_\alpha}\})$$

gilt, wobei p_{μ_α} der Standardparameter von $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$ und $\tilde{h}_{\mu_\alpha}^{n+1}$ die iterierte SKOLEM-Funktion ist. Jetzt kommt die entscheidene Definition für diesen Teil des Beweises; setze $Y := \tilde{h}_{\tilde{\mu}}^{n+1}(\ \tilde{\sigma}_\alpha(\omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1}) \times \{\tilde{\sigma}_\alpha(p_{\mu_\alpha})\}\ )$. Dann ist dieses Y natürlich insbe- Y

[8] Wir hatten schon im Fall 1.2 diskutiert, daß das Projektum unterhalb τ_α fallen muß, wenn τ_α in $\mathbf{L}$ keine Kardinalzahl ist.

[9] Vergleiche Definition 1.59 und Lemma 1.60.

sondere eine konstruktible Menge, die sogar X enthält, denn wegen $\alpha_0 < \alpha$ gilt $X \subseteq \mathrm{rng}(\sigma_{\alpha_0}) \subseteq \mathrm{rng}(\tilde{\sigma}_\alpha) \subseteq Y$, wobei die letzte Inklusion aus der Definition von Y folgt: Sei dazu $y \in \mathrm{rng}(\tilde{\sigma}_\alpha)$ gegeben. Wir zeigen $y \in Y$. Sei also etwa $y = \tilde{\sigma}_\alpha(x)$ für ein $x \in \mathbf{J}_{\mu_\alpha}$. Nach (4.2.9) ist $x = \tilde{h}^{n+1}_{\mu_\alpha}(i, \langle \beta, p_{\mu_\alpha} \rangle)$ für eine natürliche Zahl i und ein $\beta < \omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1}$. Mittels einer funktional absoluten Definition[10] von $\tilde{h}^{n+1}_{\mu_\alpha}$ können wir darauf $\tilde{\sigma}_\alpha$ anwenden, d.h. wir bekommen aufgrund der Erhaltungsstärke von $\tilde{\sigma}_\alpha$ sofort $y = \tilde{\sigma}_\alpha(x) = \tilde{h}^{n+1}_{\tilde{\mu}}(i, \langle\, \tilde{\sigma}_\alpha(\beta), \tilde{\sigma}_\alpha(p_{\mu_\alpha})\,\rangle)$, so daß schließlich y in Y liegen muß. Hierbei geht wegen der uniformen Definierbarkeit $\tilde{h}^{n+1}_{\mu_\alpha}$ bei Anwendung der Abbildung $\tilde{\sigma}_\alpha$ in $\tilde{h}^{n+1}_{\tilde{\mu}}$ über.

Damit haben wir eine Überdeckung von X in $\mathbf{L}$ gefunden, die allerdings noch zu groß in ihrer Mächtigkeit sein kann. Allerdings gilt auch hier wieder $|Y|^{\mathbf{L}} < \tau$, denn erneut gilt $|Y| \leq |\tilde{\sigma}(\omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1})| < |\tau| \leq \tau$, wobei die zweite Ungleichung aufgrund von $\omega\varrho_{\mu_\alpha}^{n+1} < \overline{\tau}$ gilt. Dann folgt der Widerspruch wie im Fall 2.1 aufgrund der minimalen Wahl von τ wie folgt: Setze wieder $\delta := |Y|^{\mathbf{L}}$ und $g \in \mathbf{L}$ mit $g : \delta \longleftrightarrow Y$. Setze dann $\overline{X} := g^{-1}\,"\, X$, so daß $\overline{X} \subseteq \delta$ dann immer noch überabzählbar ist. Wegen der minimalen Wahl von $\tau = \mathrm{lub}(X)$ und $\delta < \tau$ existiert nun aber ein $\overline{Y} \in \mathbf{L}$ mit den Eigenschaften entsprechend dem Theorem: $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$, $|\overline{X}| = |\overline{Y}|$. Wenn wir nun $Z := g\,"\,\overline{Y}$ setzen, dann ist Z erneut eine konstruktible Überdeckung von X mit $|X| = |Z|$. Also haben wir wieder einen Widerspruch zur Wahl von X als Gegenbeispiel des Theorems, so daß damit auch der zweite Fall nicht eintreten kann. ⊠(Fall 2)

Somit haben wir alle möglichen Fälle diskutiert und jeweils zum Widerspruch geführt, so daß unsere Annahme falsch gewesen sein muß. Damit ist der Beweis des Überdeckungslemmas vollständig. ⊠(Theorem 4.8)

[10] Vergleiche Definition 1.56.

Kapitel 5

Stationarität auf $[X]^{<\gamma}$

Wir haben die erste Version des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit in Theorem 3.10 mit einem erheblichen Aufwand an Objekten überhaupt erst formulieren können. Das fiel besonders in der Anwendung im Beweis des Überdeckungslemmas auf; dort sind wir, um diese Formulierung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit nutzen zu können, in eine generische Erweiterung des Universums übergegangen, damit wir eine zusätzliche Surjektion bekamen. Dennoch spielt die eigentliche Surjektion nur eine untergeordnete Rolle; mit ihrer Hilfe bekamen wir geeignete elementare Submodelle, die wir durch Ordinalzahlen aufzählen konnten, so daß wir die Begriffe – wie etwa die eingehende Stationarität – auf Teilmengen von Ordinalzahlen nutzen konnten. Das ist aber nicht notwendig.

Die Grundidee dieses Lemmas ist die Garantie, daß wir *häufig* ein fundiertes Pseudo-Ultraprodukt finden, wenn wir von *vielen* kanonischen Erweiterungen ausgehen. Die naheliegenste Interpretation dieser Begriffe von "Größe", nämlich im Zusammenhang mit Ordinalzahlen, half uns in der ersten Version, das Theorem zu beweisen. Diese Idee können wir versuchen, derart zu verallgemeinern, so daß wir eine solche Surjektion nicht mehr benötigen. Der nachfolgende Grundgedanke läßt sich daher darin beschreiben, daß wir jetzt die Aussage des Lemmas nicht mit Begriffen über Ordinalzahlen, sondern gleich über den Submodellen formulieren werden. Dazu betrachten wir Verallgemeinerungen des Begriffs der Stationarität, allerdings jetzt auf kleinen Teilmengen einer Menge. Der Begriff ist nicht neu, ist er doch ein sehr nützliches Hilfsmittel in der kombinatorischen Mengenlehre. Wir werden allerdings diesen Begriff im ersten Abschnitt zunächst ein wenig allgemeiner einführen und uns jeweils einfache Eigenschaften überlegen, die insbesondere auch die Aufgabe haben, den Namen *Stationarität* als Verallgemeinerung eines wohlbekannten Begriffs über den Ordinalzahlen zu rechtfertigen, da man einige Eigenschaften mit diesem Begriff verbinden möchte – wie beispielsweise den Satz von FODOR.

Im zweiten Abschnitt führen wir kurz einen Zusammenhang zu Großen Kardinalzahlen aus, um das Gefühl bezüglich dieses Begriffes zu festigen. Im folgenden sechsten Kapitel werden wir dann mit diesen Begriffen neue Varianten des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit diskutieren.

5.1 Stationaritätsbegriffe

Sei im folgenden Abschnitt γ eine überabzählbare Kardinalzahl und X eine beliebige Menge mit $|X \cap \gamma| = \gamma$. Die technische Bedingung an X wird uns einige Beweise erleichtern. Ab Lemma 5.18 werden wir zusätzlich voraussetzen, daß γ regulär ist. Wir werden jetzt versuchen, Stationarität von Teilmengen von Ordinalzahlen geeignet zu verallgemeinern. Den ersten Begriff findet man in der Literatur meist mit einer anderen aber in vielen Fällen der Anwendung äquivalenten Definition. Die hier vorgestellte Variante wurde von WOODIN im Zusammenhang mit seinem sogenannten STATIONARY TOWER FORCING[1] betrachtet. Den anderen Zugang werden wir im zweiten Teil dieses Abschnitts näher beleuchten, zumindest in der für uns interessanten, zusätzlich etwas relativierten Form. Im letzten Teil geht es dann darum, diesen Begriff noch einmal grundsätzlich zu verstärken, indem man für den zugrunde liegenden "club"-Begriff nur überabzählbar abgeschlossene Mengen betrachtet.

Stationarität durch Algebren

Definition 5.1 *$\mathcal{S} \subseteq [X]^{<\gamma}$ heißt stationär in $[X]^{<\gamma}$, wenn für jede Algebra $\mathfrak{A} = \langle X, f_i(i<\omega)\rangle$ auf X ein nicht-leeres $Y \in \mathcal{S}$ existiert, welches unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Dabei sind die f_i partielle Funktionen auf $(X)^{<\omega}$, die in X abbilden.*

Der Spezialfall $\gamma > |X|$ ist natürlich enthalten; in diesem Fall gilt dann gerade $[X]^{<\gamma} = \mathcal{P}(X)$. Im Zusammenhang mit den Ordinalzahlen wird der Begriff dort üblicherweise mit Hilfe von club Mengen definiert. An dieser Stelle ist es nicht ganz üblich, einen solchen Begriff zusätzlich einzuführen, da dieser in der aus der Definition suggerierten Formulierung nicht die erwünschten Eigenschaften erfüllt, die man sich von ihm erhoffen würde; darüber hinaus interessiert bei dieser Verallgemeinerung letztendlich der Stationaritätsbegriff, der – wie wir gleich sehen werden – die von einem solchen Begriff erhofften Bedingungen erfüllt.

Um der obigen Definition gerecht zu werden, definiert man, daß eine Menge $\mathcal{C} \subseteq [X]^{<\gamma}$ in $[X]^{<\gamma}$ *club* liegt, falls es eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\mathcal{C} = \{u \,|\, u \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-abgeschlossen}\}$ gibt. Trotz fehlender Abschlußeigenschaften[2] ist beispielsweise offenbar der Durchschnitt einer solchen club Menge mit einer stationären Menge immer noch stationär, da wir die Funktionen aus der $\mathcal{C}$ definierenden Algebra immer zu einer gegebenen

[1] Vergleiche [Wo88].

[2] So ist dieser Begriff nicht ganz so stabil gegenüber (überabzählbaren) Durchschnitten, wie man es vom Originalbegriff her kennt.

Algebra hinzunehmen können, um wieder eine Algebra zu erhalten, auf der wir die Stationarität der Ausgangsmenge ausnutzen können. Ein unter dieser Algebra abgeschlossenes Element ist gleichzeitig auch aus der club Menge und somit Element des Durchschnittes. Wir können in diesem Zusammenhang auch noch einen anderen Begriff von club Mengen betrachten, der in vielen Fällen zum gleichen Begriff der Stationarität führt; diesen werden wir im zweiten Teil dieses Abschnitts in einer etwas allgemeineren Form näher betrachten. Doch zunächst soll es darum gehen, in den folgenden Lemmata diese Verallgemeinerung eines wohl-bekannten Begriffs zu rechtfertigen, denn wir werden markante Eigenschaften wiederfinden. So ist auch dieser eine Interpretation der Eigenschaft, *groß* zu sein[3], d.h. die folgenden Eigenschaften sind erfüllt:

(5.1.1)
- $[X]^{<\gamma}$ liegt stationär in $[X]^{<\gamma}$.
- $\varnothing$ liegt nicht stationär in $[X]^{<\gamma}$.
- Liegt $\mathcal{S}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$, so auch jedes $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{S}$.
- Ist $\mathcal{S} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ stationär in $[X]^{<\gamma}$, so auch $\mathcal{T}_1$ oder $\mathcal{T}_2$.

Die ersten drei Eigenschaften sind offenbar erfüllt. Die vierte werden wir sogar in Lemma 5.3 in einer stärkeren Form nachweisen. Darüber hinaus bekommen wir eine entscheidende Eigenschaft, die wir von einer Verallgemeinerung eines solchen Begriffs erwarten, nämlich eine Variante des Satzes von FODOR:

Lemma 5.2 (Satz von FODOR) *Sei $\mathcal{S} \subseteq [X]^{<\gamma}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ und $f : \mathcal{S} \longrightarrow X$ regressiv, d.h. $f(Y) \in Y$ für $Y \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$. Dann existiert ein $x \in X$, so daß $\mathcal{S}_x \subseteq [X]^{<\gamma}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ ist, wobei $\mathcal{S}_x := \{Y \in \mathcal{S} \mid f(Y) = x\}$.*

Beweis: Wir imitieren den ursprünglichen Beweis. Angenommen, es gelte nicht; dann existiert eine Algebra $\mathfrak{A}_x = \langle X, f_i^{(x)}(i < \omega)\rangle$ für jedes $x \in X$, so daß jedes $Y \in \mathcal{S}_x$ nicht $\mathfrak{A}_x$-abgeschlossen ist. Wir werden nun eine Algebra $\mathfrak{A}^*$ auf X definieren, die dann bezeugen wird, daß schon $\mathcal{S}$ nicht stationär gewesen sein kann. Setze daher $\mathfrak{A}^* := \langle X, f_i^{(*)}(i < \omega)\rangle$, wobei die $f_i^{(*)}$ durch $f_i^{(*)}(x, \overline{x}) \simeq f_i^{(x)}(\overline{x})$ definiert sind. Dann ist offenbar ein $\mathfrak{A}^*$-abgeschlossenes $Y \in [X]^{<\gamma}$ insbesondere für jedes $x \in Y$ auch $\mathfrak{A}_x$-abgeschlossen. Nun ist aber $\mathcal{S}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$, so daß ein $Y \in \mathcal{S}$ existiert, das $\mathfrak{A}^{(*)}$-abgeschlossen ist. Dann ist Y insbesondere auch $\mathfrak{A}_{f(Y)}$-abgeschlossen, weil f regressiv ist. Andererseits gilt natürlich nach Definition $Y \in \mathcal{S}_{f(Y)}$. Widerspruch zur Wahl von $\mathfrak{A}_{f(Y)}$! ⊠(Lemma 5.2)

Lemma 5.3 (Schubfachprinzip) *Sei $\mathcal{S} \subseteq [X]^{<\gamma}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ und $\mathcal{S} = \bigcup_{j<\omega} \mathcal{S}_j$. Dann existiert ein $j < \omega$, so daß $\mathcal{S}_j \subseteq [X]^{<\gamma}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ ist.*

[3] Interpretiere “Y ist groß” als “Y liegt stationär in $[X]^{<\gamma}$”.

Beweis: Angenommen, es existiert für jedes $j < \omega$ eine geeignete Algebra $\mathfrak{A}_j = \langle X, f_i^{(j)}(i < \omega)\rangle$ auf X, so daß jedes $Y \in \mathcal{S}_j$ nicht $\mathfrak{A}_j$-abgeschlossen ist. Definiere dann für $k = \prec i, j \succ$ durch $f_k^{(*)}(\overline{x}) \simeq f_i^{(j)}(\overline{x})$ eine partielle Funktion, d.h. wir zählen alle $f_i^{(j)}$ durch ein beliebiges Diagonalverfahren – wie etwa hier durch Gödelpaare – auf. Da nun aber $\mathcal{S}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ liegt, existiert ein $Y^* \in \mathcal{S}$, welches $\mathfrak{A}^* := \langle X, f_{\prec i,j\succ} \mid i, j < \omega\rangle$-abgeschlossen ist. Sei nun $Y^* \in \mathcal{S}_{j_0}$ für ein $j_0 < \omega$. Nach Konstruktion ist dann Y^* aber insbesondere auch $\mathfrak{A}_{j_0}$-abgeschlossen. Widerspruch!

$\boxtimes$(Lemma 5.3)

Lemma 5.4 (Einschränkung) *Sei $\mathcal{S} \subseteq [X]^{<\gamma}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ und $\overline{X} \subseteq X$. Dann ist auch $\mathcal{S}{\restriction}\overline{X} := \{Y \cap \overline{X} \mid Y \in \mathcal{S}\}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$.*

Beweis: Nehmen wir wieder das Gegenteil an. Sei dazu $\overline{\mathfrak{A}} = \langle \overline{X}, \overline{f}_i(i < \omega)\rangle$ eine Algebra auf $\overline{X}$, so daß jedes $\overline{Y} \in S{\restriction}\overline{X}$ nicht $\overline{\mathfrak{A}}$-abgeschlossen ist. Wir definieren $f_i(\overline{x}) \simeq \overline{f}_i(\overline{x})$ für $\overline{x} \in \overline{X}$. Nun ist $\mathcal{S}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$; sei also ein unter der Algebra $\mathfrak{A}$ abgeschlossenes $Y \in \mathcal{S}$ beliebig gewählt. Betrachte dann die Einschränkung $\overline{Y} := Y \cap \overline{X}$. Da $\overline{f}_i : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$, gilt insbesondere $\overline{f}_i(\overline{y}) \in Y \cap \overline{X} = \overline{Y}$ für alle $\overline{y} \in \overline{Y} \subseteq \overline{X}$. Also ist $\overline{Y}$ unter der Algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen, aber offensichtlich ist $\overline{Y} \in \mathcal{S}{\restriction}\overline{X}$. Widerspruch! $\boxtimes$(Lemma 5.4)

Lemma 5.5 (Erweiterung) *Seien $\overline{\mathcal{S}} \subseteq [\overline{X}]^{<\gamma}$ stationär in $[\overline{X}]^{<\gamma}$ und $\overline{X} \subseteq X$ gegeben. Dann ist auch $\mathcal{S} := \{Y \in [X]^{<\gamma} \mid Y \cap \overline{X} \in \overline{\mathcal{S}}\}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$.*

Beweis: Sonst existierte eine Algebra $\mathfrak{A} = \langle X, f_i\ (i < \omega)\rangle$, so daß kein $Y \in \mathcal{S}$ unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist. Betrachten wir dann die Einschränkungen von $\mathfrak{A}$ auf $\overline{X}$; setze $\overline{\mathfrak{A}} := \langle \overline{X}, \overline{f}_i\ (i < \omega)\rangle$, wobei[4] $\overline{f}_i := f_i \cap (\ \overline{X} \times (\overline{X})^{<\omega}\ )$. Nun existiert nach Voraussetzung aber ein $\overline{Y} \in \overline{\mathcal{S}}$, welches $\overline{\mathfrak{A}}$-abgeschlossen ist. Dann ist $\overline{Y}$ auch $\mathfrak{A}$-abgeschlossen und wegen $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$ haben wir auch $\overline{Y} \in \mathcal{S}$. Widerspruch!

$\boxtimes$(Lemma 5.5)

Lemma 5.6 (Projektion) *Sei $\mathcal{S}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$ und $x \in X$ gegeben. Dann liegt auch die Menge $\{Y \in \mathcal{S} \mid x \in Y\}$ stationär in $[X]^{<\gamma}$.*

Beweis: Für eine Algebra $\mathfrak{A} = \langle X, f_i\ (i < \omega)\rangle$ betrachte man die um die durch x gegebene konstante Funktion erweiterte Algebra $\langle X, \mathrm{const}_x, f_i\ (i < \omega)\rangle$ und nutze die Stationarität von $\mathcal{S}$ aus. $\boxtimes$(Lemma 5.6)

Wir wollen uns als nächstes einen Zusammenhang zwischen der Stationarität in γ und der Stationarität in $[\gamma]^{<\gamma}$ überlegen.

Bemerkung 5.7 *Wenn $\gamma > \omega$ regulär ist, dann ist $\gamma \subseteq [\gamma]^{<\gamma} \subseteq \mathcal{P}(\gamma)$ stationär sowohl in $[\gamma]^{<\gamma}$ als auch in $\mathcal{P}(\gamma)$.*

[4] Wir schränken f_i als Relation auf $\overline{X}$ ein.

Das sieht man sehr leicht, wenn man für eine gegebene Algebra $\mathfrak{A} = \langle \gamma, f_i \ (i < \omega) \rangle$ eine Folge $\langle \alpha_j \mid j < \omega \rangle$ wie folgt konstruiert: Wähle ein $\alpha_0 \in \gamma$ beliebig. Setze dann $\alpha_{j+1} := \sup_{i<\omega} \operatorname{lub}_{\beta<\alpha_j} f_i(\beta)$. Aufgrund der beiden Voraussetzungen an γ sind alle $\alpha_j < \gamma$. Also ist $\alpha := \sup_{j<\omega} \alpha_j \in \gamma$ unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossen.

Die Regularität von γ war hier wirklich notwendig, wie das folgende Beispiel zeigen wird. Betrachte dazu $\gamma := \aleph_{\omega_1}$ und eine Funktion f gegeben durch

$$f(\alpha) = \begin{cases} \aleph_{1+\alpha} & : \quad \text{falls } \alpha < \omega_1, \\ 0 & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze nun $\mathfrak{A} := \langle \gamma, f \rangle$. Dann existiert kein $0 \neq \alpha < \gamma$, das $\mathfrak{A}$-abgeschlossen ist, denn wenn $\alpha \neq \varnothing$, dann gilt sofort $\aleph_1 \subseteq \alpha$, also sind auch alle $\aleph_\beta$ für $\beta < \omega_1$ in α nach Wahl von f.

Wir können sogar das folgende zeigen.

Lemma 5.8 *Sei $\gamma > \omega$ regulär. Dann ist $\mathcal{S} \subseteq \gamma$ genau dann stationär in γ, wenn $\mathcal{S}$ stationär in $[\gamma]^{<\gamma}$ (bzw. in $\mathcal{P}(\gamma)$) ist.*

Beweis: Für $(\rightarrow)$ beachte man, daß die Menge $\{\alpha < \gamma \mid \alpha \text{ ist } \mathfrak{A}\text{-abgeschlossen}\}$ club in γ ist, wobei die Unbeschränktheit nach dem gleichen Argument mittels der Konstruktion einer geeigneten Folge $\langle \alpha_i | i < \omega \rangle$ wie oben im Zusammenhang mit der Bemerkung folgt. Wir beweisen $(\leftarrow)$. Sei dazu $\mathcal{S} \subseteq [\gamma]^{<\gamma}$ stationär in $[\gamma]^{<\gamma}$ gegeben. Sei $\mathcal{C} \subseteq \gamma$ eine beliebige club Menge in γ und betrachte die Algebra $\mathfrak{A} := \langle \gamma, f \rangle$ auf γ, wobei f durch $f(\alpha) := \min\{\tilde{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \alpha \leq \tilde{\alpha}\}$ für $\alpha < \gamma$ definiert sei. Da $\mathcal{C}$ in γ insbesondere unbeschränkt liegt, ist auch $f : \gamma \longrightarrow \gamma$ wohldefiniert. Sei also $\beta \in \mathcal{S}$ abgeschlossen unter $\mathfrak{A}$. Dann ist β nach Wahl von f auch ein Limespunkt von $\mathcal{C}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}$ liegt β dann aber in $\mathcal{C}$, d.h. wir haben wie gewünscht $\mathcal{C} \cap \mathcal{S} \neq \varnothing$. ⊠(Lemma 5.8)

Als letzte Eigenschaft geben wir noch eine einfache Charakterisierung dieses neuen Begriffs mit Hilfe der Existenz elementarer Substrukturen an.

Lemma 5.9 *Eine Menge $\mathcal{S}$ liegt genau dann stationär in $[X]^{<\gamma}$, wenn für jede abzählbare Sprache $\mathcal{L}$ erster Ordnung und für jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ein $Y \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$ mit $\mathfrak{A} \restriction Y \prec \mathfrak{A}$ existiert.*

Beweis: Für die Richtung von links nach rechts nehme man sich eine Algebra bestehend aus Skolem-Funktionen für ein gegebenes $\mathfrak{A}$. Aufgrund der Größenbeschränkung der Sprache sind das nur abzählbar viele. Die Behauptung folgt dann sofort mit der Stationarität von $\mathcal{S}$. Für die andere Richtung definiere man zu einer gegebenen Algebra mit Funktionen f_i eine Sprache $\mathcal{L}$, die aus abzählbar vielen

Funktionszeichen $\dot{f}_i$ besteht. Nun wird aber die gegebene Algebra $\mathfrak{A}$ durch die Interpretation von $\dot{f}_i$ durch f_i zu einer $\mathcal{L}$-Struktur. Eine nach Voraussetzung existierende elementare Substruktur aus S ist natürlich insbesondere unter den Funktionen f_i der Algebra abgeschlossen. ⊠(Lemma 5.9)

Stationarität durch einen zweiten naheliegenden "club"-Begriff

Wie oben schon angedeutet, werden wir in diesem Abschnitt noch einen zusätzlichen Begriff von club Mengen betrachten, damit wir in der späteren Verallgemeinerung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit eine zusätzliche Möglichkeit haben, bestimmte stationäre Mengen zu schneiden. Dieser Begriff wurde bereits mehrfach[5] in der ursprünglichen Form in der Literatur betrachtet und ist aus der Sicht der Definition eher die natürliche Verallgemeinerung des gleichnamigen Begriffs über Ordinalzahlen. Im Hinblick auf unsere Anwendungen werden wir diesen Begriff allerdings zusätzlich noch bezüglich einer vorgegebenen Menge relativieren; sei dazu $\mathcal{D} \subseteq [X]^{<\gamma}$ gegeben. Darüber hinaus bezeichnen wir diesen Begriff mit "schwach club" anstatt mit "club". In der Literatur wird dieser Begriff natürlich ohne dieses zusätzliche Adverb gehandelt, aber da wir beide Begriffe parallel verwenden möchten, bietet sich eine solche Trennung an, wobei sich der Sinn des Attributs mit Korollar 5.17 noch rechtfertigen wird.

Definition 5.10 *Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq [X]^{<\gamma}$ heißt $\mathcal{D}$-unbeschränkt in $[X]^{<\gamma}$, wenn für jedes $u \in [X]^{<\gamma}$ ein $v \in \mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ mit $u \subseteq v$ existiert.*

Den normalen Unbeschränktheitsbegriff erhalten wir offenbar für $\mathcal{D} = [X]^{<\gamma}$; im anderen Fall fordern wir jetzt aber zusätzlich, daß es eine solche Obermenge v in $\mathcal{D}$ gibt. Somit ist $\mathcal{T}$ offenbar genau dann $\mathcal{D}$-unbeschränkt, wenn $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ im üblichen Sinn unbeschränkt, d.h. $[X]^{<\gamma}$-unbeschränkt, ist. An dieser Stelle möchten wir bemerken, daß wir eigentlich nicht von *unbeschränkten*, sondern eher von *konfinalen* Mengen sprechen sollten, da diese in die Definition eingehende Bedingung genau der zweiten Eigenschaft entspricht. Da wir aber hier den wohlbekannten Begriff über Ordinalzahlen verallgemeinern, bleiben wir aus historischen Gesichtspunkten bei dieser Bezeichnung, obwohl es formal in der partiellen Ordnung der Teilmengenbeziehung durchaus Unterschiede macht.

Definition 5.11 *Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq [X]^{<\gamma}$ heißt $\mathcal{D}$-*kettenabgeschlossen*, falls für jede Kette $\langle u_i \mid i < \delta \rangle$ einer Länge $\delta < \mathrm{cf}(\gamma)$ mit $u_i \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ für alle $i < \delta$ immer $\bigcup\{u_i \mid i < \delta\} \in \mathcal{T}$ gilt.*

Im Gegensatz zur normalen Abgeschlossenheit gegenüber Ketten betrachten wir bei diesem Begriff nur Ketten, die zusätzlich in $\mathcal{D}$ liegen. Wir möchten an dieser Stelle explizit darauf hinweisen, daß wir bei dieser Abgeschlossenheitseigenschaft

[5] Vergleiche [Jec71], [Jec73] und [Ka94].

nicht fordern, daß die Vereinigung einer solchen $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$-Kette auch Element von $\mathcal{D}$ ist. Der in der Literatur angegebene Begriff für $\mathcal{D} := [X]^{<\gamma}$ wurde ursprünglich von JECH in einer anderen Formulierung angegeben, die sich aber als äquivalent herausstellte, wie das nächste Lemma zeigen wird; in manchen Beweisen stellt sich diese Äquivalenz als sehr nützlich heraus.

Definition 5.12 *Eine Familie $\mathcal{U} \subseteq [X]^{<\gamma}$ heißt $\subseteq$-gerichtet, wenn für je zwei u und v aus $\mathcal{U}$ ein $z \in \mathcal{U}$ mit $u \cup v \subseteq z$ existiert.*

Lemma 5.13 *Eine Menge $\mathcal{C}$ ist genau dann $[X]^{<\gamma}$-kettenabgeschlossen, wenn für jedes $\subseteq$-gerichtete $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}$ mit $|\mathcal{U}| < \gamma$ immer $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{C}$ gilt.*

Beweis: Die (nicht-triviale) zu beweisende Richtung ist die von links nach rechts und läßt sich mittels Induktion über $|\mathcal{U}|$ zeigen. Nehmen wir dazu an, daß für ein $\mathcal{U}$ mit $|\mathcal{U}| < \gamma$ jedes kleinere System $\overline{\mathcal{U}} \subsetneq \mathcal{U}$ mit $|\overline{\mathcal{U}}| < |\mathcal{U}|$ die Behauptung erfüllt, dann können wir $\mathcal{U}$ etwa durch $\{u_i \mid i < |\mathcal{U}|\}$ aufzählen und rekursiv Mengen $\mathcal{U}_i$ wie folgt definieren. Sei dafür $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{C}$ eine $\subseteq$-gerichtete Obermenge von $\{u_i\} \cup \bigcup_{j<i} \mathcal{U}_j$, die minimal in ihrer Mächtigkeit gewählt ist. Dann ist für endliche i auch $\mathcal{U}_i$ endlich; sonst ist $|\mathcal{U}_i| = |i|$. Wir definieren nun eine Kette $v_i := \bigcup \mathcal{U}_i$, deren Elemente nach Induktionsvoraussetzung alle in $\mathcal{C}$ liegen, so daß wir schließlich wegen der Kettenabgeschlossenheit von $\mathcal{C}$ wie gewünscht $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \{v_i \mid i < |\mathcal{U}|\} \in \mathcal{C}$ erhalten.

⊠(Lemma 5.13)

Schließlich können wir den zentralen Begriff definieren.

Definition 5.14 *Eine Menge heißt schwach $\mathcal{D}$-club, wenn sie $\mathcal{D}$-unbeschränkt und $\mathcal{D}$-kettenabgeschlossen ist. Wir nennen eine Menge schwach club, wenn sie schwach $[X]^{<\gamma}$-club ist.*

Da wir noch sehen werden, daß wir ganz allgemein die beiden Begriffe auseinander halten müssen, definieren wir nun noch wie folgt den noch fehlenden Begriff.

Definition 5.15 *Eine Teilmenge von $[X]^{<\gamma}$ heißt $\mathcal{D}$-stationär, wenn sie beliebige schwach $\mathcal{D}$-club Mengen schneidet.*

Wir erhalten sofort das folgende

Lemma 5.16 *Ist $\mathcal{S}$ eine $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge, so auch $\mathcal{S}' := \{v \in \mathcal{S} \mid u \subseteq v\}$ für beliebiges $u \in [X]^{<\gamma}$.*

Beweis: Setze $\mathcal{T} := \{v \in [X]^{<\gamma} \mid u \subseteq v\}$; dann ist $\mathcal{T}$ offenbar schwach club. Also ist auch für eine beliebige zweite schwach club Menge $\mathcal{C}$ der Schnitt beider Mengen schwach club, so daß $\mathcal{C} \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}'$ nicht leer ist. ⊠(Lemma 5.16)

Welche Beziehungen lassen sich aber nun zwischen diesen beiden Begriffen von club Mengen im Hinblick auf die beiden Stationaritätsbegriffe ableiten? In der Bemerkung 5.21 werden unsere Ergebnisse schließlich zusammengefaßt. Wir können die leichte Richtung der Implikation zwischen den beiden neuen Begriffen sofort ableiten.

Lemma 5.17 *Club Mengen sind schwach club. Jede schwach club Menge ist für eine beliebige $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge $\mathcal{S}$ schwach $\mathcal{S}$-club.*

Beweis: Die erste Aussage bedarf keiner Erklärung, da lediglich die Abgeschlossenheitseigenschaft abgeschwächt wird. Die $\mathcal{S}$-Kettenabgeschlossenheit bei der zweiten Behauptung ist offensichtlich auch kein Problem. Für die $\mathcal{S}$-Unbeschränktheit nutze man für gegebenes u das Lemma 5.16, um eine geeignete Obermenge von u in dem dort definierten $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ zu finden. ⊠(Korollar 5.17)

γ Ab jetzt setzen wir voraus, daß γ regulär ist. Als Schlüsselelement für die noch fehlende Beziehung zwischen beiden "club"-Begriffen zeigen wir zunächst das folgende

Lemma 5.18 *Sei $\mathcal{T}$ schwach $\mathcal{D}$-club, wobei $\mathcal{D}$ eine $[X]^{<\gamma}$-kettenabgeschlossene Menge ist. Dann gibt es eine Algebra $\mathfrak{B}$, so daß die Menge $\{u \in [X]^{<\gamma} \mid u$ ist unter $\mathfrak{B}$ abgeschlossen mit $u \cap \gamma$ transitiv$\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ ist.*

Beweis: Für ein gegebenes $\mathcal{T}$ definieren wir eine Algebra $\mathfrak{B}$ wie folgt. Zunächst wählen wir für endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in X$ aufgrund der Voraussetzungen an $\mathcal{D}$
$u_{x_1,\ldots,x_n}$ und $\mathcal{T}$ Objekte $u_{x_1,\ldots,x_n} \in \mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ mit $x_1, \ldots, x_n \in u_{x_1,\ldots,x_n}$ und $|u \cap \gamma| = |u|$: Dazu bildet man eine ω-lange Kette, in der abwechselnd Elemente aus $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ aufgrund der $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit von $\mathcal{T}$ und zum anderen Obermengen v mit $|v \cap \gamma| = |v|$ gewählt werden[6]; dann erfüllt die Vereinigung die gewünschten Bedingungen. Außerdem garantiert uns diese Eigenschaft, daß wir diese Mengen derart wählen können, so daß $u_{y_1,\ldots,y_m} \subseteq u_{x_1,\ldots,x_n}$ für $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ gilt. Seien nun Surjektionen $g_{x_1,\ldots,x_n} : u_{x_1,\ldots,x_n} \cap \gamma \xrightarrow{\text{auf}} u_{x_1,\ldots,x_n}$ fixiert. Wir können dann die
g_n, h_n, k Funktionen g_n, h_n und k der gesuchten Algebra für $n < \omega$ wie folgt definieren. Setze $g_n(x_1, \ldots, x_n, \xi) \simeq g_{x_1,\ldots,x_n}(\xi)$, $h_n(x_1, \ldots, x_n) := u_{x_1,\ldots,x_n} \cap \gamma$ und $k(x) := \operatorname{lub}(x)$, falls $x \subsetneq \gamma$ und undefiniert sonst.

Wir zeigen jetzt die geforderte Inklusion. Sei also ein $u \in [X]^{<\gamma}$ mit $u \cap \gamma$ transitiv gegeben, das unter $\mathfrak{B}$ abgeschlossen ist. Wir zeigen, daß u in $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ liegt. Fixiere dazu eine Aufzählung $\langle x_\nu \mid \nu < \delta \rangle$ von u für ein $\delta < \gamma$ und setze $u_W :=$
u_ν $\bigcup\{u_{x_1,\ldots,x_n} | x_1, \ldots, x_n \in W \wedge n < \omega\}$ für Teilmengen W von X und $u_\nu := u_{\{x_{\overline{\nu}} \mid \overline{\nu} < \nu\}}$. Dann ist aber nach Konstruktion für jedes $\nu < \delta$ auch $u_\nu = \bigcup \mathcal{U}_\nu$ für $\mathcal{U}_\nu := \{u_{\overline{x}} | \overline{x} \in$

[6] An dieser Stelle geht die technische Voraussetzung an X ein, nämlich, daß wir genügend Ordinalzahlen in X zur Verfügung haben, um ein solches v in $[X]^{<\gamma}$ wählen zu können.

$[\,\{x_{\overline{\nu}} \,|\, \overline{\nu} < \nu\}\,]^{<\omega}\}$ in $\mathcal{D}$, da $\mathcal{U}_\nu$ nach Konstruktion $\subseteq$-gerichtet ist[7]. Aber u_ν liegt auch in $\mathcal{T}$, das wir uns wie folgt überlegen können: Da die u_ν von der fixierten Aufzählung abhängen, werden wir sogar zeigen, daß für eine beliebige Aufzählung f (von u der Länge $\delta := |u|$) und beliebige $\nu < \delta$ die (mit dieser Aufzählung f definierten) u^f_ν in $\mathcal{T}$ liegen. Ist das nicht der Fall, dann wählen wir uns ν minimal, so daß es eine Aufzählung f gibt, so daß erstens $u^f_\nu \notin \mathcal{T}$ und zweitens für beliebige Aufzählungen g immer $u^g_{\overline{\nu}} \in \mathcal{T}$ für $\overline{\nu} < \nu$ gilt. Dann kann ν aufgrund der ersten Bedingung nicht endlich sein, da wir in dieser Situation bereits die Kettengestalt der u_ν für $\nu < \omega$ vorliegen haben, womit sofort die Abschlußbedingung von $\mathcal{T}$ greift.

Für Limeszahlen ν haben wir $u^f_\nu = \bigcup_{\overline{\nu}<\nu} u^f_{\overline{\nu}}$ und somit aufgrund der Minimalität eine Kette in $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$. Im Nachfolgerfall sucht man sich die größte Limeszahl λ unterhalb ν, d.h. für ein $0 < n < \omega$ sei $\nu = \lambda + n$, und definiert sich eine neue Aufzählung, indem man die endlich vielen $x_\lambda, \dots, x_\nu$ auf die ersten $n+1$ Plätze setzt und die ersten ω-vielen Elemente der alten Aufzählung um diese $n+1$ Stellen verschiebt. Dann erhält man eine Aufzählung g und betrachtet u^g_λ. Wegen der minimalen Wahl von $\nu > \lambda$ muß u^g_λ in $\mathcal{T}$ liegen, aber vergleicht man die Aufzählungen f und g, dann stellt man fest, daß $u^g_\lambda = u^f_\nu$ ist. Widerspruch! Somit sind alle u_ν in $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ und damit liegt auch $u' := \bigcup_{\nu<\delta} u_\nu$ als Vereinigung einer $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$-Kette in $\mathcal{T}$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{D}$ auch in $\mathcal{D}$. u'

Wir zeigen nun, daß $u' = u$ ist. Offenbar gilt sofort $u \subseteq u'$; die andere Inklusion bekommen wir induktiv über $\nu < \delta$, indem wir $u_\nu \subseteq u$ unter Ausnutzung der Abgeschlossenheit von u unter den Funktionen aus der Algebra $\mathfrak{B}$ zeigen. Für $\nu = 0$ ist $u_\varnothing \cap \gamma = h_0 \in u$ und somit gilt aufgrund der Transitivität von $u \cap \gamma$ wegen $k(u_\varnothing \cap \gamma) \in u \cap \gamma$ auch $u_\varnothing \cap \gamma \subseteq u$; damit gilt aber auch $u_\varnothing = \{g_0(\xi) \,|\, \xi \in u_\varnothing \cap \gamma\} \subseteq u$. Im Nachfolgerschritt gilt erneut $u_{\nu+1} \cap \gamma = \bigcup\{h_{n+1}(y_1, \dots, y_n, x_\nu) \,|\, y_1, \dots, y_n \in u_\nu\} \subseteq u$, wobei die Gleichung unmittelbar aus der Definition folgt: Für ($\supseteq$) überlegt man sich, daß $u_{y_1,\dots,y_n,x_\nu} \cap \gamma \subseteq u_{\nu+1} \cap \gamma$ gilt und für ($\subseteq$) nehme man sich ein $\alpha \in u_{\nu+1} \cap \gamma$ her; dann ist $\alpha \in u_{y_1,\dots,y_n}$ für geeignete $y_1, \dots, y_n \in \{x_{\overline{\nu}} \,|\, \overline{\nu} \leq \nu\}$ und somit auch in $h_{n+1}(y_1, \dots, y_n, x_\nu)$; dabei nutzt man aus, daß $u_{y_1,\dots,y_n} \subseteq u_{y_1,\dots,y_n,x_\nu}$ gilt; die letzte Inklusion erhält man wie schon im Fall $\nu = 0$ gezeigt[8]. Mit dieser Gleichung erhalten wir schließlich wie gewünscht wieder $u_{\nu+1} = \{g_n(y_1, \dots, y_n, \xi) \,|\, \xi \in u_{\nu+1} \cap \gamma \wedge \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \{x_{\overline{\nu}} | \overline{\nu} \leq \nu\} \wedge n < \omega\,\}$. Im Limesschritt ist dann die Vereinigung von Teilmengen von u trivialerweise wieder eine Teilmenge von u. ⊠(Lemma 5.18)

Beim Übergang vom "club"-Begriff zum "schwach $\mathcal{D}$-club"-Begriff schwächen wir die Abgeschlossenheitseigenschaft ab; so sind schwach $\mathcal{D}$-club Mengen unter Ketten mit Elementen aus $\mathcal{D}$ und einer Länge echt kleiner als γ abgeschlossen, wobei club

[7] Nach Wahl gilt für beliebige $\overline{x}, \overline{y} \in [\,\{x_{\overline{\nu}} \,|\, \overline{\nu} < \nu\}\,]^{<\omega}$ immer $u_{\overline{x}} \cup u_{\overline{y}} \subseteq u_{\overline{x}^\frown\overline{y}} \in \mathcal{U}_\nu$.

[8] Für ein $\xi \in h(y_1, \dots, y_n, x_\nu) \in u$ ist $\xi \in k(\,h(y_1, \dots, y_n, x_\nu)\,) \in u \cap \gamma$, so daß aber aufgrund der Transitivität von $u \cap \gamma$ schließlich ξ in u liegt.

Mengen – bestehend aus unter einer fixierten Algebra abgeschlossenen Elementen – unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen sind. Für $\mathcal{D} := [X]^{<\gamma}$ bleibt die Unbeschränktheitseigenschaft unverändert; allerdings wird sie echt verstärkt, wenn $\mathcal{D}$ eine echte Teilmenge von $[X]^{<\gamma}$ ist. Nun erzeugen nach Lemma 5.18 offenbar für Teilmengen der Menge $\{u \in [X]^{<\gamma} \mid u \cap \gamma \text{ transitiv}\}$ beide Begriffe für $\mathcal{D} := [X]^{<\gamma}$ den gleichen Stationaritätsbegriff. Eine bezüglich der Fragestellung, wann stationäre Mengen auch $[X]^{<\gamma}$-stationär sind, interessante Eigenschaft der schwach club Mengen können wir jetzt mit Hilfe einer Beweisidee von Menas nachweisen.

Lemma 5.19 *Für eine schwach club Menge $\mathcal{C}$ existiert eine Funktion $F : (X)^{<\omega} \longrightarrow [X]^{<\gamma}$ mit $\{u \in [X]^{<\gamma} \mid (\,\forall s \in (u)^{<\omega}\,)(\,F(s) \subseteq u\,)\} \subseteq \mathcal{C}$.*

Beweis: Wir definieren $F(s)$ für $s \in [X]^{<\gamma}$ induktiv über die Länge von s; sei $F(\varnothing)$ ein beliebiges unendliches Element von $\mathcal{C}$ und für $\mathrm{lh}(s) = n+1$ wähle $F(s)$ aufgrund der Unbeschränktheit von $\mathcal{C}$ als Obermenge von $\mathcal{S} \cup \bigcup\{F(t) \mid t \in (S)^{<\omega}\}$, wobei $\mathcal{S} := \{x_0^s, \ldots, x_n^s\}$ und $s = \langle x_0^s, \ldots, x_n^s\rangle$, in $\mathcal{C}$. Dann erfüllt diese Funktion die geforderte Bedingung, denn für ein u mit $F(s) \subseteq u$ für beliebige $s \in (u)^{<\gamma}$ ist u offenbar unendlich und es gilt $\bigcup \mathcal{F} \subseteq u$ für $\mathcal{F} := \{F(s) \mid s \in (u)^{<\omega}\}$; wegen $x \in F(\langle x\rangle)$ für beliebige $x \in X$ gilt sogar $\bigcup \mathcal{F} = u$. Offenbar ist aber $\mathcal{F}$ ein $\subseteq$-gerichtetes System, so daß wir mit Lemma 5.13 wie gewünscht $u \in \mathcal{C}$ erhalten.

⊠(Lemma 5.19)

Die auf den ersten Blick erscheinende Ähnlichkeit einer schwach club Menge gegenüber einer club Menge mittels der in Lemma 5.19 nachgewiesenen Funktion F trügt. Bei genauerer Analyse erkennt man, daß die Funktionswerte $F(s)$ als Teilmengen von X Schwierigkeiten entstehen lassen, wenn man diese durch Elemente $f_n(x)$ von X bei einer Konstruktion einer geeigneten Algebra (mit ihren Abbildungen f_n) die eventuell sehr großen Teilmengen $F(s)$ einfangen möchte[9]. Wir können darüber hinaus ganz schnell ein Gegenbeispiel angeben, das bezeugt, daß beide Stationaritätsbegriffe unter Umständen verschieden sind. Ist die Grundmenge X abzählbar, dann treten keine Probleme auf; nehmen wir aber an, daß sie überabzählbar ist. Dann können wir die Menge $\mathcal{S}$ der abzählbaren Teilmengen von X betrachten. Dann ist sowohl $\mathcal{S}$ als auch $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{S}$ stationär, da der Abschluß einer unendlichen Menge unter abzählbar vielen Funktionen nichts an ihrer Mächtigkeit ändert. Allerdings ist $\mathcal{S}$ nicht $\mathcal{P}(X)$-stationär, da es offenbar schwach club Mengen gibt, die nur aus überabzählbaren Teilmengen bestehen.

Das Gegenbeispiel kann entschärft werden, wenn wir den "club"-Begriff kurzzeitig erweitern, indem wir eine Menge $\mathcal{C}$ *schwach club$_\omega$* nennen, falls sie schwach club ist und zusätzlich zu jeder höchstens abzählbaren Menge in $[X]^{<\gamma}$ eine höchstens

[9] Im Beweis von Lemma 5.20 werden wir auf diese Idee zurückgreifen; dort wird auch die Notwendigkeit deutlich werden.

abzählbare Obermenge in $\mathcal{C}$ liegt. Diese anscheinend willkürliche Erweiterung aufgrund des Gegenbeispiels bringt uns aber zum gewünschten Ziel, denn wir können nun das folgende zeigen.

Lemma 5.20 *Jede schwach club$_\omega$ Menge enthält eine club Menge.*

Da offenbar jede club Menge immer noch schwach club$_\omega$ ist, sind die beiden resultierenden Stationaritätsbegriffe äquivalent. Allerdings tritt diese erweiterte Formulierung in der Literatur nicht weiter auf und wir werden sie in späteren Anwendungen auch nicht weiter bemühen, da dort der ursprüngliche Begriff ausreichen wird.

Beweis des Lemmas 5.20: Sei $\mathcal{C}$ eine schwach club$_\omega$ Menge. Der Trick, warum es jetzt klappt und etwa nicht mit Hilfe einer Funktion aus Lemma 5.19, liegt gerade in der Möglichkeit der Wahl einer höchstens abzählbaren Obermenge einer solchen Ausgangsmenge, die in $\mathcal{C}$ liegen wird. Solche Dimensionen lassen sich dann aber durch die abzählbar vielen Funktionen einer zu konstruierenden Algebra aufzählen. Wir nutzen eine Beweisidee analog dem Lemma 5.18. Zu $x_1, \ldots, x_n \in X$ wähle abzählbare $u_{x_1,\ldots,x_n} \in \mathcal{C}$, so daß $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq u_{x_1,\ldots,x_n}$ und $u_s \subseteq u_t$ für alle $t \in (X)^{<\omega}$ und $s \in (t)^{<\omega}$ erfüllt sind. Diese Eigenschaften lassen sich aufgrund der erweiterten Unbeschränktheit von $\mathcal{C}$ induktiv erreichen. Offenbar bilden für beliebige $v \subseteq X$ diese $u_{x_1,\ldots,x_n}$ für $x_1, \ldots, x_n \in v$ ein $\subseteq$-gerichtetes System, so daß nach Lemma 5.13 die Menge $\bigcup\{u_s \mid s \in (v)^{<\omega}\}$ immer in $\mathcal{C}$ liegt.

Wir konstruieren nun eine geeignete Algebra $\mathfrak{A} := \langle X, f_n(n < \omega)\rangle$ wie folgt: Wir fixieren für jedes $s \in (X)^{<\gamma}$ eine Aufzählung $\langle x_n^s \mid n < \omega\rangle$ von u_s und definieren $f_n(s) := x_n^s$. Dann erfüllt offenbar ein unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossenes $u \in [X]^{<\gamma}$ die Gleichung $u = \bigcup\{u_s \mid s \in (u)^{<\omega}\}$, so daß u dann nach der obigen Überlegung in $\mathcal{C}$ liegen muß. $\boxtimes$(Lemma 5.20)

Ist $\mathcal{D}$ eine echte Teilmenge von $[X]^{<\gamma}$, dann kann der Begriff der schwach $\mathcal{D}$-club Mengen eventuell echt schwächer als der "club"-Begriff sein, so daß nicht unmittelbar klar ist, ob in diesem Fall beide den gleichen Stationaritätsbegriff beschreiben. Nach den obigen Überlegungen können wir sofort die folgenden Zusammenhänge festhalten.

Bemerkung 5.21 *Es gilt:*

- *Für eine beliebige $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge $\mathcal{D}$ sind alle $\mathcal{D}$-stationären Mengen stationär.*
- *Ist X überabzählbar, dann gibt es eine stationäre Menge, die nicht $\mathcal{P}(X)$-stationär ist. Wenn X aber abzählbar oder $\gamma = \omega_1$ ist, dann sind die stationären Mengen gerade die $[X]^{<\gamma}$-stationären Mengen.*

- *Mengen, die jeweils alle schwach club$_\omega$ schneiden, sind gerade die stationären Mengen.*
- *Für Teilmengen von $\{u \in [X]^{<\gamma} \mid u \cap \gamma$ transitiv$\}$ stimmen die beiden Begriffe Stationarität und $[X]^{<\gamma}$-Stationarität überein.*

Wir werden diesen Begriff von Stationarität nicht tiefgründiger beleuchten, weil er ausgiebig in der Literatur zu finden ist, etwa in [Ka94, Kapitel 25]. Ein wenig aufpassen muß man lediglich bei der Wahl der Relativierungsmenge $\mathcal{D}$, damit der Begriff vernünftig bleibt. Unabhängig davon wird dieser Begriff immer noch die geforderten Eigenschaften aus (5.1.1) und sogar die entsprechende Version vom Satz von FODOR erfüllen. Außerdem ist aufgrund der Relativierung natürlich trivialerweise eine beliebige Menge $\mathcal{D}$ immer auch $\mathcal{D}$-stationär; damit also auch jede Obermenge von $\mathcal{D}$. Darüber hinaus ist dieser Begriff überhaupt nur für unbeschränkte Mengen $\mathcal{D}$ sinnvoll, da im anderen Fall gar keine schwach $\mathcal{D}$-club Mengen existieren. Allerdings kann man sich im allgemeinen auch nicht vollständig auf Teilmengen von $\mathcal{D}$ beschränken, wenn man die $\mathcal{D}$-stationären Mengen betrachten möchte. Einen Zusammenhang in dieser Richtung werden wir in Lemma 5.24 erwähnen; doch zunächst schauen wir uns die folgenden entscheidenden Eigenschaften an.

Lemma 5.22 *Sei $\mathcal{D}$ eine $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge.*

(a) *Der Durchschnitt echt kleiner γ vieler schwach $\mathcal{D}$-club Mengen ist wieder eine schwach $\mathcal{D}$-club Menge.*

(b) *Der diagonale Durchschnitt $\triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x = \{\, u \in [X]^{<\gamma} \mid u \in \bigcap_{x\in u}\mathcal{T}_x \,\}$, wobei die $\mathcal{T}_x$ schwach $\mathcal{D}$-club Mengen sind, ist wieder schwach $\mathcal{D}$-club.*

Beweis: Die Beweise entsprechen im wesentlichen den Standardbeweisen für die üblichen Begriffe über Teilmengen von Ordinalzahlen. Sei also $\mathcal{D}$ eine $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge.

zu (a): Die $\mathcal{D}$-Abgeschlossenheit ist offensichtlich. Für die $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit seien $\lambda < \gamma$ viele schwach $\mathcal{D}$-club Mengen $\mathcal{T}_\beta$ für $\beta < \lambda$ und ein $u \in [X]^{<\gamma}$ gegeben. Wir können im Prinzip den Standardbeweis verwenden, allerdings ist dann nicht sofort klar, warum wir eine Obermenge in $\mathcal{D}$ erhalten. Daher definieren wir die folgende Hilfsmenge $\mathcal{U} := \{v \in [X]^{<\gamma} \mid u \subseteq v \ \wedge\ v$ ist $\mathcal{D}$-Limespunkt von $\mathcal{T}_\beta$ für alle $\beta < \lambda\}$. Dabei sei v ein $\mathcal{D}$-Limespunkt von $\mathcal{T}_\beta$, wenn eine Kette $\langle v_i \mid i < \lambda\rangle$ mit $\lambda < \gamma$ existiert, so daß außerdem $v_i \in \mathcal{T}_\beta \cap \mathcal{D}$ mit $v = \bigcup_{i<\lambda} v_i$ gilt. Wir werden nun zeigen:

(5.1.2) $\mathcal{U}$ ist schwach club.

Damit hätten wir aufgrund der Bedingung an $\mathcal{D}$ auch ein $v' \in \mathcal{D} \cap \mathcal{U}$. Dieses v' ist aber nach Definition von $\mathcal{U}$ aufgrund der $\mathcal{D}$-Abgeschlossenheit der $\mathcal{T}_\beta$ in allen $\mathcal{T}_\beta$

gleichzeitig und damit außer einer in $\mathcal{D}$ liegenden Obermenge von u auch noch im Durchschnitt aller $\mathcal{T}_\beta$. Es bleibt also nur noch der

Beweis von (5.1.2): Die Abgeschlossenheit ist wieder offensichtlich, da ein Limes von $\mathcal{D}$-Limespunkten natürlich insbesondere selbst ein $\mathcal{D}$-Limespunkt ist. Für die Unbeschränktheit sei ein v_0 mit $u \subseteq v_0 \in [X]^{<\gamma}$ gegeben; wir suchen dann eine Obermenge $v \in \mathcal{U}$ von v_0. Hierbei nutzen wir Standardideen und definieren Funktionen f und f_β für $\beta \in \lambda$ wie folgt: Wähle $f_\beta(v)$ als Obermenge von v in $\mathcal{T}_\beta \cap \mathcal{D}$ und setze $f(v) := \bigcup\{f_\beta(v) \mid \beta < \lambda\}$. Da $\lambda < \gamma$ ist, gilt dann auch $f(v) \in [X]^{<\gamma}$. Wir definieren nun beginnend mit dem gegebenen v_0 eine Kette durch $v_{i+1} := f(v_i)$ und setze $v := \bigcup_{n<\omega} v_n$. Hierbei ist v_{i+1} aufgrund der $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit von $\mathcal{T}_\beta$ korrekt definiert. Dann erfüllt v die geforderten Bedingungen. $\boxtimes$ (5.1.2)

zu (b): Für die Abgeschlossenheit sei eine Kette $\langle u_i \mid i < \lambda\rangle$ für $\lambda < \gamma$ mit $u_i \in \mathcal{D} \cap \triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$ gegeben; wir zeigen dann $u := \bigcup_{i<\lambda} u_i \in \triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$. Dafür müssen wir für $x \in u$ nur $u \in \mathcal{T}_x$ zeigen. Ist nun aber $x \in u$, dann existiert ein $i_0 < \lambda$, so daß für alle $i > i_0$ immer $x \in u_i$ gilt. Nun sind die u_i selbst in $\triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$, d.h. $u_i \in \mathcal{T}_x$ für alle $i > i_0$; aber damit ist u auch ein Limespunkt einer $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}_x$-Kette und somit selbst Element von $\mathcal{T}_x$. Um nun andererseits die $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit einzusehen, definieren wir zu einem gegebenen $u \in [X]^{<\gamma}$ wieder eine geeignete Hilfsmenge $\mathcal{U} := \{v \in [X]^{<\gamma} \mid u \subseteq v \;\wedge\; v \text{ ist ein } \mathcal{D}\text{-Limespunkt von } \mathcal{T}_x \text{ für alle } x \in v\}$. Wir zeigen nun:

(5.1.3) $\mathcal{U}$ ist schwach club.

Dann erhalten wir ein $v' \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$ und somit ist v' eine in $\mathcal{D}$ liegende Obermenge von u, die nach Definition von $\mathcal{U}$ und der $\mathcal{D}$-Abgeschlossenheit der $\mathcal{T}_x$ im diagonalen Durchschnitt der $\mathcal{T}_x$ liegt; es bleibt der

Beweis von (5.1.3): Die Abgeschlossenheit folgt exakt mit der gleichen Argumentation wie oben. Für die Unbeschränktheit nehmen wir ein v_0 mit $u \subseteq v_0 \in [X]^{<\gamma}$ und suchen eine Obermenge $v \in \mathcal{U}$ von v_0. Erneut definieren wir Funktionen f und f_x für $x \in X$ wie folgt: Wähle $f_x(v) \in \mathcal{T}_x \cap \mathcal{D}$ als Obermenge von v und setze $f(v) := \bigcup\{f_x(v) \mid x \in v\}$. Wieder gilt wegen $|v| < \gamma$ auch $f(v) \in [X]^{<\gamma}$. Wir definieren nun beginnend mit v_0 eine Kette $v_{i+1} := f(v_i)$ und schließlich $v := \bigcup_{n<\omega} v_n$. Dann erfüllt v die geforderten Bedingungen. $\boxtimes$ (5.1.3)

$\boxtimes$(Lemma 5.22)

Mit diesen Eigenschaften an den "club"-Begriff können wir wie gewöhnlich die beiden wichtigen Forderungen an den aktuellen Stationaritätsbegriff nachweisen.

Korollar 5.23 *Sei $\mathcal{D}$ eine $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge.*

(a) **(Satz von Fodor)** *Ist eine regressive Funktion $f : \mathcal{S} \longrightarrow X$ auf einer $\mathcal{D}$-stationären Menge $\mathcal{S}$ definiert, dann ist sie auf einer $\mathcal{D}$-stationären Teilmenge von $\mathcal{S}$ konstant.*

(b) **(Schubfachprinzip)** *Sei $\mathcal{S} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{S}_i$ eine $\mathcal{D}$-stationäre Menge, wobei $\lambda < \gamma$ ist. Dann existiert ein $i < \lambda$, so daß auch $\mathcal{S}_i$ eine $\mathcal{D}$-stationäre Menge ist.*

Beweis: Falls (a) nicht gilt, dann können wir für jedes $x \in X$ eine schwach $\mathcal{T}_x$-club Menge finden, so daß $\mathcal{T}_x \cap f^{-1}\text{"}\,\{x\} = \varnothing$ gilt. Dann ist nach Lemma 5.22 der diagonale Durchschnitt $\triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$ zwar wieder eine schwach $\mathcal{D}$-club Menge, die aber die $\mathcal{D}$-stationäre Menge $\mathcal{S}$ nicht schneidet, denn sonst wäre für ein $u \in \mathcal{S} \cap \triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$ natürlich $x := f(u) \in u$ und damit aber $u \in \mathcal{T}_x \cap f^{-1}\text{"}\,\{x\}$. Widerspruch! Für (b) nehmen wir an, daß alle $\mathcal{S}_i$ für $0 < i < \lambda$ nicht $\mathcal{D}$-stationär sind. Dann finden wir für jedes solche $0 < i < \lambda$ eine schwach $\mathcal{D}$-club Menge $\mathcal{T}_i$, so daß $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{S}_i = \varnothing$. Dann ist aber auch $\mathcal{T}' := \bigcap_{0<i<\lambda} \mathcal{T}_i$ nach Lemma 5.22 eine schwach $\mathcal{D}$-club Menge, so daß schließlich $\mathcal{S}_0$ eine $\mathcal{D}$-stationäre Menge ist, denn für eine beliebige schwach $\mathcal{D}$-club Menge $\mathcal{T}$ ist $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ wieder eine solche und damit nach Voraussetzung $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}$ nicht leer, wobei dieser Durchschnitt nach Wahl der $\mathcal{T}_i$ ganz in $\mathcal{S}_0$ liegen muß. Also schneidet $\mathcal{S}$ beliebige schwach $\mathcal{D}$-club Mengen. ⊠(Korollar 5.23)

Jetzt können wir zum Schluß wie versprochen einen Zusammenhang des Begriffs der $\mathcal{D}$-Stationarität mit der Relativierungsmenge $\mathcal{D}$ beschreiben.

Lemma 5.24 *Sei $\mathcal{D}$ schwach club. Dann ist eine Menge $\mathcal{T}$ genau dann schwach $\mathcal{D}$-club, wenn $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ eine schwach club Menge ist. Außerdem sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$\mathcal{S}$ ist $\mathcal{D}$-stationär.*

(b) *$\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ ist $\mathcal{D}$-stationär.*

(c) *$\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ ist $[X]^{<\gamma}$-stationär.*

Beweis: Nehmen wir an, daß $\mathcal{D}$ schwach club sei. Die erste Behauptung ist aufgrund der geforderten Abgeschlossenheit von $\mathcal{D}$ offensichtlich. Für die Implikation (a) $\longrightarrow$ (b) betrachte man zu einer gegebenen schwach $\mathcal{D}$-club Menge den Schnitt mit $\mathcal{D}$, der nach Lemma 5.22 wieder schwach $\mathcal{D}$-club ist, da $\mathcal{D}$ insbesondere einerseits eine schwach $\mathcal{D}$-club Menge und andererseits eine stationäre Menge ist. Aber diesen Durchschnitt muß $\mathcal{S}$ schneiden. Für (b) $\longrightarrow$ (c) überlegt man sich, daß für eine schwach club Menge $\mathcal{T}$ der Schnitt $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ zunächst selbst schwach club ist, aber damit ist dann $\mathcal{T} \cap \mathcal{D}$ als Teilmenge von $\mathcal{D}$ natürlich auch schwach $\mathcal{D}$-club. Damit greift dann die Voraussetzung. Für die letzte Implikation (c) $\longrightarrow$ (a) beachte man den am Anfang bereits überlegten Zusammenhang zwischen schwach club und schwach $\mathcal{D}$-club Mengen. ⊠(Lemma 5.24)

Stationarität durch nur überabzählbar abgeschlossene Mengen

Zum Abschluß betrachten wir noch einen anderen Begriff von Stationarität, indem wir den "club"-Begriff erneut ändern. Im Hinblick auf die spätere Anwendung schwächen wir die Abgeschlossenheitseigenschaft geeignet ab.

Definition 5.25 *Eine Teilmenge von $[X]^{<\gamma}$ heißt $\mathcal{D}$-club*, falls sie $\mathcal{D}$-unbeschränkt und unter echten $\mathcal{D}$-Ketten von Längen kleiner γ mit überabzählbarer Konfinalität abgeschlossen ist. Eine Menge heißt* club**, wenn sie $[X]^{<\gamma}$-club* ist.*

Wie gewöhnlich definieren wir dann den daraus folgenden Begriff der Stationarität. Dieser erfüllt natürlich auch die in (5.1.1) genannten Eigenschaften eines solchen Begriffs von Größe.

Definition 5.26 *Eine Teilmenge von $[X]^{<\gamma}$ heißt $\mathcal{D}$-stationär*, falls sie jede $\mathcal{D}$-club* Menge schneidet.*

Wie früher nennen wir $\mathcal{D}$-stationäre* Mengen für $\mathcal{D} := [X]^{<\gamma}$ nur kurz stationär*. Die Wiederholung des Beweises von Lemma 5.22 zeigt auch hier zunächst die entsprechenden Versionen der Abschlußeigenschaften dieses neuen "club"-Begriffs.

Lemma 5.27 *Sei $\mathcal{D}$ eine stationäre* Menge.*

(a) *Der Durchschnitt echt kleiner γ vieler $\mathcal{D}$-club* Mengen ist wieder eine $\mathcal{D}$-club* Menge.*

(b) *Der diagonale Durchschnitt $\triangle_{x\in X}\mathcal{T}_x$ für $\mathcal{D}$-club* Mengen $\mathcal{T}_x$ ist wieder $\mathcal{D}$-club*.*

Beweis: Wir gehen die Teilbeweise von Lemma 5.22 durch und ergänzen sie gegebenfalls. Sei zunächst $\mathcal{D}$ eine stationäre* Menge. Für (a) nehme man anstelle beliebiger $\mathcal{D}$-Limespunkte nur solche in die dort definierte Menge $\mathcal{U}$ auf, die durch eine Limesbildung mit einer überabzählbar konfinalen Länge erreicht werden. Dann ist wie gewünscht $\mathcal{U}$ jetzt eine club* Menge[10] und der Rest des Beweises kann übernommen werden. Für den Teil (b) nutze man beim Beweis der überabzählbaren $\mathcal{D}$-Abgeschlossenheit erneut den alten Beweis, wobei in diesem Fall lediglich der Fall $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$ zu betrachten ist. Für die $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit definieren wir wie oben die Hilfsmenge $\mathcal{U}$, wobei wir erneut nur überabzählbar konfinale Limespunkte nehmen; dann ist auch diese Menge wie gewünscht club*, wobei wir in dem entsprechenden Nachweis das dort definierte v wieder als Vereinigung überabzählbar vieler v_i definieren. ⊠(Lemma 5.27)

Um nun noch die beiden bisher noch nicht genannten wichtigen Eigenschaften des neuen Stationaritätsbegriffs einzusehen, können wir erneut die obigen Nachweise aus dem Korollar 5.23 vollständig wiederholen, da wir mit Lemma 5.27 die beiden notwendigen Erhaltungseigenschaften bereitgestellt haben.

Korollar 5.28 *Sei $\mathcal{D}$ eine stationäre* Menge.*

[10] Die überabzählbare Abgeschlossenheit ist wieder offensichtlich erfüllt und für die Unbeschränktheit definiere man wie oben die Werte $v_{i+1} := f(v_i)$, setze aber diesmal für Limeszahlen λ den Wert $v_\lambda := \bigcup_{i<\lambda} v_i$ und betrachte letztendlich $v := v_{\omega_1}$.

(a) **(Satz von Fodor)** *Ist eine regressive Funktion $f : \mathcal{S} \longrightarrow X$ auf einer $\mathcal{D}$-stationären* Menge $\mathcal{S}$ definiert, so ist sie auf einer $\mathcal{D}$-stationären* Teilmenge von $\mathcal{S}$ konstant.*

(b) **(Schubfachprinzip)** *Sei $\mathcal{S} = \bigcup_{i<\lambda} \mathcal{S}_i$ eine $\mathcal{D}$-stationäre* Menge, wobei $\lambda < \gamma$, dann existiert ein $i < \lambda$, so daß auch $\mathcal{S}_i$ eine $\mathcal{D}$-stationäre* Menge ist.*

Wir haben durch die sukzessive Veränderung der Eigenschaften der "club"-Begriffe verschiedene Stärken der Stationarität erhalten. Bisherige Zusammenhänge haben wir schon mit der Bemerkung 5.21 zusammengestellt. Eine echte Abschwächung ist der club*-Begriff. Offenbar gibt es Mengen, die club* aber nicht club sind; wodurch der resultierende Stationaritätsbegriff auch echt stärker wird. Wir bekommen natürlich, daß $\mathcal{D}$-stationäre* Mengen immer $\mathcal{D}$-stationär sind; insbesondere sind $\mathcal{D}$-stationäre* Mengen immer selbst stationär in $[X]^{<\gamma}$, falls $\mathcal{D}$ eine $[X]^{<\gamma}$-stationäre Menge ist.

Bisher haben wir also einige neue Begriffe geschaffen, die wohl-bekannte Bezeichnungen über Eigenschaften von Teilmengen von Ordinalzahlen in sich tragen. Im nächsten Abschnitt werden wir, bevor wir sie im sechsten Kapitel direkt für unsere Zwecke ausnutzen, bereits bekannte und etablierte Anwendungen beleuchten.

5.2 Anwendung auf Große Kardinalzahlen

Bevor wir uns der Verwendung dieser neuen Begriffe im Zusammenhang mit dem Lemma über die häufige Erweiterbarkeit zuwenden, wollen wir als erstes eine Beziehung zu Großen Kardinalzahlen herstellen.

Definition 5.29 *Eine Kardinalzahl κ heißt* Jónsson*, wenn für jede Algebra $\mathfrak{A} = \langle \kappa, f_i \ (i < \omega) \rangle$ auf κ eine echte Subalgebra der Mächtigkeit κ existiert.*

Wir werden an dieser Stelle nur die uns hier interessierenden Zusammenhänge dieser Zahlen zum Thema Stationarität bringen. Eine gute Übersicht über diese Kardinalzahlen, die sich insbesondere auch als Einstiegspunkt eignet, bietet [Ka94, Kapitel 8]. Um zumindest ein kleines Gefühl zu erhalten, sei im folgenden unter Ausnutzung des Auswahlaxioms eine kurze Zusammenstellung erfolgen. So überlegt man sich leicht, daß ω nicht Jónsson ist[11]; darüber hinaus ist mit κ auch κ^+ nicht Jónsson. Außerdem beobachteten Tryba und Woodin, daß κ^+ für reguläres κ keine Jónsson-Kardinalzahl sein kann. Shelah bewies mittels seiner *pcf*-Theorie, daß κ^+ nicht Jónsson ist, wenn κ singulär und kein Limes von regulären Jónsson-Kardinalzahlen ist. Insbesondere kann damit $\aleph_{\omega+1}$ nicht Jónsson sein. Unter GCH konnten Erdős, Hajnal und Rado schließlich nachweisen, daß alle Nachfolgerkardinalzahlen nicht Jónsson sind. Es ist bis heute offen, ob es (unter ZFC) eine

[11] Betrachte die Algebra $\langle \omega, f \rangle$, wobei $f(0) := 0$ und $f(n+1) := n$.

JÓNSSON-Nachfolgerkardinalzahl geben kann. DEVLIN und ROWBOTTOM bewiesen, daß die kleinste JÓNSSON-Kardinalzahl, sofern existent, entweder schwach unerreichbar oder eine abzählbare Konfinalität besitzt. PŘÍKRÝ zeigte, daß ein singulärer Limes von meßbaren Zahlen JÓNSSON ist. Es ist immer noch ein offenes Problem, ob $\aleph_\omega$ eine JÓNSSON-Kardinalzahl sein kann. JÓNSSON-Kardinalzahlen haben auch eine Wirkung auf innere Modelle; so bewies beispielsweise KOEPKE aus der Existenz einer einer JÓNSSON-Kardinalzahl κ mit $\omega < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ die Existenz eines inneren Modells mit $\mathrm{cf}(\kappa)$ vielen meßbaren Zahlen. Ist κ eine reguläre JÓNSSON-Kardinalzahl, so bemerkte WELCH, dann ist für beliebige $A \subseteq \kappa$ immer $\mathbf{V}_{\kappa+1} \neq \mathbf{V}_{\kappa+1}^{\mathbf{L}_\kappa[A]}$. Doch kommen wir zurück zu unserem Anliegen; aufgrund der Definitionen bekommen wir sofort das folgende

Lemma 5.30 *Eine Kardinalzahl κ ist genau dann* JÓNSSON, *wenn $\{Y \subsetneq \kappa \mid |Y| = \kappa\}$ stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$ ist.*

Mit dem vorhergehenden Lemma zusammen mit Lemma 5.9 erhalten wir dann eine mögliche alternative Charakterisierung dieser Kardinalzahl.

Lemma 5.31 *Eine Kardinalzahl κ ist genau dann* JÓNSSON, *wenn jede Struktur $\mathfrak{A}$ einer beliebigen abzählbaren Sprache erster Stufe der Mächtigkeit κ eine echte elementare Substruktur der gleichen Mächtigkeit besitzt.*

Der Beweis ist mit dieser Vorarbeit offensichtlich, wenn man die beiden oben genannten Lemmata mit $X := \kappa$, $\gamma := \kappa^+$ und $\mathcal{S} := \{Y \in [\kappa]^\kappa \mid Y \neq \kappa\}$ anwendet. Wir möchten jetzt eine untere Schranke für die Existenz von JÓNSSON-Kardinalzahlen finden.

Lemma 5.32 *Wenn eine* JÓNSSON-*Kardinalzahl existiert, dann existiert auch $0^\#$, insbesondere ist die Existenz einer* JÓNSSON-*Kardinalzahl nicht verträglich mit dem Axiom $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.*

Beweis: Betrachte die Struktur $\langle \mathbf{L}_\kappa, \in \rangle$ für eine JÓNSSON-Kardinalzahl κ. Nach Lemma 5.31 existiert ein $X \prec \mathbf{L}_\kappa$ der Mächtigkeit κ mit $X \neq \mathbf{L}_\kappa$. Dann ist nach dem Kondensationsprinzip X isomorph zu einem $\mathbf{L}_\alpha$. Offenbar ist $\alpha = \kappa$ und es sei $\pi : X \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbf{L}_\kappa$ die MOSTOWSKI-Abbildung. Dann ist $\pi^{-1} : \mathbf{L}_\kappa \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\kappa$. Hätte κ eine überabzählbare Konfinalität, dann läge κ gut in ∞, so daß wir π^{-1} auf das ganze konstruktible Universum heben könnten und somit eine nicht-triviale Σ_1-erhaltende Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$, also $0^\#$, erhielten. Sonst können wir aber für $\delta := \mathrm{crit}(\pi^{-1})$ die Menge $\mathcal{U} := \{X \in \mathcal{P}(\delta) \cap \mathbf{L} \mid \delta \in \pi^{-1}(X)\}$ definieren; so daß $\mathcal{U}$ ein normaler Ultrafilter über $\mathbf{L}$ ist[12], dessen Ultraprodukt $\mathrm{Ult}(\mathbf{L}, U)$ fundiert ist. Die notwendigen Nachweise haben wir schon in der Beweisskizze von Theorem 1.75 gesehen. Auch in diesem Fall existiert also $0^\#$. $\boxtimes$(Lemma 5.32)

[12] Vergleiche (1.3.1).

Wir fassen in der folgenden Definition kurz die Begriffe zusammen, die wir hier als bekannt voraussetzen werden, die wir aber im folgenden zur Anwendung der RAMSEY-Zahlen benötigen.

Definition 5.33 *Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell.*

(a) *Für $\kappa \subseteq \mathfrak{A}$ heißt $X \subseteq \kappa$ ununterscheidbar in $\mathfrak{A}$, wenn für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:* $(\forall \overline{a}, \overline{b} \in (X)^n)(\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a}) \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{b}))$

(b) *Für $\kappa \subseteq \mathfrak{A}$ ist $X \subseteq \kappa$* bemerkenswert[13], *wenn*

  (i) *X ist ununterscheidbar in $\mathfrak{A}$.*

  (ii) *Falls $\varphi(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$ eine Formel ist, dann gilt für alle $\overline{a}, \overline{b} \in (X)^n$ und alle $\overline{u}$ mit $u_1, \ldots, u_m < \min(\overline{a}, \overline{b})$: $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{u}, \overline{a}) \longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{u}, \overline{b})$. (Offensichtlich folgt aus* (ii) *sofort* (i).)

  (iii) *Sei $\gamma \in X$; ist dann $\delta < \kappa$ schon in Paramtern kleiner als γ in $\mathfrak{A}$ definierbar, d.h. $\{\delta\} = \{x \mid \mathfrak{A} \models \varphi(x, \mu_1, \ldots, \mu_n)\}$ für geeignete $\overline{\mu} < \gamma$ und φ, dann ist $\delta < \gamma$.*

(c) *κ heißt α-*ERDŐS*, wenn es für jedes Modell $\mathfrak{B}$ einer abzählbaren Sprache mit $\kappa \subseteq \mathfrak{B}$ eine Teilmenge $X \subseteq \kappa$ mit Ordnungstyp α gibt, die zusätzlich bemerkenswert ist.*

(d) *κ heißt* RAMSEY, *wenn κ eine κ-*ERDŐS*-Zahl ist.*

Lemma 5.34 RAMSEY-*Kardinalzahlen sind insbesondere* JÓNSSON-*Kardinalzahlen.*

Beweis: Sei κ eine RAMSEY-Kardinalzahl und $\mathfrak{A} = \langle \kappa, f_i\ (i < \omega) \rangle$ eine Algebra auf κ. Dann existiert eine Folge $\mathcal{I} := \langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ von Ununterscheidbaren für $\mathfrak{A}$, so daß insbesondere für alle $\kappa_{\alpha_j}, \kappa_{\beta_j} \in \mathcal{I}$ und alle $i < \omega$ immer $\mathfrak{A} \models f_i(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}) = f_i(\kappa_{\beta_1}, \ldots \kappa_{\beta_n})$ gilt. Sei nun $\overline{B}$ der Abschluß von $\{\kappa_\alpha | \alpha < \omega\}$ unter allen Funktionen f_i für $i < \omega$. Dann ist $\overline{B}$ offenbar abzählbar und somit $\mathfrak{B} := \langle B, f_i\ (i < \omega) \rangle$ für $B := (\overline{B} \cup \mathcal{I}) \setminus \{\kappa^*\}$ für ein κ^* aus $\mathcal{I} \setminus \overline{B}$ wegen der Ununterscheidbarkeit von $\mathcal{I}$ eine echte Subalgebra von $\mathfrak{A}$ der Mächtigkeit κ. ⊠(Lemma 5.34)

Wir können sogar noch einen Schritt weitergehen, denn es läßt sich noch mehr aus der Existenz einer Menge von Ununterscheidbaren der Mächtigkeit κ herausarbeiten, wie wir dann in Lemma 5.37 sehen werden. Dazu aber zunächst eine Verstärkung der JÓNSSON-Eigenschaft:

Definition 5.35 *Eine Kardinalzahl κ heißt* stark JÓNSSON, *wenn $\kappa > \omega_1$ und für jede in $\mathcal{P}(\tau)$ stationär liegende Menge $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(\tau)$ auch $\mathcal{S}$ stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$ ist, wobei $\mathcal{S} := \{Y \in [\kappa]^\kappa \mid Y \cap \tau \in \overline{\mathcal{S}}\}$ und $\tau < \kappa$.*

[13] Im Englischen wird dieser Begriff als REMARKABLE bezeichnet.

Das folgende Lemma rechtfertigt das Attribut in dieser Bezeichnung.

Lemma 5.36 *Starke* JÓNSSON-*Kardinalzahlen sind insbesondere* JÓNSSON-*Zahlen.*

Beweis: Sei κ eine starke JÓNSSON-Kardinalzahl. Dann genügt es nach Lemma 5.30, die Menge $\mathcal{S} := \{Y \subsetneq \kappa \mid |Y| = \kappa\}$ als stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$ nachzuweisen. Sei dazu ein reguläres $\omega < \tau < \kappa$ beliebig gewählt. Dann wissen wir schon nach der Bemerkung 5.7, daß $\tau \subseteq \mathcal{P}(\tau)$ stationär in $\mathcal{P}(\tau)$ liegt. Somit ist nach Voraussetzung an κ aber auch $\overline{\mathcal{S}} := \{Y \subseteq \kappa \mid Y \cap \tau \in \tau \ \wedge \ |Y| = \kappa\}$ stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$, daher ist natürlich auch $\mathcal{S} \supseteq \overline{\mathcal{S}}$ stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$. ⊠(Lemma 5.36)

Wie versprochen können wir folgenden Zusammenhang zwischen beiden Kardinalzahlen ableiten.

Lemma 5.37 *Jede* RAMSEY-*Kardinalzahl ist eine starke* JÓNSSON-*Kardinalzahl.*

Beweis: Sei κ eine RAMSEY-Kardinalzahl, dann ist κ aufgrund seiner Unerreichbarkeit natürlich zumindest größer als ω_1. Für die restliche Behauptung wähle ein $\tau < \kappa$ und eine beliebige in $\mathcal{P}(\tau)$ stationär liegende Menge $\overline{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(\tau)$. Wir zeigen, daß die Menge $\mathcal{S} := \{Y \subseteq \kappa | Y \cap \tau \in \overline{\mathcal{S}} \wedge |Y| = \kappa\}$ stationär in $\mathcal{P}(\kappa)$ liegt. Sei dafür $\mathfrak{A} = \langle \kappa, f_i \ (i < \omega) \rangle$ eine Algebra auf κ. Wir werden ein Y in $[\kappa]^\kappa$ mit $Y \cap \tau \in \overline{\mathcal{S}}$ finden, das unter der Algebra $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist.

Nach Voraussetzung existiert für die Struktur $\mathfrak{A}$ eine Menge $\mathcal{I} := \{\kappa_i | i < \kappa\}$ von Ununterscheidbaren. Wenn nun das kleinste der κ_i, das sei o.B.d.A. κ_0, schon in τ läge, wären wir fast fertig, da wir die Stationarität auf $\mathcal{P}(\tau)$ ausnutzen möchten. Da die Abgeschlossenheit der Ununterscheidbaren unter Funktionen einer Algebra gleichwertig mit der Abgeschlossenheit eines einzelnen Ununterscheidbaren ist, könnten wir uns auf ein $\kappa_i < \tau$ beschränken. In jedem Fall können wir aber unsere gegebene Algebra derart verschieben, das dieses Ziel zumindest simuliert wird. Grob gesagt werden wir eine Algebra $\mathfrak{A}'$ angeben, die sich wie $\mathfrak{A}$ verhalten wird, allerdings wird sie denken, daß κ_0 schon unterhalb τ liegt.

Präziser gesagt führen wir die folgende Konstruktion durch: Sei $h : \tau \longrightarrow \tau \cup \{\kappa_0\}$ definiert durch

$$h(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1 & : \quad \text{falls } 0 < \alpha < \omega, \\ \alpha & : \quad \text{falls } \alpha \in \tau \setminus \omega, \\ \kappa_0 & : \quad \text{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

Wir verschieben also κ_0 unterhalb τ.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, mapsto] & 1 \arrow[r, mapsto] & 2 \arrow[r, mapsto] & \cdots \arrow[r, mapsto] & \omega \arrow[r, mapsto] & \cdots \arrow[r, mapsto] & \cdots \arrow[r, mapsto] & \kappa_0 \arrow[r, mapsto] & \cdots \\
0 \arrow[r, mapsto] \arrow[urrrrrrr, dotted, bend right, "h"] & 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[ul, dotted, "h"] & 2 \arrow[r, mapsto] \arrow[ul, dotted, "h"] & \cdots \arrow[r, mapsto] & \omega \arrow[r, mapsto] \arrow[u, dotted, "h"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Setze dann $\mathfrak{A}' := \langle \kappa, f_i \circ h \; (i < \omega) \rangle$, d.h. wir verschieben $\mathfrak{A}$ mittels h. Sei dann $\overline{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A}' \restriction \tau$ die Einschränkung von $\mathfrak{A}'$ auf τ. Auf $\overline{\mathfrak{A}}$ können wir nun die Voraussetzung anwenden. Sei dann $\overline{Y} \in \overline{S}$ eine unter $\overline{\mathfrak{A}}$ abgeschlossene Menge. Aufgrund der Konstruktion erhalten wir nun wie gewünscht, daß alle Funktionswerte von κ_0 unter den Funktionen aus $\mathfrak{A}$, die unterhalb τ liegen, offensichtlich schon in $\overline{Y}$ liegen. Wegen der harmlosen Verschiebung durch h ist $\overline{Y}$ natürlich insbesondere unter den Abbildungen der Algebra $\mathfrak{A} \restriction \tau$ abgeschlossen. Sei also Y dann der Abschluß von $\overline{Y} \cup \{\kappa_i \mid i < \kappa\}$ unter den Funktionen aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Y ist $\mathfrak{A}$-abgeschlossen.

(b) $|Y| = \kappa$, $Y \subseteq \kappa$.

(c) $Y \cap \tau \in \tilde{S}$,

dabei gilt (c) wegen $Y \cap \tau = \overline{Y}$, wobei wir für $(\subseteq)$ die Ununterscheidbarkeit der Elemente aus $\mathcal{I}$ nutzen, d.h. durch die größeren Ununterscheidbaren aus $\mathcal{I}$ kommen unterhalb τ keine neuen Funktionswerte hinzu. Damit haben wir das gesuchte Y gefunden. $\boxtimes$(Lemma 5.37)

Kapitel 6

Verallgemeinerte Häufige Erweiterbarkeit

6.1 Allgemeines

Wir werden jetzt in Analogie zum dritten Kapitel, nun aber mit den verallgemeinerten Begriffen der Stationarität aus dem fünften Kapitel, neue Versionen des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit formulieren; dabei werden wir trotz der allgemeineren Begriffe die Beweisidee des Theorems 3.10 imitieren können. Im Falle der Ordinalzahlbegriffe haben wir bewiesen, daß ausgehend von einer stationären Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{D}$, der Menge der Ordinalzahlen mit einer überabzählbaren Konfinalität, die Teilmenge von $\mathcal{S}$, deren Elemente gerade die nicht-fundierten Pseudo-Ultraprodukte indizieren, nicht stationär liegt. Damit gab es eine club Menge $\mathcal{C}$, so daß ausgehend von der stationären Menge $\mathcal{S}$ alle Ordinalzahlen in $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ eine fundierte Erweiterung indizierten.

Betrachten wir die Aussage des Theorems im Falle $\mathcal{S} := \mathcal{D}$, d.h. wenn wir *alle* Abbildungen heben, dann gibt es also eine club Menge, so daß die Elemente des Durchschnitts von $\mathcal{D}$ mit dieser club Menge nur fundierte Erweiterungen indizieren; darüber hinaus ist dieser Durchschnitt insbesondere überabzählbar abgeschlossen[1]; in der Tat sind für Teilmengen von $\mathcal{D}$ diese Begriffe äquivalent: Haben wir eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$, dann existiert eine club Menge $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ genau dann, wenn $\mathcal{T}$ unbeschränkt und überabzählbar abgeschlossen ist[2]. Im Zusammenhang mit

[1]Das heißt, daß Limespunkte einer Folge einer Länge mit überabzählbarer Konfinalität wieder in der betrachteten Menge enthalten sind.

[2]Für die Richtung von links nach rechts überlege man sich, daß ein überabzählbarer Limespunkt natürlich aufgrund der Abgeschlossenheit sofort in $\mathcal{C}$ liegen muß, aber andererseits hat er als Supremum einer streng monotonen überabzählbaren Folge auch eine überabzählbare Konfinalität. Für die andere Richtung nehme man den Abschluß $\mathcal{T}^*$ von $\mathcal{T}$ unter allen Limespunkten; dann ist diese Menge offenbar abgeschlossen, aber auch unbeschränkt, weil wir von einer solchen Menge

Ordinalzahlen ergeben also beide Formulierungen "Schnitt mit einer club Menge zu sein" und "unbeschränkt und überabzählbar abgeschlossen zu sein" die gleichen Teilmengen von $\mathcal{D}$. In unserer neuen Situation muß man etwas vorsichtiger sein; diese Problematik sollte bereits im letzten Kapitel zum Ausdruck gekommen sein, denn eine solche Äquivalenz hängt ganz erheblich von der genauen Formulierung der verallgemeinerten Begriffe ab. Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, daß wir eine unbeschränkte und überabzählbar abgeschlossene Menge finden können, die nur fundierte Pseudo-Ultraprodukte indiziert. Bei der anderen Variante nutzen wir eine Verschärfung des Stationaritätsbegriffs, wie wir diese im letzten Kapitel eingeführt haben, so daß wir mit deren Hilfe auch eine solche Version zeigen können. Zunächst aber werden wir die notwendigen Objekte bereitstellen.

Sei also γ regulär und überabzählbar und $\tau > \gamma$ mit und $\mathrm{cf}(\tau) < \gamma$ gegeben; sei zusätzlich eine Menge $\overline{X} \in [\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ gegeben. Wir definieren analog dem dritten Kapitel

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\overline{X}} := \{u \,|\, u \prec \mathbf{J}_\tau \wedge u \cap \gamma \text{ transitiv} \wedge \overline{X} \cup \{\gamma\} \subseteq u \wedge \sup(u \cap \mathrm{On}) = \tau \wedge |u| < \gamma\}.$$

Dann ist $\mathcal{C}$ offenbar eine schwach club Menge. Ursprünglich dünnten wir diese Menge zu der Menge $\mathcal{D}$ aus, indem wir uns auf Ordinalzahlen mit überabzählbarer Konfinalität beschränkten. Analysiert man den Beweis des Theorems 3.10 genauer, an welchen Stellen wir diese Eigenschaft ausnutzten, dann stellt sich heraus, daß wir geeignete abzählbare Mengen in den dort definierten X_β für Limespunkte β in der ursprünglichen Menge $\mathcal{C}$ schon in einem X_α für $\alpha \in \beta \cap \mathcal{C}$ finden wollten.

Diese Eigenschaft können wir aber in der neuen Situation nicht einfach außerhalb des Beweises garantieren[3], da wir zur Formulierung dieser Eigenschaft die in die Formulierung des Theorems eingehende Menge $\mathcal{S}'$ benötigen. Um dieser Zirkulation aus dem Wege zu gehen, schufen wir den stärkeren Stationaritätsbegriff, da die Menge, die wir später definieren werden eben nicht unter beliebigen abzählbaren Ketten abgeschlossen sein wird. Um den Sachverhalt dennoch so allgemein wie möglich zu halten, nutzen wir die gegebenen Werkzeuge für eventuelle Relativierungen dieses Begriffs. Damit wir eine solche Relativierungsmenge im Beweis trotzdem noch im Griff haben, schränken wir diese in der Auswahl ein und definieren daher

Definition 6.1 *Eine Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ heißt schön, wenn sie stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ liegt und es eine überabzählbar konfinale Limeszahl δ gibt, so daß für jedes $u_{i+1} \supseteq v_i$ eine Obermenge $v_{i+1} \supseteq u_{i+1}$ existiert, wobei $v_0 := \varnothing$ und $v_\lambda := \bigcup_{i<\lambda} v_i$ für Limeszahlen λ gelte, mit $\bigcup_{i<\delta} v_i \in \mathcal{D}$ existiert.*

---

gestartet sind. Darüber hinaus erhalten wir mit $\mathcal{T}^* \cap \mathcal{D}$ gerade die Menge $\mathcal{T}$, wobei für $(\subseteq)$ eingeht, daß überabzählbare Limespunkte von $\mathcal{T}$ schon in $\mathcal{T}$ enthalten gewesen sein müssen und die in $\mathcal{T}^*$ zusätzlichen abzählbaren Limespunkte durch den Durchschnitt mit $\mathcal{D}$ herausgefiltert werden.

[3] Bei den Ordinalzahlen war es aufgrund der sehr schönen Struktur derselben ohne weiteres möglich.

Insbesondere liegt eine solche Menge nach früheren Überlegungen stationär in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$. Es gibt viele interessante schöne Mengen, so ist natürlich die ganze Menge $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ schön. Da wir eine schwache Art der Abgeschlossenheit fordern, erfüllen insbesondere club Mengen, schwach $\mathcal{S}$-club Mengen für eine stationäre Menge $\mathcal{S}$, club* Mengen oder einfach nur δ-abgeschlossene Mengen, d.h. abgeschlossen unter echten Ketten der Länge δ, wobei δ eine überabzählbare Konfinalität besitzt, diese Bedingung; darüber hinaus erfüllt zum Beispiel die in diesem Zusammenhang interessante[4] Menge $\{u \in \mathcal{C} \mid (\forall \lambda \in u)(\operatorname{cf}(\lambda) > \omega \longrightarrow \operatorname{cf}(\operatorname{otp}(u \cap \lambda)) > \omega)\}$ diese Bedingung, da wir immer eine Kette konstruieren können, so daß wir in jedem Schritt für ein Kettenelement u den Schnitt $u \cap \lambda$ echt vergrößern. Dann ist der Limes einer solchen Kette einer Länge mit überabzählbarer Konfinalität offenbar in dieser Menge.

Noch eine Bemerkung zu der obigen Definition; die eingehende Forderung bezüglich der Stationarität* ist für den Fall, daß es schon ein solches $\delta < \gamma$ gibt, irrelevant, da sie in diesem Fall sowieso erfüllt ist, denn für eine club* Menge können wir eine Kette konstruieren, die abwechselnd eine Obermenge aufgrund der Schönheit und andererseits ein Element aus der club* wählt. Dann wird offenbar die Vereinigung in beiden Mengen sein.

Wir definieren für $u \in \mathcal{C}$ erneut die in das Theorem eingehenden Einbettungen $\sigma_u : \mathbf{J}_{\tau_u} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} u$ und $\gamma_u := u \cap \gamma$. Dann ist[5] $\gamma_u = \operatorname{crit}(\sigma_u)$ und $\sigma_u(\gamma_u) = \gamma$. Weiterhin sei für $u' \subseteq u$ in $\mathcal{D}$ eine Abbildung $\sigma_{u'u} : \mathbf{J}_{\tau_{u'}} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau_u}$ durch $\sigma_{u'u} := \sigma_u^{-1}\sigma_{u'}$ definiert. Damit haben wir alle Werkzeuge zur Formulierung der Lemmata bereitgestellt.

6.2 Varianten der Verallgemeinerung

Wir werden nun unter den obigen Bezeichnungen die folgende Version des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit zeigen:

Theorem 6.2 (Version 2) *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ nun $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, wobei $\mathcal{D}$ eine schöne Menge ist. Wähle zu $u \in \mathcal{S}$ ein $\mu_u \geq \tau_u$, so daß τ_u eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_u}$ ist. Sei dann $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathfrak{A}_u$ die kanonische Erweiterung von σ_u. Dann liegt $\mathcal{S}' := \{u \in \mathcal{S} \mid \mathfrak{A}_u$ ist nicht fundiert$\}$ nicht $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.* $\mathcal{S}'$

[4]Um das Interesse zu wecken, betrachten wir beispielsweise die analoge Menge, in der wir die Absolutheitsbedingung nicht für alle λ aus u fordern, sondern nur für $\lambda := \gamma$, dann besteht diese Menge aufgrund der überabzählbaren Konfinalität von γ gerade aus den Submodellen u, für die $\operatorname{cf}(\gamma_u) > \omega$ ist. Übersetzt in die Situation aus dem dritten Kapitel betrachten wir gerade die Menge der Ordinalzahlen, für die $\gamma_\alpha = \alpha$ eine überabzählbare Konfinalität besitzt; also unsere Grundmenge $\mathcal{D}$.

[5]Wegen $|u| < \gamma$ ist $\operatorname{crit}(\sigma_u) < \gamma$.

Diese Version ist also mit der entsprechenden Stationarität gerade das Äquivalent zu der analogen Version bei den Ordinalzahlen; außerdem können wir daraus interessante Varianten ableiten, wobei wir mit den folgenden drei Korollaren eine Auswahl treffen möchten; mit dieser obigen Version konnten wir eine ganz allgemeine Variante mit Hilfe dieser Begriffe finden. Setzen wir nun $\mathcal{S} := \mathcal{C}$ und $\mathcal{D} := [\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, so erhalten wir sofort das folgende

Korollar 6.3 (Version 2a) *Wähle wie oben für jedes $u \in \mathcal{C}$ die Werte τ_u und μ_u sowie die Abbildungen $\tilde{\sigma}_u$, dann existiert eine überabzählbar abgeschlossene und unbeschränkte Teilmenge von $\mathcal{C}$, deren Elemente nur fundierte Pseudo-Ultraprodukte indizieren.*

Setzen wir nur $\mathcal{D} := [\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, so erhalten wir in einer Umformulierung:

Korollar 6.4 (Version 2b) *Für jede stationäre* Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{C}$ wähle die Werte τ_u und μ_u sowie die Abbildungen $\tilde{\sigma}_u$ wie oben, dann existiert eine überabzählbar abgeschlossene Menge $\mathcal{T}$, so daß die Elemente der stationär* – und damit auch stationär – liegenden Menge $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ nur fundierte Pseudo-Ultraprodukte indizieren.*

Da jede Menge $\mathcal{D}$ immer selbst $\mathcal{D}$-stationär* ist, wissen wir nach dem obigen Theorem, daß die Menge $\{u \in \mathcal{D} \mid \mathfrak{A}_u \text{ ist nicht fundiert}\}$ für schönes $\mathcal{D}$ in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ nicht $\mathcal{D}$-stationär* liegt; darüber hinaus wissen wir, daß diese Menge auch nicht stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ liegt: wähle dafür $\mathcal{S} := \mathcal{D}$ und keine Relativierungsmenge im obigen Theorem. Das sind zwei verschiedene Begriffe, so daß wir die folgende Version erhalten.

Korollar 6.5 (Version 2c) *Wähle für eine schöne Teilmenge $\mathcal{D}$ von $\mathcal{C}$ wie oben die Werte τ_u und μ_u sowie die Abbildungen $\tilde{\sigma}_u$, dann existiert eine überabzählbar abgeschlossene Menge $\mathcal{T}$, so daß $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ eine $\mathcal{D}$-stationäre*, stationäre* und stationäre Teilmenge ist, deren Elemente nur fundierte Pseudo-Ultraprodukte indizieren.*

Diese Version 2c ist wirklich eine durch die Relativierung zustande gekommende Variante, denn man könnte auch versuchen, da ein schönes $\mathcal{D}$ immer auch stationär* ist, eine solche Version schon aus dem Theorem mit dem Szenario: $\mathcal{S}$ sei jetzt die Menge $\mathcal{D}$ und wir relativieren nicht, d.h. die dort auftretende Relativierungsmenge ist $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, zu erhalten, aber dann bekommt man nur, daß die Menge $\{u \in \mathcal{D} \mid \mathfrak{A}_u \text{ ist fundiert}\}$ stationär* ist. Mit der Relativierung erhalten wir wie im letzten Korollar, daß diese Menge sogar $\mathcal{D}$-stationär* ist und das ist in diesem Fall eine wirkliche Verstärkung, denn für schönes $\mathcal{D}$ sind club* auch immer $\mathcal{D}$-club* Mengen[6], was im allgemeinen aufgrund der fehlenden Implikation bei der

[6]Die Abgeschlossenheitsbedingung ist offensichtlich; für die $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit konstruiere man sich eine Kette, die abwechselnd ein Element aus der club Menge und andererseits die aufgrund der Schönheit existierende Obermenge wählt, so daß schließlich die Vereinigung derselben aufgrund der Abgeschlossenheit in der club Menge und andererseits wegen der Schönheit auch in $\mathcal{D}$ liegt.

Unbeschränktheitseigenschaft nicht gilt[7]. Somit sind für schöne Mengen $\mathcal{D}$ die $\mathcal{D}$-stationäre* Mengen auch immer stationär* und damit erst recht stationär.

An dieser Stelle möchten wir schon darauf hinweisen, daß wir im folgenden Kapitel gerade zeigen werden, daß die analoge Form von dem noch zu beweisenden obigen Theorem mit dem Begriff *stationär* anstelle von *stationär** nicht in ZFC beweisbar ist, wenn ZFC mit $0^\#$ konsistent ist.

Beweis des Theorems 6.2: Wir werden den Beweis erneut in zwei Teile spalten.

Fall 1: $\mathrm{cf}(\tau) = \omega$.

Um einen Widerspruch zu provozieren, nehmen wir das Gegenteil an; sei also $\mathcal{S}'$ doch $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$. Um nun unser Ziel zu erreichen, werden wir im wesentlichen die Beweisstruktur des alten Beweises von Theorem 3.10 imitieren. Sei daher $\mu_u > \tau_u$ minimal gewählt, so daß $\mathfrak{A}_u$ nicht fundiert ist. Sei $\tilde{\sigma}_{u'u}$ die kanonische Erweiterung von $\sigma_{u'u}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\mu_{u'}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}_{u'u}", "\Sigma_0"'] & \mathfrak{A}_{u'u} \\
\mathbf{J}_{\tau_{u'}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma_{u'u}", "\Sigma_0"'] & \mathbf{J}_{\tau_u} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Nun haben wir an dieser Stelle im alten Beweis eine stationäre Menge definiert, die einerseits nur Ordinalzahlen mit überabzählbarer Konfinalität enthielt, darüber hinaus waren aber sowohl die $\mathfrak{A}_\alpha$ als auch $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ für α und β aus dieser Menge nicht fundiert[8]. Wir müssen erneut versuchen, diese Eigenschaften in unserem Zusammenhang geeignet zu simulieren, so daß wir daher die folgende Menge definieren.

$$\mathcal{D}' := \{ u \in \mathcal{C} \mid (\forall X \subseteq u)(\quad |X| = \omega \qquad \longrightarrow$$ $\mathcal{D}'$

$$(\exists u' \in \mathcal{S}')(u' \subseteq u \wedge u' \neq u \wedge X \subseteq u' \wedge \mathfrak{A}_{u'u} \text{ ist nicht fundiert})) \}.$$

Wir können nach Definition für $u' \in \mathcal{S}'$ und $u \in \mathcal{C}$ mit $u' \subseteq u$ immer das Pseudo-Ultraprodukt $\mathfrak{A}_{u'u}$ betrachten, so daß wir dafür nicht zusätzlich $u \in \mathcal{S}'$ benötigen. Das ist noch nicht ganz die gesuchte Menge, um dem alten Beweis treu zu bleiben, da wir dort eigentlich $\mathcal{D}' \cap \mathcal{S}'$ als stationär nachgewiesen haben, aber von dieser Eigenschaft benötigten wir lediglich, daß es eine nicht-leere Menge ist. Ist $\mathcal{D}'$ nun $\mathcal{D}$-club*, dann ist aber $\mathcal{D}' \cap \mathcal{S}'$ wie gewünscht nicht leer. Somit zeigen wir nur:

(6.2.1) $\quad \mathcal{D}'$ ist $\mathcal{D}$-club* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.

[7] Im allgemeinen sind unbeschränkte Mengen nicht $\mathcal{D}$-unbeschränkt, falls $\mathcal{D}$ nicht hinreichende Eigenschaften besitzt.

[8] Hierbei entsprechen sich jeweils nach Definition die Pseudo-Ultraprodukte $\mathfrak{A}_\alpha$ und $\mathfrak{A}_u$ bzw. $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{A}_{u'u}$, vergleiche den Beweis des Theorems 3.10

BEWEIS VON (6.2.1): Die überabzählbare $\mathcal{D}$-Abgeschlossenheit ist leicht zu überprüfen; nehmen wir an, wir hätten eine echt aufsteigende Kette $\langle u_i \mid i < \zeta \rangle$ der Länge $\zeta < \gamma$ mit $\mathrm{cf}(\zeta) > \omega$ von Elementen aus $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}$ und sei $u := \bigcup \{u_i \mid i < \zeta\}$. Wir zeigen, daß u ebenfalls in $\mathcal{D}'$ liegt; dabei liegt u natürlich wegen der Abgeschlossenheitsbedingung von $\mathcal{C}$ sofort selbst in $\mathcal{C}$. Dann liegt aber eine abzählbare Teilmenge $X \subseteq u$ wegen der überabzählbaren Konfinalität von ζ beschränkt in der Vereinigung, d.h. wir können ein $i < \zeta$ finden, so daß X schon ganz in u_i zu finden ist. Wegen $u_i \in \mathcal{D}'$ existiert dann nach Definition ein $u' \in \mathcal{S}'$, so daß $X \subseteq u' \subsetneq u_i$ und $\mathfrak{A}_{u' u_i}$ nicht fundiert ist. Dann ist aber nach Konstruktion $\mathfrak{A}_{u' u}$ natürlich insbesondere auch nicht fundiert[9], so daß letztendlich u schon wie gewünscht in $\mathcal{D}'$ liegt.

u^* Wir zeigen noch die $\mathcal{D}$-Unbeschränktheit von $\mathcal{D}'$. Sei dazu ein $u^* \in [\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ gegeben; wir konstruieren eine echte Obermenge $u \in \mathcal{D}'$, welche zusätzlich auch noch in $\mathcal{D}$ liegt. Dafür betrachten wir zunächst die folgende Hilfsaussage:

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für } \theta > \tau \text{ regulär existiert ein } X \prec H_\theta \text{ mit } \mathbf{J}_\tau \in X \text{ und} \\ u^* \cup \{u^* \cap \gamma\} \subseteq X,\ X \cap \mathbf{J}_\tau \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}. \end{array} \right.$$

u Mit $(\star)$ folgt nun offenbar die Behauptung, indem wir $u := X \cap \mathbf{J}_\tau$ ansetzen.

BEWEIS VON $(\star)$: Wir definieren eine aufsteigende Familie $\langle X_\nu \mid \nu < \delta \rangle$, wobei δ die aufgrund der Schönheit von $\mathcal{D}$ gegebene Kardinalzahl mit einer überabzählbaren Konfinalität ist, wie folgt:

$X_0 :=$ das kleinste $X \prec H_\theta$ mit $u^* \cup \{u^* \cap \gamma, \mathbf{J}_\tau\} \subseteq X$.

$X_{3\nu+1} :=$ das kleinste $X \prec H_\theta$ mit $\{X_{3\nu}\} \cup X_{3\nu} \subseteq X$.

$X_{3\nu+2} := \{X_{3\nu+1}\} \cup X_{3\nu+1} \cup Y_{3\nu+1}$, wobei $Y_{3\nu+1}$ die aufgrund der Schönheit von $\mathcal{D}$ gegebene Obermenge von $X_{3\nu+1} \cap \mathbf{J}_\tau$ ist.

$X_{3\nu+3} := \{X_{3\nu+2}\} \cup X_{3\nu+2} \cup Y_{3\nu+2}$, wobei $Y_{3\nu+2}$ die aufgrund der Unbeschränktheit gegebene Obermenge von $X_{3\nu+2} \cap \mathbf{J}_\tau$ in $\mathcal{S}'$ ist.

$X_\lambda := \bigcup_{\nu<\lambda} X_\nu$ für Limeszahlen λ.

X Wir zeigen nun, daß $X := X_\delta$ die gewünschten Eigenschaften aus $(\star)$ erfüllt. Offensichtlich ist X als Limes der Kette $X_{3\nu+1}$ ein elementares Submodell von H_θ und außerdem ist u^* eine Teilmenge von X. Darüber hinaus ist $X \cap \mathbf{J}_\tau$ als Vereinigung der $X_{3\nu+2} \cap \mathbf{J}_\tau$ nach Konstruktion und aufgrund der Schönheit von $\mathcal{D}$ selbst ein Element von $\mathcal{D}$ und damit insbesondere von $\mathcal{C}$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß u in $\mathcal{D}'$ liegt. Sei also ein abzählbares $Z \subseteq u$ gegeben. Dann ist dieses

[9] Die zur Konstruktion der absteigenden Folge benötigten Objekte hängen nur von u' ab, nämlich genauer gesagt von $\tau_{u'}$ und $\mu_{u'}$; außerdem gilt nach Definition $\sigma_{u' u_i}(x) \subseteq \sigma_{u' u}(x)$ für beliebige $x \in \mathbf{J}_{\tau_{u'}}$. Das ist alles, was wir für den Nachweis der Nichtfundiertheit von $\mathfrak{A}_{u' u}$ benötigen.

nach Konstruktion[10] in der durch X gegebenen Vereinigung einer Kette beschränkt und es existiert innerhalb der Konstruktion ein Nachfolgerschritt $3\nu + 3 < \delta$ mit $Z \subseteq X_{3\nu+3}$ für ein $\nu < \delta$. Weil aber sowohl $X_{3\nu+3}$ als auch $\mathbf{J}_\tau$ in X liegen, ist auch $u' := X_{3\nu+3} \cap \mathbf{J}_\tau \in X$. Außerdem gilt nach Konstruktion $u \supsetneq u' \in \mathcal{S}'$.

Wir müssen noch zeigen, daß $\mathfrak{A}_{u'u}$ nicht fundiert ist. Sei dazu $\sigma : H \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$ mit H transitiv der (inverse) Mostowski-Kollaps. Sei weiterhin $\sigma(\overline{\tau}) = \tau$ und $\sigma(\overline{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}'$. Für $\overline{u} \in \overline{\mathcal{S}}$ seien $\overline{\tau}_{\overline{u}}$ und $\overline{\mu}_{\overline{u}}$ wie τ_u und μ_u definiert; insbesondere gilt $\sigma(\overline{\tau}_{\overline{u}}) = \tau_{\sigma(\overline{u})}$ und $\sigma(\overline{\mu}_{\overline{u}}) = \mu_{\sigma(u)}$. Sei weiterhin $\sigma(\overline{\mathfrak{A}}_{\overline{u}}) = \mathfrak{A}_{\sigma(\overline{u})}$ und $\sigma(\overline{u}) = u'$. Dann ist $\overline{u} \in \overline{S}$. Wegen der Absolutheit der Fundiertheit ist mit $\mathfrak{A}_{u'}$ auch $\overline{\mathfrak{A}}_{\overline{u}}$ nicht fundiert. Außerdem wissen wir, daß τ_u gleich $\overline{\tau}$ ist, weil beide Transitivierungen von $X \cap \tau$ sind (und diese als Mostowski-Kollapse natürlich eindeutig sind), und daß $\tau_{u'}$ gleich $\overline{\tau}_{\overline{u}}$ ist, weil beide Transitivierungen von u' bzw. $\overline{u}$ sind. Darüber hinaus können wir $\overline{u}$ in $\mathbf{J}_{\overline{\tau}}$ einbetten, da das gleiche auch für u und $\mathbf{J}_\tau$ gilt. Somit erhalten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\tau_{u_\lambda}} \arrow[rr, "\sigma_{u'u}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dd, equal] & & \mathbf{J}_{\tau_u} \arrow[dl, leftrightarrow, "\sim"'] \arrow[dd, equal] \\
 & u' \subseteq u & \\
\mathbf{J}_{\overline{\tau}_{\overline{u}}} \arrow[r, leftrightarrow, "\sigma_{\overline{u}}"'] & \overline{u} \arrow[r, hook] & \mathbf{J}_{\overline{\tau}}
\end{tikzcd}$$

Da aber $\mathfrak{A}_{\overline{u}}$ nicht fundiert ist, kann auch $\mathfrak{A}_{u'u}$ nicht fundiert sein, wenn man sich überlegt, wie die kanonische Erweiterung definiert ist[11]. Also ist $u \in \mathcal{D}'$. $\boxtimes(\star)$

$\boxtimes$ (6.2.1)

Mit dieser Vorarbeit haben wir alle Eigenschaften erarbeitet, um im weiteren Verlauf die Ausführungen im alten Beweis nutzen zu können, so daß wir für den Rest dieses Beweises nur den roten Faden angeben müssen, der sich aber mit den alten entsprechenden[12] Teilbeweisen vervollständigen läßt. Wir wählen ein hinreichend[13] großes und reguläres θ und ein abzählbares $Y \prec H_\theta$ mit $\mathcal{D}', \langle \sigma_u \mid u \in \mathcal{D} \rangle \in Y$. Sei $\pi : H \overset{\sim}{\longleftrightarrow} Y$ mit H transitiv der (inverse) Mostowski-Kollaps. Sei $\pi(\overline{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}' \cap S'$ H
und $\overline{u} \in \overline{\mathcal{D}}$; dabei ist die Existenz von $\overline{u}$ wegen (6.2.1) und der $\mathcal{D}$-Stationarität* $\overline{u}$

[10] Offenbar ist X eine Vereinigung einer echt aufsteigenden Kette der Länge δ, wobei δ nach Wahl eine überabzählbare Konfinalität besitzt.

[11] Die Funktionen, die eine absteigende ω-Folge bezeugen, sind auch an der Konstruktion von $\mathfrak{A}_{u'u}$ beteiligt, wenn sie das bei der von $\mathfrak{A}_{u'}$ waren; diese kommen nämlich gerade aus $\mathbf{J}_{\overline{\tau}_{\overline{u}}} = \mathbf{J}_{\tau_{u'}}$.

[12] Die alten Teilbeweise sind dabei fast wörtlich in dem aktuellen Zusammenhang mit den neuen Begriffen übertragbar.

[13] Das heißt so groß, daß alle relevanten Objekte enthalten sind.

von $\mathcal{S}'$ garantiert. Im ursprünglichen Beweis haben wir an dieser Stelle einen Limespunkt aus der stationären Menge gewählt. Die Eigenschaft, die wir von diesem Limespunkt schon im nächsten Absatz ausnutzen werden, haben wir bereits in die etwas kompliziertere Definition von $\mathcal{D}'$ hineingesteckt, so daß wir hier an $\overline{u}$ keine
u weiteren Forderungen stellen müssen. Setze $u := \pi(\overline{u}) \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{S}'$. Sei weiterhin
$\overline{\tau}, \overline{\mu}$ $\pi(\overline{\tau}) = \tau_u$ und $\pi(\overline{\mu}) = \mu_u$.

Setze nun $X := \sigma_u \text{''}\, \pi \text{''}\, \mathbf{J}_{\overline{\tau}}$; dann ist X eine abzählbare Teilmenge von u, so daß
u' nach Definition von $\mathcal{D}'$ ein $u' \in S'$ existiert, so daß $u' \subsetneq u$, $X \subseteq u'$ und $\mathfrak{A}_{u'u}$ nicht fundiert ist. Nun gilt aber $\pi \text{''}\, \mathbf{J}_{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{J}_{\tau_u}$ und $\sigma_{u'} = \sigma_u \restriction \mathbf{J}_{\tau_u}$, also haben wir auch
σ $\pi \text{''}\, \mathbf{J}_{\overline{\tau}} \subseteq \mathbf{J}_{\tau_{u'}}$, so daß $\sigma := \sigma_{u'u}^{-1} \pi \restriction \mathbf{J}_{\overline{\tau}}$ sinnvoll definiert ist. Dann gilt aufgrund der Erhaltungsstärken der beiden beteiligten Abbildungen $\sigma : \mathbf{J}_{\overline{\tau}} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\tau_{u'}}$. Wir bilden nun die kanonische Erweiterung von σ und konstruieren derart das Pseudo-Ultraprodukt $\mathfrak{A}'$, so daß wir ein Diagramm wie in Abbildung 1 erhalten: Dann können wir aber wie
σ' im alten Beweis eine Abbildung $\sigma' : \mathfrak{A}' \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\mu_u}$ durch $\sigma'(\,[\xi, f]\,) = \pi(f)(\,\sigma_{u'u}(\xi)\,)$ definieren, so daß wir erhalten:

(6.2.2) $\mathfrak{A}'$ ist fundiert.

μ Daher finden wir ein μ mit $\mathfrak{A}' = \mathbf{J}_\mu$. Wir wollen nun erneut zeigen, daß $\mu_{u'} \leq \mu$ ist. Entweder ist $\tau_{u'}$ keine Kardinalzahl in μ_u, dann gilt diese Gleichung offenbar; im anderen Fall sei $\underline{\sigma}$ die kanonische Erweiterung von $\sigma_{u'}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\overline{\mu}} \arrow[r, dotted, "\tilde{\sigma}", "\Sigma_0"'] & \mathfrak{A}' \\
\mathbf{J}_{\overline{\tau}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma", "\Sigma_\omega"'] & \mathbf{J}_{\tau_u} \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{J}_{\mu} \arrow[r, dotted, "\underline{\sigma}", "\Sigma_0"'] & \mathfrak{A} \\
\mathbf{J}_{\tau_{u'}} \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\sigma_{u'}", "\Sigma_\omega"'] & u' \arrow[u, dotted, "\subseteq"']
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1 Abbildung 2

Benutzt man, daß $\mathfrak{A}_{u'}$ nicht fundiert ist, dann zeigt der alte Beweis von (3.4.6), daß $\mathfrak{A}$ nicht fundiert ist, womit wieder aus Gründen der Minimalität von $\mu_{u'}$ auch in diesem Fall sofort $\mu_{u'} \leq \mu$ folgt. Wie im damaligen Beweis können wir abschließend eine geeignete Abbildung $\sigma' : \mathbf{J}_\mu \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathbf{J}_{\mu_u}$ angeben, die wie im Beweis für (6.2.2) definiert ist, um $\mathfrak{A}_{u'u}$ durch σ'' auf eine Σ_0-erhaltende Art und Weise in $\mathbf{J}_{\mu_u}$ einzubetten; dabei ist diese zweite Abbildung durch $\sigma''([\xi, f]) := \sigma'(f)(\xi)$ definiert, wobei diese Definition wegen $f \in \mathbf{J}_{\mu_{u'}} \subseteq \mathbf{J}_\mu$ natürlich erst durch die Ungleichung $\mu_{u'} \leq \mu$ sinnvoll wird. Damit ist $\mathfrak{A}_{u'u}$ offensichtlich doch fundiert. Widerspruch! ⊠(Fall 1)

Fall 2: $\mathrm{cf}(\tau) > \omega$.

An dieser Stelle müssen wir keine neue Arbeit verrichten, denn wir können den alten Beweis dieses Falls genauso übernehmen, denn wir haben diesen Fall auf den ersten zurückgeführt, indem wir ein $\tau' < \tau$ gefunden haben, daß sich wie τ im ersten Fall verhält, d.h. wir haben die Einbettungsbeziehungen und eine abzählbare Konfinalität. Die einzige Eigenschaft, die wir dort vom alten Stationaritätsbegriff ausnutzten, war der Satz von FODOR; den jedoch haben wir in seiner vollen Stärke in Lemma 5.23 bereitstellen können[14]. ⊠(Fall 2)

⊠(Theorem 6.2)

Wie schon in der ersten Version im dritten Kapitel, zeigt der gleiche Beweis auch die feinstrukturelle Variante des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit. Der Beweis kann auch hier wörtlich übernommen werden, wenn wir erneut das Korollar 1.56 zu Rate ziehen, welches eine Aussage über die Erweiterung einer Einbettung π auf eine geeignete gute Funktion f macht, obwohl f eventuell zunächst nicht im Definitionsbereich liegt. Damit erhalten wir unter den Bezeichnungen von oben das folgende

Theorem 6.6 (Version 2 – FS) *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ wieder $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, wobei $\mathcal{D}$ eine schöne Menge ist. Wähle zu $u \in S$ ein $\mu_u \geq \tau_u$, so daß τ_u eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_u}$ ist. Sei dann $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathfrak{A}_u$ die kanonische feinstrukturelle Erweiterung von σ_u. Dann liegt $\mathcal{S}' := \{u \in S \mid \mathfrak{A}_u \text{ ist nicht fundiert}\}$ nicht $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.*

Insbesondere erhalten wir die analogen Korollare, die wir auch von Theorem 6.2 ziehen konnten.

Wie versprochen können wir nun den Kreis unserer Motivation für diese Verallgemeinerung wieder schließen, indem wir versuchen, diese Version für den Beweis des Überdeckungslemmas auszunutzen. Und tatsächlich, wir können den Beweis wiederholen. Wir möchten jetzt, ohne erst in eine FORCING-Erweiterung übergehen zu müssen, einen Widerspruch im ursprünglichen Universum ableiten. Das war im alten Beweis schwierig, da wir zur Anwendung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit auf diese (eventuell generisch erzeugte) Surjektion schon zur Formulierung angewiesen waren. Anstatt elementare Submodelle über den Umweg der Ordinalzahlen zu betrachten, werden wir jetzt die geeigneten Submodelle selbst ins Auge fassen.

Wir sind also innnerhalb des Beweises vom Überdeckungslemma in der folgenden Situation: eine Ordinalzahl τ mit einer abzählbaren Konfinalität war derart minimal gewählt worden, so daß es ein konfinal in τ liegendes Gegenbeispiel $X \subseteq \tau$ gab. Sei nun $\lambda := |X|$, dann gilt $\omega_2 \leq \lambda < \tau$. Setze $\gamma := \lambda^+$; dann ist auch γ wegen seiner Regularität echt kleiner als τ. Wir führen den Beweis des Überdeckungslemmas fort

[14]Hier geht natürlich erneut wesentlich ein, daß wir $\mathcal{D}$ als eine stationäre* Menge vorausgesetzt haben.

und definieren die Einbettungen σ_u wie am Ende des ersten Abschnitts, so daß wir die τ_u erhalten. Setze dann $\mathcal{T} := \{u \in \mathcal{C}_X \mid \tau_u$ ist eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}\}$. Nehmen wir erneut im Fall 2.1 an, daß $\mathcal{T}$ jetzt stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ liegt, dann erhalten wir durch wie im alten Beweis aufgrund der neuen Variante des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit in Korollar 6.4 eine nicht-triviale Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$ uns damit letztendlich $0^\#$. Widerspruch!

Im anderen Fall 2.2 ist nun $\mathcal{S} := \mathcal{C}_X \setminus \mathcal{T}$ aber aufgrund des Schubfachsprinzips[15] selbst stationär*. Wir erhalten auf die gleiche Weise die μ_u für $u \in \mathcal{S}$. Das Lemma über die häufige Erweiterbarkeit in der feinstrukturellen Variante garantiert uns dann die Existenz eines $u \in \mathcal{S}$ und eines $\tilde{\mu}$, so daß $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathbf{J}_{\tilde{\mu}}$ die kanonische feinstrukturelle Erweiterung von σ_u ist. Der Widerspruch folgt dann exakt wie im alten Beweis.

Mehr war aber nicht zu zeigen, so daß wir schließlich folgende Bemerkung machen können:

Bemerkung 6.7 *Für den Beweis des Überdeckungslemmas genügt diese Version des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit.*

[15]Offenbar ist $\mathcal{C}_X$ selbst stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, so daß wir das Schubfachprinzip anwenden können.

Kapitel 7

Notwendigkeit der Einschränkung

Als Abrundung wird es in diesem Kapitel darum gehen zu belegen, daß die vorgestellten Varianten des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit von Einbettungen optimal in ihrer Ausdrucksstärke bewiesen wurden, denn beide Einschränkungen, in Theorem 3.10 auf Teilmengen von $\mathcal{D}$, der Menge der Ordinalzahlen mit einer überabzählbaren Konfinalität, und in Theorem 6.2 auf stationäre* Mengen anstelle von stationären, werden sich als notwendig herausstellen.

Wir werden daher in einem geeigneten Universum, ausgehend von der Annahme, daß $0^\#$ mit ZFC konsistent ist, eine stationäre Menge konstruieren, deren Elemente nur nicht-fundierte Pseudo-Ultraprodukte indizieren und jeweils ordinale Höhen mit abzählbarer Konfinalität haben; damit ist diese Menge nicht stationär*, denn es schneidet die Menge aller Submodelle mit einer überabzählbar konfinalen ordinalen Höhe nicht, welche natürlich offenbar club* ist. Im zweiten Abschnitt nutzen wir diese Aussage aus, um auch die entsprechende Behauptung für das Theorem 3.10 zu erhalten. Der dritte und letzte Abschnitt wird sich anschließend mit der Konstruktion der geeigneten partiellen Ordnung beschaffen, mit der wir schließlich erzwingen, um die Gegenbeispiele zu erhalten.

7.1 Konstruktion des Gegenbeispiels

Sei (†) unter den Bezeichnungen von Theorem 6.2 die nun folgende Aussage; dabei vergleiche man diese mit der genauen Formulierung des Theorems für den Fall $\mathcal{D} := [\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.

(†): Für eine in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ stationär liegende Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ wähle zu $u \in \mathcal{S}$ ein $\mu_u \geq \tau_u$, so daß τ_u eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_u}$ ist; sei weiterhin $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathfrak{A}_u$ die kanonische

Erweiterung von σ_u. Dann liegt $\mathcal{S}' := \{u \in \mathcal{S} \,|\, \mathfrak{A}_u \text{ ist nicht fundiert}\}$ nicht stationär in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Aussage (†) als eine Verallgemeinerung des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit zumindest mit einer zusätzlichen Annahme über das Ausgangsuniversum $\mathbf{V}$ bezüglich (kleiner) Großer Kardinalzahlen in ZFC nicht bewiesen werden kann. Dazu nehmen wir uns ein Universum, in dem $0^\#$ existiert. Wir möchten zeigen, daß wir dann ein Universum konstruieren können, in dem (†) nicht gelten kann. Wir wissen zwar nicht, ob ein solches Ausgangsuniversum existiert, aber dennoch hätten wir dann zumindest gezeigt, daß die Konsistenzstärke von "$\mathsf{ZFC}+ \neg(\dagger)$" kleiner gleich der von "$\mathsf{ZFC}+ 0^\#$" ist. Damit kommt die Aussage $\neg(\dagger)$ relativ früh in der Hierarchie der Großen Kardinalzahlen; kann also kein Theorem von ZFC sein, wenn $0^\#$ mit ZFC konsistent ist.

Mit dieser Voraussetzung an das Universum wissen wir aber nach Theorem 1.75,
γ daß wir dann die SILVER-Ununterscheidbaren bekommen. Sei γ regulär in $\mathbf{V}$, dann ist γ insbesondere auch das γ-te SILVER-Ununterscheidbare. Darüber hinaus setze
τ $\tau := (\,\gamma^{+\omega}\,)^{\mathbf{L}}$, dabei bezeichne $(\,\gamma^{+\omega}\,)^{\mathbf{L}}$ den ω-ten kardinalen Nachfolger aus der Sicht von $\mathbf{L}$. Dann hat τ offensichtlich schon in $\mathbf{L}$ eine abzählbare Konfinalität. Mit diesen fixierten Größen können wir nun mit der Konstruktion des Gegenbeispiels
$\mathbb{P}_\alpha$ beginnen. Wir werden für $\alpha \leq \gamma$, α unerreichbar in $\mathbf{L}$, partielle Ordnungen $\mathbb{P}_\alpha$ angeben, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen.

$$(7.1.1)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \textsf{(Faktorisierung)} & \mathbb{P}_\gamma = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma. \\[2ex] \textsf{(Uniformität)} & \begin{array}{l} \text{Es existiert eine Formel } \Phi(x) \text{ in der Sprache der} \\ \text{Mengenlehre, so daß } \mathbb{P}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha \text{ die eindeutig be-} \\ \text{stimmte } \mathbf{L}_\alpha\text{-Klasse mit } \mathbb{P}_\alpha = \{x \mid \mathbf{L}_\alpha \models \Phi(x)\} \\ \text{ist.} \end{array} \\[2ex] \textsf{(Konfinalität)} & \begin{array}{l} \mathbf{L}[G_\gamma] \models \mathrm{cf}(\alpha^{(+i)\mathbf{L}}) = \omega \text{ für beliebige } i < \omega \text{ und} \\ \text{ein (über } \mathbf{L}\text{) } \mathbb{P}_\gamma\text{-generisches } G_\gamma. \end{array} \end{array} \right.$$

Diese Eigenschaften werden in unseren Beweis eingehen. Nachdem wir in diesem und im nächsten Abschnitt gesehen haben, wie dieses FORCING unser Anliegen beweist, werden wir es im letzten Abschnitt konstruieren. Nehmen wir daher an, wir hätten solche partielle Ordnungen $\mathbb{P}_\alpha \in \mathbf{L}$ für $\alpha \leq \gamma$, α unerreichbar in $\mathbf{L}$, gegeben, mit denen wir erzwingen möchten. Dann gilt sofort

$$(7.1.2)\qquad \mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma} \models \neg 0^\#,$$

denn im anderen Fall wüßten wir aufgrund des Korollares 1.77, daß alle überabzählbaren $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma}$-Kardinalzahlen stark unerreichbar in $\mathbf{L}$ wären. Andererseits werden hinreichend große Kardinalzahlen aufgrund der Kettenbedingung[1] erhalten.

Das gesuchte Gegenbeispiel werden wir in dem neuen Universum $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma}$ finden, d.h. wir zeigen, daß (†) in diesem ZFC-Modell nicht gilt; daher kann (†) kein Theorem von ZFC sein, wenn wir $0^{\#}$ in $\mathbf{V}$ voraussetzen. Erinnern wir uns dazu an die im sechsten Kapitel bereits definierte Menge

$$\mathcal{C} := \{u \mid u \prec \mathbf{J}_\tau \ \wedge\ u \cap \gamma \text{ transitiv } \wedge\ \gamma \in u \ \wedge\ \sup(u \cap \mathrm{On}) = \tau \ \wedge\ |u| < \gamma\}.$$ $\mathcal{C}$

Für $u \in \mathcal{C}$ setze erneut $\sigma_u : \mathbf{J}_{\tau_u} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} u$ und $\gamma_u := u \cap \gamma$. Dann gilt wieder $\gamma_u =$ σ_u
$\mathrm{crit}(\sigma_u)$ und $\sigma_u(\gamma_u) = \gamma$. Wir werden zeigen, daß (†) in $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma}$ falsch ist; genauer gesagt werden wir eine in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ stationäre Teilmenge $\mathcal{S}$ von $\mathcal{C}$ und $\mu_u \geq \tau_u$ für $u \in \mathcal{S}$ konstruieren, so daß für die kanonischen Erweiterungen $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathfrak{A}_u$ von $\sigma_u : \mathbf{J}_{\tau_u} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} u$ die Menge $\mathcal{S}'' := \{u \in \mathcal{S} \mid \mathfrak{A}_u \text{ ist nicht fundiert}\}$ stationär in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ liegt. Dieses Ziel ist erreicht, wenn wir das folgende gezeigt haben:

Lemma 7.1 *Es existiert eine in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$ stationär liegende Teilmenge $\mathcal{S}$, so daß τ_u für jedes $u \in \mathcal{S}$ eine Kardinalzahl in $\mathbf{L}$ ist.*

Das reicht für unser Anliegen, denn damit existieren auch $\mu_u \geq \tau_u$, so daß für beliebige $u \in \mathcal{S}$ das Pseudo-Ultraprodukt $\mathfrak{A}_u$ nicht fundiert ist, denn sonst existierte ein $u \in \mathcal{S}$, so daß $\mathfrak{A}_u$ für alle $\mu \geq \tau_u$ fundiert ist. Dann wäre aber auch $\mathfrak{A}_\infty$ fundiert, so daß $\mathfrak{A}_\infty$ nichts anderes als $\mathbf{L}$ ist, womit wir schon in $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma}$ eine nicht-triviale Einbettung von $\mathbf{L}$ in $\mathbf{L}$ bekämen. Widerspruch zu (7.1.2)! Hierbei bezeichnete $\mathfrak{A}_u$ natürlich das durch die kanonische Erweiterung erhaltene Pseudo-Ultraprodukt, wobei $\mathfrak{A}_\infty$ nur der Spezialfall $\mu_u = \infty$ ist. Also gilt $\mathcal{S} = \mathcal{S}''$ und damit ist auch $\mathcal{S}''$ stationär in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, womit (†) widerlegt wäre.

Beweis des Lemmas 7.1: Vereinbaren wir für den gesamten Beweis, daß wir mit *kardinalen Nachfolger* stets *kardinalen Nachfolger in* $\mathbf{L}$ meinen, ohne dies ausdrücklich zu betonen. Darüber hinaus fixieren wir ein über dem konstruktiblen Universum $\mathbb{P}_\gamma$-generisches G_γ; dabei ist nach der Bedingung (Faktorisierung) aus G_γ
(7.1.1) natürlich $G_\alpha := G_\gamma \cap \mathbb{P}_\alpha$ auch $\mathbb{P}_\alpha$-generisch über $\mathbf{L}$. An dieser Stelle nutzen wir – wie allgemein üblich – die Konvention, daß wir $\mathbb{P}_\alpha$ mit seinem Bild unter der vollständigen Einbettung in $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma$ identifizieren können. Daher ist es aufgrund der starken Erhaltungseigenschaften einer solchen Einbettung möglich, $\mathbb{P}_\alpha$ als Teilmenge von $\mathbb{P}_\gamma$ aufzufassen. Mit diesen Vorbereitungen definieren wir zunächst $\tilde{\mathcal{S}} := \{\alpha < \gamma \mid \alpha \text{ ist unerreichbar in } \mathbf{L}\}$ und $\overline{\mathcal{S}} := \{\alpha^{+\omega} \mid \alpha \in \tilde{\mathcal{S}}\}$ und setzen $\tilde{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{S}}$
$\tau_\alpha := \alpha^{+\omega} \in \overline{\mathcal{S}}$ für $\alpha \in \tilde{\mathcal{S}}$. Wir werden jetzt sofort die für das Gegenbeispiel interessante Menge angeben und dann schrittweise nachweisen, daß diese Menge die erhofften Eigenschaften besitzt. Setze τ_α

[1] Das FORCING wird sogar die γ-c.c. erfüllen. An dieser Stelle ist das gar nicht so wichtig, da es als Mengen-FORCING garantiert eine θ-c.c. für ein geeignetes θ erfüllen wird.

$\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} := \{\mathrm{rng}(\sigma) \mid (\exists \alpha \in \tilde{\mathcal{S}})(\,\exists \sigma \in \mathbf{L}[G_\gamma]\,)(\,\sigma : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau \,\wedge\, \alpha = \mathrm{crit}(\sigma)\,)\}.$$

Als erstes überlegen wir uns nun, daß für jedes $u \in \mathcal{S}$ die definierten τ_u immer Kardinalzahlen in $\mathbf{L}$ sind; das ist aber nach Definition dieser Menge sofort klar, denn $\tau_u = \tau_\alpha$ für ein α und σ mit $\sigma : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau$ und $\mathrm{rng}(\sigma) = u$, wobei die konkrete Wahl von σ aufgrund seiner Erhaltungseigenschaften keine Rolle spielt und wir in jedem Fall das gleiche τ_α erhalten. Die τ_α sind jedoch wie gewünscht in $\mathbf{L}$ Kardinalzahlen und darüber hinaus auch abzählbar konfinal. Es reicht daher, sich das folgende zu überlegen:

Behauptung: $\mathbf{L}[G_\gamma] \models \mathcal{S}$ ist stationär in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.

Beweis der Behauptung: Sei dafür eine beliebige Algebra $\mathfrak{B} \in \mathbf{L}[G_\gamma]$ auf $\mathbf{J}_\tau$ gegeben; mit ihr wollen wir schon über $\mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ arbeiten können. Die Schreibweise des Definitionsbereichs und des Wertebereichs von σ in der Definition von $\mathcal{S}$ wird erst sinnvoll, wenn man sich überlegt, daß die generische Erweiterung $\mathbf{L}[G_\gamma]$ mit der relativ konstruktiblen Hierarchie (in Symbolen mit der gleichen Schreibweise geschrieben) übereinstimmt. Das liegt einfach daran, daß beide Modelle jeweils die kleinsten transitiven ZF-Modelle sind, die $\{G_\gamma\} \cup \mathrm{On}$ enthalten[2]. Dazu werden wir nämlich ein zusätzliches Prädikat hinzunehmen, aus dem wir in $\mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ die Algebra konstruktiv zurück bekommen.

A

(7.1.3) Es existiert eine konstruktible Menge $A \subseteq \tau$, so daß die Algebra $\mathfrak{B}$ über $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], \in, A\rangle$ definierbar ist.

Beweis von (7.1.3): Wir wissen, daß es für $\mathfrak{B}$ einen $\mathbb{P}_\gamma$-Namen gibt; wenn wir jetzt zeigen könnten, daß es schon einen Namen $\dot{b}$ für $\mathfrak{B}$ gibt, der Teilmenge von $\mathbf{L}_\tau$ ist, dann ist $\mathfrak{B}$ in $\mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ mit Hilfe dieses Namens – als zusätzliches Prädikat genommen – wegen $\mathfrak{B} = \dot{b}_{G_\gamma}$ definierbar. Natürlich läßt sich eine solche Teilmenge von $\mathbf{L}_\tau$ immer über $\mathbf{L}_\tau$ als Teilmenge von τ verschlüsseln. Daher zeigen wir, daß es für jedes $B \in \mathbf{L}[G_\gamma]$ mit $B \subseteq \mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ schon einen Namen $\ddot{b} \subseteq \mathbf{L}_\tau$ mit $\ddot{b}_{G_\gamma} = B$ gibt. Nehmen wir dafür an, wir hätten ein Gegenbeispiel, dann können wir es minimal bezüglich des Aufbaus der $\mathbb{P}_\gamma$-Namen wählen, d.h. für dieses Gegenbeispiel existiert ein Name $\dot{b}$, so daß für jedes $\dot{c}$ mit $\langle \dot{c}, p\rangle \in \dot{b}$ die geforderte Aussage gilt. Aber dann gilt wegen $\dot{b}_{G_\gamma} = B \subseteq \mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ auch $\dot{c}_{G_\gamma} \subseteq \mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$, falls $p \in G_\gamma$; im anderen Fall spielt dieses Element von $\dot{b}$ für die Interpretation von $\dot{b}$ in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ gar keine Rolle. Somit läßt sich wegen der Minimalität schließen, daß es für jedes solche $\dot{c}$ einen Namen $\ddot{c} \subseteq \mathbf{L}_\tau$ mit $\ddot{c}_{G_\gamma} = \dot{c}_{G_\gamma}$ gibt. Definieren wir nun $\ddot{b}$ als Menge der $\langle \ddot{c}, p\rangle$ an, wobei $\langle \dot{c}, p\rangle \in \dot{b}$, dann erfüllt aber $\ddot{b}$ wegen $\mathbb{P}_\gamma \subseteq \mathbf{L}_\tau$ für B die gewünschten Bedingungen $\ddot{b} \subseteq \mathbf{L}_\tau$ und $\ddot{b}_{G_\gamma} = \dot{b}_{G_\gamma} = B$. Widerspruch! ⊠ (7.1.3)

Nun können wir schrittweise die Existenz eines unter der gegebenen Algebra abgeschlossenen Elementes aus $\mathcal{S}$ nachweisen. Halten wir zunächst das folgende fest:

[2] Vergleiche Bemerkungen 1.3 sowie 1.4.

(7.1.4) Für jeden SILVER-Ununterscheidbaren $\alpha \in \gamma$ existiert (in $\mathbf{V}$) ein $\tilde{\pi}_\alpha : \mathbf{L} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}$ mit $\operatorname{crit}(\tilde{\pi}_\alpha) = \alpha$ und $\pi_\alpha := \tilde{\pi}_\alpha \restriction \mathbf{L}_{\tau_\alpha} : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau$. $\tilde{\pi}_\alpha, \pi_\alpha$

BEWEIS VON (7.1.4): Wir erweitern die Identität $\mathrm{id} : \mathbf{L}_\alpha \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau$ zu $\tilde{\pi}_\alpha$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{L}$ durch Verschiebung der Ununterscheidbaren; wir fordern nur $\tilde{\pi}_\alpha(\alpha^{+i}) := \gamma^{+i}$ für $i < \omega$. Aufgrund der Eigenschaften der SILVER-Ununterscheidbaren ist das möglich und darüber hinaus erfüllt dann $\pi_\alpha := \tilde{\pi}_\alpha \restriction \mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ die geforderten Bedingungen wegen der Elementarität innerhalb der Stufen von $\mathbf{L}$, deren ordinale Höhe ein SILVER-Ununterscheidbarer ist[3]. ⊠ (7.1.4)

Wähle nun α hinreichend groß, so daß $A \in \operatorname{rng}(\tilde{\pi}_\alpha)$ gilt. Ein solches α existiert, weil die $\tilde{\pi}_\alpha$ durch die Verschiebung der Ununterscheidbaren derart aufgebaut sind, daß wir für aufsteigende $\alpha < \gamma$ die Limesabbildung $\tilde{\pi}_{\gamma\gamma}$ betrachten können, die dann natürlich die Identität sein wird. Nun ist der Wertebereich von $\tilde{\pi}_{\gamma\gamma} = \mathrm{id}$ natürlich das ganze konstruktible Universum $\mathbf{L} = \operatorname{rng}(\tilde{\pi}_{\gamma\gamma}) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \operatorname{rng}(\tilde{\pi}_\alpha)$. Setze dann $\overline{A} := \tilde{\pi}_\alpha^{-1}(A)$. Wegen (7.1.4) gilt dann $\pi_\alpha : \langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}, \overline{A}\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathbf{L}_\tau, A\rangle$ als Einschränkung der Abbildung $\tilde{\pi}_\alpha$, die diese Bedingung offenbar erfüllt. Wir wollen nun diese Abbildung auf eine elementare Erweiterung zwischen den generischen Erweiterungen heben und zeigen daher zuerst die Existenz der gewünschten Erweiterung in $\mathbf{V}$. $\overline{A}$

(7.1.5) Wir erhalten $\sigma_\alpha : \langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle$, definiert durch $\sigma_\alpha(\dot{x}_{G_\alpha}) := (\pi_\alpha(\dot{x}))_{G_\gamma}$ für $\dot{x} \in \mathbf{L}_{\tau_\alpha}^{\mathbb{P}_\alpha} \subseteq \mathbf{L}_{\tau_\alpha}$. σ_α

BEWEIS VON (7.1.5): Zunächst ist offenbar σ_α korrekt definiert, denn für einen Namen $\dot{x}$ aus $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}^{\mathbb{P}_\alpha}$ ist $\pi_\alpha(\dot{x}) \in \mathbf{L}_\tau^{\mathbb{P}_\gamma}$. Das läßt sich induktiv über den Rang (bezüglich des Aufbaus der Namen) beweisen, denn für $\langle \dot{y}, p\rangle \in \dot{x}$ ist $\langle \pi_\alpha(\dot{y}), p\rangle = \pi_\alpha(\langle \dot{y}, p\rangle) \in \pi_\alpha(\dot{x})$, wobei wir an dieser Stelle ausnutzen, daß $\mathbb{P}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ ist und damit Bedingungen aus $\mathbb{P}_\alpha$ durch π_α aufgrund des kritischen Punktes nicht verschoben werden. Darüber hinaus ist aber mit der oben beschriebenen Konvention $\mathbb{P}_\alpha$ eine Teilmenge von $\mathbb{P}_\gamma$, wodurch $\pi(\dot{x})$ ein $\mathbb{P}_\gamma$-Name über $\mathbf{L}_\tau$ ist.

Außerdem ist π_α eine Erweiterung von σ_α, denn für ein $x \in \mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ gilt: $\sigma_\alpha(x) = \sigma_\alpha(\check{x}_{G_\alpha}) = (\ \pi_\alpha(\check{x})\ )_{G_\gamma} = (\ \pi_\alpha(x)\ \check{)}_{G_\gamma} = \pi_\alpha(x)$. Dabei gilt die vorletzte Gleichung aufgrund der Elementarität, denn wir erhalten $\pi_\alpha(\ \{\langle \check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}\rangle \mid y \in x\}\ ) = \{\langle \check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma}\rangle \mid y \in \pi_\alpha(x)\}$. Für den Nachweis der Erhaltungsstärke nutzen wir natürlich die gleichmäßige Definition der partiellen Ordnungen, gegeben durch die ersten beiden Bedingungen in (7.1.1).

Wir wollen also zeigen, daß eine Formel, die in $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle$ gilt, schon durch σ_α derart übertragen wird, so daß sie auch in $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle$ gilt. Grob gesagt werden wir zwei Argumente nutzen: auf der einen Seite darf sich an den Stellen, an denen

[3] Vergleiche Korollar 1.77.

π_α und damit σ_α nichts ändert, auch bei den beiden partiellen Ordnungen nichts Verschiedenes erzwungen werden; auf der anderen Seite muß sich $\mathbb{P}_\alpha$ bezüglich der ersten Struktur, gegeben durch α, genauso verhalten wie $\mathbb{P}_\gamma$ bezüglich der zweiten Struktur, gegeben durch γ.

Das erste Ziel ist offenbar erfüllt, denn $\mathrm{crit}(\sigma_\alpha) = \mathrm{crit}(\pi_\alpha) = \alpha$ und wir haben, daß $\mathbb{P}_\alpha$ ein Anfangsstück von $\mathbb{P}_\gamma = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma$ ist. Für die zweite Forderung hätten wir gern die umgekehrte Richtung: Wenn wir $\mathbb{P}_\alpha$ nach dem gleichen Definitionsschema auf γ aufblähen, dann erhalten wir $\mathbb{P}_\gamma$. Das garantiert uns (Uniformität) aus (7.1.1). Dadurch ist die Elementarität gesichert, denn wir gehen von einer elementaren Einbettung aus und erweitern den Definitions- und den Wertebereich auf die gleiche Weise: Gilt also eine Formel in $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle$, dann wissen wir aus der FORCING-Theorie, daß wir dieses schon über dem Grundmodell entscheiden können, d.h. aufgrund der Definierbarkeit der FORCING-Relation über dem Grundmodell können wir die Gültigkeit einer Formel in eine Formel über dem Grundmodell ausdrücken. Aufgrund der Elementarität von π_α läßt sich diese übertragen. Wegen des oben beschriebenen Zusammenhangs zwischen den beiden partiellen Ordnungen bedeutet diese Formel über $\langle \mathbf{L}_\tau, A\rangle$ aber gerade die Gültigkeit der Ausgangsformel in dem gesuchten Modell $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle$. ⊠ (7.1.5)

Ein solches σ_α wäre, wenn es schon in der generischen Erweiterung läge, genau eine in die Definition von $\mathcal{S}$ eingehende Abbildung. Wir möchten jetzt eine solche Abbildung nicht nur allgemein in $\mathbf{V}$, sondern schon in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ zur Verfügung haben. Dazu nutzen wir entsprechend den Bedingungen an das FORCING die Existenz einer Familie $\langle x_i^\alpha | i < \omega\rangle$ in $\mathbf{L}[G_\gamma]$, so daß x_i^α in $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ liegt und $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ gleich der $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$-SKOLEM-Hülle von $\alpha \cup \{x_i^\alpha | i < \omega\}$ ist. An dieser Stelle werden wir die Bedingung (Konfinalität) von (7.1.1) in Anspruch nehmen, die uns nämlich für jedes $j < \omega$ die Existenz einer abzählbaren und in α^{+j} konfinalen Folge $\langle \xi_i^j \mid i < \omega\rangle$ garantiert. Aufgrund der $\mathbf{L}_{\xi_i^j}$-Definierbarkeit einer Surjektion $f_i^j : \xi_i^j \xrightarrow{\text{auf}} \mathbf{L}_{\xi_i^j}$ reicht es, schrittweise die Elemente der Menge ξ_i^j zu definieren.

Diese kann man sich etwa ausgehend von α induktiv schaffen: Man nehme sich Surjektionen $g_i^j \in \mathbf{L}$ von $\alpha^{+(j-1)}$ auf ξ_i^j, so daß für jedes $\zeta < \alpha^{+j}$ wie gewünscht immer ein $\overline{\zeta} < \alpha^{+(j-1)}$ mit $\zeta = g_i^j(\overline{\zeta})$ für geeignetes $i < \omega$ mit $\zeta < \xi_i^j$ existiert. Damit sind also die Elemente aus $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ schon aus α und der Folge der x_i^α, die gerade die einzelnen ξ_i^j geeignet aufzählen, konstruierbar, womit dann aber auch $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha]$
$L^n_{\tau_\alpha}$ gleich der $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], G_\alpha\rangle$-SKOLEM-Hülle von $\alpha \cup \{x_i^\alpha \mid i < \omega\}$ ist, so daß wir $L^n_{\tau_\alpha}$ als n-te Approximation von $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle$, nämlich als $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], G_\alpha, \overline{A}\rangle$-SKOLEM-Hülle von $\alpha \cup \{x_0^\alpha, \ldots, x_{n-1}^\alpha\}$ definieren können. Somit ist $L^n_{\tau_\alpha}$ offenbar ein Element[4] von $\mathbf{L}[G_\alpha]$ mit $\langle L^n_{\tau_\alpha}, \overline{A}\rangle \prec \langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], A\rangle$.

[4]Es ist zwar nicht direkt in $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha]$, aber durchaus mit Hilfe eines konstruktiblen Prädikats definierbar, so daß $L^n_{\tau_\alpha}$ in der Hierarchie $\mathbf{L}[G_\alpha]$ auftauchen muß.

Wenden wir nun die Abbildung σ_α an, dann ist σ_α " $L^n_{\tau_\alpha}$ gleich der $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], G_\gamma, A\rangle$-SKOLEM-Hülle von $\gamma \cup \{\sigma_\alpha(x_0^\alpha), \ldots, \sigma_\alpha(x_{n-1}^\alpha)\}$ und σ_α " $L^n_{\tau_\alpha} \in \mathbf{L}[G_\gamma]$. Daher ist also $\sigma_\alpha \restriction L^n_{\tau_\alpha} \in \mathbf{L}[G_\gamma]$, denn diese Abbildung ist in $\langle \mathbf{L}[G_\gamma], G_\gamma, A\rangle$ mit Parametern aus $\alpha \cup \{\langle \sigma_\alpha(x_0^\alpha), \ldots, \sigma_\alpha(x_{n-1}^\alpha)\rangle\} \in \mathbf{L}[G_\gamma]$ definierbar[5] und durch $\mathrm{dom}(\sigma_\alpha \restriction L^n_{\tau_\alpha}) \times \mathrm{rng}(\sigma_\alpha \restriction L^n_{\tau_\alpha}) \in \mathbf{L}[G_\gamma]$ beschränkt. Daher können wir letztendlich folgern

(7.1.6) Es existiert eine Abbildung $\sigma'_\alpha : \langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle$ in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ mit $\alpha = \mathrm{crit}(\sigma'_\alpha)$. σ'_α

BEWEIS VON (7.1.6): Wir nutzen natürlich unser Wissen über die Existenz einer solchen Abbildung in $\mathbf{V}$ und definieren in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ eine Relation R durch:

$$\begin{aligned} g\,R\,f \quad :\longleftrightarrow \quad & (\exists n, m)(\, n < m \ \wedge\ f : \langle L^n_{\tau_\alpha}, \overline{A}\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle \ \wedge \\ & g : \langle L^m_{\tau_\alpha}, \overline{A}\rangle \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle \ \wedge\ f \subseteq g \ \wedge\ g \restriction \alpha = \mathrm{id} \ \wedge\ g(\alpha) = \gamma\,) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt die behauptete Aussage genau dann, wenn R in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ nicht fundiert ist[6]. Aber diese Relation R enthält, obwohl in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ definiert, die oben konstruierten Abbildungen $f_n := \sigma_\alpha \restriction L^n_{\tau_\alpha}$, die offenbar in $\mathbf{V}$ die Existenz einer unendlich oft absteigenden Kette bezeugen. Aufgrund der Absolutheit der Fundierung zwischen $\mathbf{L}[G_\gamma]$ und $\mathbf{V}$ folgt damit die behauptete Aussage. Hierbei geht natürlich wesentlich die Absolutheit des konstruktiblen Universums ein. ⊠ (7.1.6)

Mit dieser Abbildung σ'_α in $\mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ sind wir am Ziel. Aufgrund der Elementarität von σ'_α zusammen mit der Definierbarkeit von $\mathfrak{B}$ aus dem Prädikat A innerhalb von $\mathbf{L}_\tau[G_\gamma]$ ist $u := \mathrm{rng}(\sigma'_\alpha)$ offenbar unter der Algebra $\mathfrak{B}$ abgeschlossen, denn für eine Funktion f aus $\mathfrak{B}$ gilt demnach $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle \models (\,\exists y\,)(\, y = f(x_1, \ldots, x_n)\,)$ genau dann, wenn $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], A\rangle \models (\exists y)(\, y = f(\,\sigma'_\alpha(x_1), \ldots, \sigma'_\alpha(x_n)\,)\,)$ vorliegt. Dann ist das Bild des Zeugen für den Existenzquantor auf der linken Seite unter der Abbildung σ'_α wegen der Eindeutigkeit eines Funktionswertes genau der Zeuge für den Existenzquantor auf der rechten Seite, so daß dieser schließlich im Wertebereich von σ'_α liegen muß.

Genau diese Abschlußeigenschaft war natürlich der Grund, warum wir eine Abbildung σ mit einem Anfangsstück der generischen Erweiterung als Definitionsbereich konstruiert haben, obwohl wir eigentlich nur an einer Abbildung mit einer Teilmenge des konstruktiblen Universums als Definitionsbereich interessiert sind. Doch natürlich erfüllt auch diese Abbildung die geforderte Abschwächung, denn es gilt[7] $\sigma'_\alpha \restriction \mathbf{L}_{\tau_\alpha} : \mathbf{L}_{\tau_\alpha} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau$ und der Wertebereich dieser Einschränkung ist immer noch

[5] Setze abkürzend $\underline{\sigma_\alpha} := \sigma_\alpha \restriction L^n_{\tau_\alpha}$. Dann ist aber $\underline{\sigma_\alpha}(x)$ das eindeutig bestimmte y mit $\langle \mathbf{L}_\tau[G_\gamma], G_\gamma, A\rangle \models \varphi(y, \lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}, \underline{\sigma_\alpha}(x_0^\alpha), \ldots, \underline{\sigma_\alpha}(x_{n-1}^\alpha), \dot{G}, \dot{A})$, wenn x das eindeutig bestimmte y mit $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], G_\alpha, \overline{A}\rangle \models \varphi(y, \lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}, x_0^\alpha, \ldots, x_{n-1}^\alpha, \dot{G}, \dot{A})$ mit $\lambda_i \in \alpha$.

[6] Haben wir eine Folge $f_{n+1}\, R\, f_n$ für $n < \omega$ gegeben, dann erfüllt $\bigcup_{n<\omega} f_n$ die geforderten Bedingungen.

[7] Wir können mit einer Formel ausdrücken, ein Element von $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ zu sein, so daß wir dann nur noch die Elementarität von σ_α auszunutzen haben.

unter den Funktionen der gegebenen Algebra abgeschlossen[8]. Also liegt $\mathrm{rng}(\sigma'_\alpha{\restriction}\mathbf{L}_{\tau_\alpha})$ insbesondere in $\mathcal{S}$, denn alle Bedingungen an $\sigma'_\alpha{\restriction}\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ sind erfüllt. ⊠(Behauptung)

Damit ist unser Gegenbeispiel vollständig beschrieben. Allerdings fehlt natürlich noch der Nachweis der Existenz einer solchen Forcing-Konstruktion. Diese werden wir im letzten Abschnitt bereitstellen. ⊠(Lemma 7.1)

7.2 Auswirkungen des Gegenbeispiels

Nachdem wir uns im ersten Abschnitt bereits von der Notwendigkeit der Einschränkung im zweiten Theorem überzeugt haben, wird nun deutlich werden, daß die vorgestellte Version des Lemmas über die häufige Erweiterbarkeit von Einbettungen im Zusammenhang der Ordinalzahlen auch optimal bewiesen wurde. Wir werden unter Benutzung der in diesem Kapitel bisher konstruierten Objekte, insbesondere unter Ausnutzung des noch zu konstruierenden Forcings, ein Gegenbeispiel für die entsprechende Version des Theorems ohne vorhergehende Einschränkung der Ausgangsmenge auf eine Teilmenge von Ordinalzahlen mit überabzählbarer Konfinalität in $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\gamma}$ finden. Ausgehend von dem durch das noch zu konstruierende Forcing $\mathbb{P}_\gamma$ generierte Universum erzwingen wir, um überhaupt über diese Version sprechen zu können, die Existenz einer Surjektion von γ auf $\gamma^{+\omega}$, etwa durch die
$\mathbb{P}$, f partielle Ordnung $\mathbb{P} := \mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+\omega}, \gamma)$; nennen wir sie f. Dabei liege f in einer fi-
G xierten generischen Erweiterung $\mathbf{L}[G_\gamma][G]$, wobei G ein ab jetzt (über $\mathbf{L}[G_\gamma]$) $\mathbb{P}$-generischer Filter ist. Wir wissen, daß die im ersten Abschnitt betrachtete Menge
$\mathcal{S}$ $\mathcal{S} := \{\mathrm{rng}(\sigma) \mid (\exists\alpha \in \tilde{\mathcal{S}})(\exists\sigma \in \mathbf{L}[G_\gamma])(\sigma : \mathbf{L}_\alpha \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau \wedge \alpha = \mathrm{crit}(\sigma))\}$ in dem
$\tilde{\mathcal{S}}$ Modell $\mathbf{L}[G_\gamma]$ stationär (in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$) liegt, dabei bezeichne $\tilde{\mathcal{S}}$ die Menge der in $\mathbf{L}$ unerreichbaren Zahlen. Jetzt können wir uns fragen, ob schon für hinreichend viele solcher σ das Submodell $\mathrm{rng}(\sigma)$ die Form $f\,``\,\alpha$ für geeignetes α hat; daher zeigen wir

Lemma 7.2 *Die Menge* $\{\alpha < \gamma \mid \alpha \in \tilde{\mathcal{S}} \wedge f\,``\,\alpha \prec \mathbf{L}_\tau \wedge f\,``\,\alpha \cap \gamma = \alpha \wedge \sup(f\,``\,\alpha \cap \mathrm{On}) = \tau \wedge \gamma \in f\,``\,\alpha \wedge \tau_\alpha = (\alpha^{+\omega})^{\mathbf{L}}\}$ *liegt in* $\mathbf{L}[G_\gamma][G]$ *stationär in* γ.

Hierbei bezeichne τ_α wie im dritten Kapitel die ordinale Höhe des Mostowski-Kollaps von $f\,``\,\alpha$; dabei sei diese Zuordnung $\alpha \mapsto \tau_\alpha$ als Abbildung verstanden, so daß wir diese definierbar Zuordnung dann später auch in einer zu erzwingenden Formeln nutzen können. Damit sind wir am Ziel, denn wir können die Argumentation nach dem Lemma 7.1 wörtlich wiederholen, die bezeugt, daß damit für jedes

[8]Für ein $f \in \mathfrak{B}$ und $x \in \mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ existiert wegen $f\,``\,\mathrm{rng}(\sigma'_\alpha) \subseteq \mathrm{rng}(\sigma'_\alpha)$ sofort ein $z \in \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha]$ mit $\sigma'_\alpha(z) = f(\sigma'_\alpha(x))$, d.h. $\langle \mathbf{L}_{\tau_\alpha}[G_\alpha], \overline{A}\rangle \models z = \overline{f}(x)$ für $\sigma'_\alpha(\overline{f}) = f$, so daß aber nach Wahl der Funktionen aus der Algebra $\mathfrak{B}$, die zwar eventuell selbst nur ein Element der generischen Erweiterung ist, aber natürlich nur Funktionen mit einem Feld über $\mathbf{L}_\tau$ enthält, das z ein Element von $\mathbf{L}_{\tau_\alpha}$ sein muß. Daher gilt wie gewünscht $f\,``\,\mathrm{rng}(\sigma'_\alpha{\restriction}\mathbf{L}_{\tau_\alpha}) \subseteq \mathrm{rng}(\sigma_\alpha{\restriction}\mathbf{L}_{\tau_\alpha})$.

α aus der in die Formulierung des Lemmas eingehenden Menge ein μ_α existiert, so daß alle derart gebildeten Pseudo-Ultraprodukt nicht fundiert sind, weil wir im anderen Fall $0^\#$ erhielten. Darüber hinaus ist diese Menge dann auch das gesuchte Gegenbeispiel, weil es offenbar eine Teilmenge der im dritten Kapitel definierten club Menge $\mathcal{C}$, aber eben nicht von $\mathcal{D}$ ist, denn diese Ordinalzahlen haben aufgrund der Auswirkung des FORCINGS eine abzählbare Konfinalität in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ und damit erst recht in dem aktuellen Universum $\mathbf{L}[G_\gamma][G]$.

Beweis des Lemmas 7.2: Sei also eine club Menge $\mathcal{C} \subseteq \gamma$ in $\mathbf{L}[G_\gamma][G]$ gegeben, $\mathcal{C}$
dann existieren sowohl für diese Menge als auch für die generische Surjektion $\mathbb{P}$-Namen, etwa $\dot{\mathcal{C}}$ und $\dot{f}$. Wir zeigen jetzt, daß für jedes $\tilde{p} \in G \subseteq \mathbb{P}$ mit $\tilde{p} \Vdash$ "$\dot{\mathcal{C}} \subseteq \check{\gamma}$ ist eine club Menge." die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \quad := \quad & \{p \in \mathbb{P} \mid (\exists \alpha < \gamma)(\alpha \in \tilde{\mathcal{S}} \wedge p \Vdash \alpha \in \dot{\mathcal{C}} \wedge p \Vdash \dot{f}\text{''}\,\alpha \prec (\mathbf{L}_\tau)\check{} \\ & \wedge p \Vdash \check{\gamma} \in \dot{f}\text{''}\,\alpha \wedge p \Vdash \dot{f}\text{''}\,\alpha \cap \check{\gamma} = \alpha \wedge p \Vdash \tau_\alpha = (\alpha^{+\omega})^{\mathbf{L}} \\ & \wedge p \Vdash \sup(\dot{f}\text{''}\,\alpha \cap \mathrm{On}) = \check{\tau})\} \text{ in } \mathbb{P} \text{ dicht unterhalb } \tilde{p} \text{ liegt.} \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Diese Eigenschaft von $\mathcal{D}$ ist offenbar nach bekannten Theoremen[9] aus der FORCING-Theorie alles, was zu zeigen ist, um die Aussage des Lemmas zu erhalten. Wir suchen daher für ein $p \leq \tilde{p}$ aus $\mathbb{P}$ eine Erweiterung p' aus $\mathcal{D}$. Für dieses Ziel zeigen wir für p
$\theta := \gamma^{+(\omega+2)\mathbf{L}}$, und im folgenden sind die kardinalen Nachfolger, wenn nicht weiter θ
angegeben, immer aus Sicht von $\mathbf{L}$ zu nehmen, die Existenz eines X mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{cases} \bullet\ \{\tilde{p}, p, \dot{C}, \gamma\} \subseteq X \prec \mathbf{L}_\theta[G_\gamma]. \\ \bullet\ X = \bigcup_{i<\omega} X_i \text{ für } X_i \in X \text{ mit } |X_i| < \gamma. \\ \bullet\ \alpha := X \cap \gamma \in \mathcal{C} \text{ ist unerreichbar in } \mathbf{L}. \\ \bullet\ \text{Es existiert in } \mathbf{L}[G_\gamma] \text{ ein } \sigma : \mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} \underset{\Sigma_\omega}{\longrightarrow} \mathbf{L}_\tau \text{ mit } \mathrm{rng}(\sigma) \subseteq X. \end{cases} \tag{7.2.2}$$

Wir konstruieren jetzt für den (inversen) MOSTOWSKI-Kollaps $\pi : M \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$ einen (über M) $\overline{\mathbb{P}} := \pi^{-1}(\mathbb{P})$-generischen Filter $\overline{G}$, indem wir die durch X gegebene Zer- $\overline{\mathbb{P}}, \overline{G}$
legung $M = \bigcup_{i<\omega} \overline{X}_i$ von M, wobei $\overline{X}_i := \pi^{-1}(X_i) \in M$ und $|\overline{X}| < \pi^{-1}(\gamma) = \alpha$ ist, und den Durchschnitt $\Delta_i := \bigcap\{\Delta \in M \mid \Delta \text{ ist offen und dicht in } \overline{\mathbb{P}} \wedge \Delta \in \overline{X}_i\}$ betrachten; dann ist Δ_i für alle $i < \omega$ ebenfalls offen[10] und dicht, weil $\mathbb{P}$ offenbar γ-abgeschlossen und $\overline{\mathbb{P}}$ damit α-abgeschlossen ist, womit Durchschnitte von solchen Mengen einer Mächtigkeit echt kleiner α diese Eigenschaft nicht verlieren. Aber dann können wir wie üblich $p_i \in \Delta_i$ wählen, so daß $p \geq p_0 \geq \ldots \geq p_i \geq p_{i+1} \geq \ldots$ gilt. Also erfüllt $\overline{G} := \{p \in \overline{\mathbb{P}} \mid (\exists i < \omega)(p_i \leq p)\}$ die gewünschten Eigenschaften.

[9] Vergleiche die Lemmata 1.5 und 1.7.

[10] Eine Menge von Bedingungen heißt *offen*, wenn sie nach unten abgeschlossen.

Setze nun $p' := \bigcup \pi\,"\,\overline{G}$, dann ist p' eine Bedingung aus $\mathbb{P}$ und es gilt $p' \Vdash \dot{f}\,"\,\check{\alpha} = \pi\,"\,(\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}})\check{}$; hieraus folgt auch sofort, daß die ordinale Höhe τ_α des MOSTOWSKI-Kollaps von $f\,"\,\alpha$ wirklich $\alpha^{+\omega}$ ist[11]. Aber es gilt auch $\pi\,"\,\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} \prec \mathbf{L}_\tau$; dabei gilt diese Elementarität aufgrund der Existenz einer solchen in (7.2.2) geforderten Abbildung σ mit $\operatorname{rng}(\sigma) \subseteq X$, denn damit ist $\pi{\restriction}\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} : \mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} \longrightarrow \mathbf{L}_\tau$ eine elementare
$\overline{f}$ Einbettung. Da $f : \gamma \xrightarrow{\text{auf}} \mathbf{L}_{\gamma^{+\omega}}$ gilt für $\dot{\overline{f}} := \pi^{-1}(\dot{f})$ sofort $\overline{f} := \dot{\overline{f}}_{\overline{G}} : \alpha \xrightarrow{\text{auf}} \mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}}$ und weil π eine elementare Abbildung mit kritischen Punkt α ist, haben wir für $\xi < \alpha$ darüber hinaus $\pi(\,\overline{f}(\xi)\,) = f(\xi)$.

Somit ist einerseits $\operatorname{rng}(\pi \circ \overline{f}) = f\,"\,\alpha$; aber der Wertebereich von $\pi \circ \overline{f}$ ist andererseits auch nichts anderes als $\pi\,"\operatorname{rng}(\overline{f}) = \pi\,"\,\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}}$. Damit ist auch klar, daß das Supremum von $f\,"\,\alpha$ gleich τ ist und γ in dieser Bildmenge liegt, denn dieses Problem mit Hilfe der Abbildung π nach M gezogen, fragt gerade nach der ordinalen Höhe der Menge $\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}}$, welche offenbar τ_α ist, aber $\pi(\tau_\alpha)$ ist dann wie gewünscht gerade τ, und es fragt, ob α in $\mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}}$ zu finden ist; außerdem folgt mit dieser Technik auch sofort $\gamma \cap f\,"\,\alpha = \alpha$, denn $\{\xi \in \mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} \mid \xi < \alpha\} = \alpha \cap \mathbf{L}_{\alpha^{+\omega}} = \alpha$ und das ist auch der kritische Punkt von π. Somit sind alle Bedingungen an α erfüllt, so daß letztendlich α bezeugt, daß p' wie gewünscht im Schnitt $\mathcal{D}$ liegt. Es bleibt der

BEWEIS VON (7.2.2): Im folgenden werden wir in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ arbeiten, so daß wir insbesondere mit ω_1 immer abkürzend die Ordinalzahl $(\omega_1)^{\mathbf{L}[G_\gamma]}$ bezeichnen. Sei nun in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ die Menge $\mathcal{T}'$ als $\{X \mid X \prec \mathbf{L}_\theta[G_\gamma] \ \wedge\ X \cap \gamma \text{ ist transitiv } \wedge\ |X| = \omega_1 \wedge \{\tilde{p}, p, \dot{C}, \gamma\} \subseteq X \wedge \tilde{p} \Vdash \check{X} \cap \check{\gamma} \in \dot{C}\}$ definiert; dann ist nach Wahl von $\mathcal{T}'$ natürlich $\mathcal{T} := \{X \cap \mathbf{J}_\tau \mid X \in \mathcal{T}'\}$ eine club Menge[12] in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$. Wenden wir die Stationarität von $\mathcal{S}$ an, dann erhalten wir ein Element u aus $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$; dabei existiert dann ein $X \in \mathcal{T}'$ mit $u = X \cap \mathbf{J}_\tau$. Sei weiterhin für den (inversen) MOSTOWSKI-Kollaps $\pi : M \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X$
ν_i zunächst eine Folge $\langle \nu_i \mid i < \omega_1 \rangle$ mit $\sup_{i<\omega_1} \nu_i = \mathrm{On}^M$ und $\nu_i \in M$ gewählt; fixiere
f_i wegen $X \prec \mathbf{L}_{\gamma^{+(\omega+2)}}[G_\gamma]$ und $\pi(\alpha) = \gamma$ Funktionen $f_i : \alpha^{+(\omega+1)M} \xrightarrow{\text{auf}} \nu_i$ mit
$\tilde{\nu}$ $f_i \in M$ für $i < \omega_1$. Wähle erneut eine Folge $\langle \tilde{\nu}_i \mid i < \omega_1 \rangle$, so daß $\tilde{\nu}_i < \alpha^{+(\omega+1)M}$ und
$\tilde{f}_i$ $\sup_{i<\omega_1} \tilde{\nu}_i = \alpha^{+(\omega+1)M}$ gilt und fixiere Funktionen $\tilde{f}_i : \alpha^{(+\omega)M} \xrightarrow{\text{auf}} \tilde{\nu}_i$ in M. Dann ist offenbar nach Konstruktion $\mathrm{On}^M = \bigcup\{f_{i_0}\,"\,\tilde{f}_{i_1}\,"\,\alpha^{(+j)M} \mid i_0, i_1 < \omega_1, j < \omega\}$.

Das reicht aber noch nicht, weil wir eine abzählbare Vereinigung von Okjekten in M einer Mächtigkeit echt kleiner α benötigen. Für jedes $j < \omega$ können wir aber schrittweise durch Hinzunahme einer weiteren Folge und dazugehörigen Surjektionen – wie oben beim Übergang von $\alpha^{+(\omega+2)M} \geq \mathrm{On}^M$ über $\alpha^{+(\omega+1)M}$ zu
$k_l^{(j)}$ $\alpha^{(+\omega)M}$ schon zweimal vorgeführt – Abbildungen $k_l^{(j)}$ in M finden, so daß schließlich $\alpha^{(+j)M} = \bigcup_{l<\omega_1} k_l^{(j)}\,"\,\alpha$ für $j < \omega$ gilt. Um jetzt zur gewünschten Größe übergehen zu können, müssen wir α appromimieren können, dazu sind wir aber in der Lage, denn nach Wahl hat α in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ eine abzählbare Konfinalität, so daß wir uns eine

[11]Hierbei ist f nach Wahl die Abbildung $\dot{f}_G$.
[12]Es gilt $\mathbf{L}[G_\gamma] \models \omega_1 < \omega_2 = \gamma$.

abzählbare und konfinale Folge $\langle \mu_n \,|\, n < \omega \rangle$ aus M nehmen können und letztendlich $u_n^{(j)} := \bigcup \{ f_{i_0} \text{''}\, \tilde{f}_{i_1} \text{''}\, k_l^{(j)} \text{''}\, \mu_n \mid i_0, i_1 < \omega_1, l < \omega_1 \}$ definieren, so daß wie gewünscht $u_n^{(j)}$ On^M eine abzählbare Vereinigung der $u_n^{(j)}$ für natürliche Zahlen j und n ist, wobei diese Objekte jeweils in M liegen und eine Mächtigkeit echt kleiner α besitzen. Da wir aber Submodelle von einem (relativ) konstruktiblen Universum betrachten, haben wir mit dieser Zerlegung der Ordinalzahlen von M auch gleichzeitig eine solche für ganz M gefunden, wobei wir diese o.B.d.A. auch mit $u_n^{(j)}$ bezeichnen. Damit erfüllen die Bildmengen $\pi(u_n^{(j)})$ die geforderten Eigenschaften für X. ⊠ (7.2.2)

Eine solche Darstellung war alles, was wir noch benötigten, so daß wir damit den Nachweis, daß wir auf die einschränkende Menge, bestehend aus Ordinalzahlen mit überabzählbarer Konfinalität, bei der Formulierung des Theorems 3.10 nicht verzichten dürfen, vollständig gebracht haben; die hier betrachteten α hatten nach Wahl eine abzählbare Konfinalität. ⊠(Lemma 7.2)

Damit sind die beiden Gegenbeispiele vollständig beschrieben, so daß wir uns im nächsten Abschnitt um die noch fehlende partielle Ordnung kümmern werden.

7.3 Die Forcing-Konstruktion

Wir werden jetzt für $\alpha \leq \gamma$ unerreichbar in $\mathbf{L}$ partielle Ordnungen $\mathbb{P}_\alpha$ angeben, die die geforderten Eigenschaften, die wir für das Gegenbeispiel im ersten Abschnitt ausgenutzt haben, erfüllen, d.h. wir benötigen, daß für jedes $\alpha \in \tilde{\mathcal{S}}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Faktorisierung)	$\mathbb{P}_\gamma = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma$.
(Uniformität)	Es existiert eine Formel $\Phi(x)$ in der Sprache der Mengenlehre, so daß $\mathbb{P}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ die eindeutig bestimmte $\mathbf{L}_\alpha$-Klasse mit $\mathbb{P}_\alpha = \{x \mid \mathbf{L}_\alpha \models \Phi(x)\}$ ist.
(Konfinalität)	$\mathbf{L}[G_\gamma] \models \mathrm{cf}(\alpha^{(+i)\mathbf{L}}) = \omega$ für beliebige $i < \omega$ und ein (über $\mathbf{L}$) $\mathbb{P}_\gamma$-generisches G_γ.

Genauer gesagt werden wir partielle Ordnungen angeben, die den folgenden Bedingungen genügen.

Theorem 7.3 *Es existiert eine Familie $\langle \mathbb{P}_\alpha \mid \alpha \leq \gamma$ unerreichbar in $\mathbf{L} \rangle$ von partiellen Ordnungen, so daß für ein (über $\mathbf{L}$) $\mathbb{P}_\alpha$-generisches G_α die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(a) $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1^{\mathbf{L}[G_\alpha]}$.

(b) $\alpha = \omega_2^{\mathbf{L}[G_\alpha]}$.

(c) *Für jedes $\alpha' \in \alpha$ unerreichbar in $\mathbf{L}$ gilt $\mathbf{L}[G_\alpha] \models \mathrm{cf}(\alpha'^{(+i)\mathbf{L}}) = \omega$ für beliebige natürliche Zahlen i.*

(d) $\mathbf{L}[G_\alpha] \models \mathsf{GCH}$.

(e) *$\mathbb{P}_\alpha$ erfüllt die α-Kettenbedingung.*

(f) *Die reellen Zahlen sind zwischen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}[G_\alpha]$ absolut.*

(g) $\mathbb{P}_\gamma = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma$.

(h) *Es existiert eine Formel $\Phi(x)$ in der Sprache der Mengenlehre, so daß $\mathbb{P}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ die eindeutig bestimmte $\mathbf{L}_\alpha$-Klasse mit $\mathbb{P}_\alpha = \{x \mid \mathbf{L}_\alpha \models \Phi(x)\}$ ist.*

Es reicht offenbar, das Theorem zu beweisen; der Beweis erstreckt sich über den verbleibenden Teil dieses Abschnittes und ist über meherere Lemmata verteilt. Um unser Ziel zu erreichen, benötigen wir eine Iteration, die an den Limesstellen unsere Eigenschaften erhält, damit wir auch darüber hinaus iterieren können. Wir nutzen dafür die von Shelah betrachtete RCS-Iteration[13]. Eine CS-Iteration[14] reicht für unseren Fall nicht aus, weil wir innerhalb der Iteration die Konfinalität einiger Ordinalzahlen auf ω setzen werden. Dadurch entstehen für die Uniformitätseigenschaft ungewollte neue Probleme[15].

Shelah gibt als eine mögliche Lösung eine Variation des Limesbegriffes an und führt den “Rlim” ein[16]. Die genaue Definition ist in [Sh98, Definition X.1.1] zu finden und ist im Detail nur aufwendig zu beschreiben, weil er für diese Definition induktiv einen erweiterten Namensbegriff einführt, der grob gesagt für eine Stufe $\mathbb{P}_\alpha$ Bedingungen, die in $\mathbb{P}_\alpha$ hinein genommen werden sollen, durch $\mathbb{P}_\alpha$-Namen definiert. Die Schwierigkeit liegt nun darin, die auftretende zirkuläre Situation zu umgehen. Trotz aller Schwierigkeiten beim Verständnis bringt uns diese Iterationsart zum erhofften Ziel. Mit Hilfe dieses neuen Limes-Begriffs wird dann die Definition der RCS-Iteration gegeben. Shelah führt anschließend im nächsten Kapitel in [Sh98, Kapitel XI] eine Bedingung für partielle Ordnungen $\mathbb{P}$ ein, bezeichnen wir diese abkürzend mit $\mathrm{Bed}(\mathbb{P})$, mit deren Hilfe wir unsere Wünsche realisieren können. Die Hauptergebnisse des Kapitel XI aus [Sh98] lassen sich wie folgt zusammen fassen:

Theorem 7.4 (Shelah) *Es gelten die folgenden Aussagen:*

[13] Hierbei steht “RCS” für Revised Countable Support.

[14] Wir bleiben bei dieser Notation: “CS” steht für Countable Support.

[15] Eine Möglichkeit, eine CS-Iteration zu definieren, ist, an Limesstellen mit abzählbarer Konfinalität den inversen und an den restlichen Limesstellen den direkten Limes zu nehmen. Wird nun diese Iteration in zwei Teile geteilt, wobei im ersten schon eine Zahl mit der ursprünglich überabzählbaren Konfinalität jetzt eine abzählbare erhält, die aber erst in einem späteren Zeitpunkt als Index dieser Iteration vorkommt, dann würde aber im zweiten Teil an dieser Stelle ursprünglich der direkte Limes genommen, so daß der zweite Iterationsteil (als Name über dem ersten) denkt, daß er keine CS-Iteration ist.

[16] Hierbei steht “Rlim” für Revised Limit.

(a) *Gilt* Bed($\mathbb{P}$)*, dann wird* ω_1 *durch* $\mathbb{P}$ *nicht kollabiert.*

(b) *Gilt* Bed($\mathbb{P}$) *und haben wir* CH*, dann addiert* $\mathbb{P}$ *keine neuen reellen Zahlen.*

(c) *Ist* $\overline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{P}_i, \dot{\mathbb{Q}}_i \mid i < \lambda \rangle$ *eine* RCS-*Iteration, wobei* $\dot{\mathbb{Q}}_{2i+1} = \mathbf{Levy}(\,2^{|\mathbb{P}_i|+|i|}, \omega_1\,)$ *durch abzählbare Bedingungen, sowie* Bed($\dot{\mathbb{Q}}_{2i}$)*, dann gilt auch* Bed($\mathbb{P}_\lambda$)*, wobei* $\mathbb{P}_\lambda$ *der* Rlim *von* $\overline{Q}$ *ist.*

(d) *Ist* $\overline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{P}_i, \dot{\mathbb{Q}}_i \mid i < \gamma \rangle$ *eine* RCS-*Iteration wie in (c) und ist darüber hinaus* γ *stark unerreichbar mit* $|\mathbb{P}_i| < \gamma$ *für* $i < \gamma$*, dann erfüllt* $\mathbb{P}_\gamma$*, der* Rlim *von* $\overline{\mathbb{Q}}$*, die* γ*-Kettenbedingung.*

(e) *Es gilt* Bed(**Nm**) *und* Bed($\mathbb{P}$) *für jedes* ω_1*-abgeschlossene* Forcing $\mathbb{P}$*.*

Unsere Aufgabe wird es also sein, eine RCS-Iteration wie in (c) anzugeben, um unsere Eigenschaften zu erhalten. Die (sehr) technischen Details der definierten Bedingung Bed($\cdot$) werden wir nicht weiter bemühen müssen. Wir werden im letzten Teil dieses Abschnittes etwas näher darauf eingehen. Aber wie werden wir unser Forcing aufbauen, damit es die geforderten Eigenschaften besitzt? Im Hinblick auf die Konfinalitätsbedingung ist offenbar Namba-Forcing ein guter Kandidat. Da Shelah in [Sh98, Lemma XI.4.4] nachweisen konnte, daß Namba-Forcing die Bedingung Bed(**Nm**) erfüllt, steht dem auch nichts im Wege. Wir können diesen Prozeß aber nicht nacheinander ablaufen lassen, da schon nach der ersten Anwendung von **Nm** zwar $\omega_2^{\mathbf{L}}$ eine abzählbare Konfinalität hat, aber $\omega_3^{\mathbf{L}}$ die Konfinalität ω_1 erhält, so daß wir daher keine Chance mehr haben, im nächsten Schritt mit **Nm** diese Zahl $\omega_3^{\mathbf{L}} < \omega_2^{\mathbf{L}^{\mathbf{Nm}}}$ zu erreichen.

Eine neue Strategie muß helfen. Dazu werden wir zunächst die ersten $\omega + 1$ Kardinalzahlen in **L** auf ω_2 kollabieren und dann **Nm** anwenden. Dabei müssen wir ein paar Dinge beachten. Zum einen sind wir aufgrund der doch sehr speziellen Wahl der Iteration – die ungeraden Schritte stehen schon als Levy-Kollapse fest – gezwungen, die Kollabierung mit anschließender Anwendung von **Nm** in einem Schritt auszuführen, nämlich vor dem ersten Levy-Kollaps. Täten wir das nicht, dann kollabierten wir mindestens ω_2 auf ω_1, womit in einer späteren Anwendung des Namba-Forcings erneut die *falsche* Zahl eine abzählbare Konfinalität bekäme.

Desweiteren müssen wir uns dann überlegen, ob eine Hintereinanderausführung von zwei Forcings, die die Bedingung erfüllen, auch die Bedingung erfüllt, denn sonst können wir es nicht für die RCS-Iteration verwenden. Unter Benutzung der Fakten aus [Sh98, Kapitel XI] ist es möglich, diese Forderung zu erfüllen. Allerdings müßten wir uns dann den Beweis ein wenig näher anschauen, nachdem wir die Begriffe zunächst näher analysiert hätten. Damit wäre es möglich, den gesamten Prozeß in *eine* RCS-Iteration zu stecken. Der Aufwand der Analyse wäre aber im Gegenzug nicht gerechtfertigt, da wir auch mit relativ elementaren Mitteln zum Ziel kommen können. Wir werden dennoch SHELAHs RCS-Iteration nutzen, allerdings nur als BLACK BOX mit dem oben genannten Hauptresultat. Die andere Variante werden wir anschließend am Ende dieses Abschnittes andeuten.

Aber welcher Idee werden wir schließlich nachgehen? Das Problem war die notwendige Kollabierung vor dem NAMBA-FORCING. Wir werden daher die gesamte Kollabierung aus der Iteration herausnehmen und es vor der RCS-Iteration ausführen. Dabei müssen wir uns erneut überlegen, warum die Möglichkeit der Faktorisierung zu erreichen ist. Wir werden uns daher im folgenden zunächst eine geeignete Kollabierung überlegen, dann uns anschließend mit der gewünschten RCS-Iteration befassen und zum Schluß beides zu einem FORCING zusammenfassen.

Der EASTON-Kollaps $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$

Wir werden die ursprüngliche FORCING-Konstruktion von EASTON verwenden, um die Kollabierung durchzuführen. Bekannt ist diese Konstruktion durch sein FORCING geworden, mit dem er die Potenzfunktion für reguläre Kardinalzahlen bestimmen konnte[17]. Wir möchten für reguläre $\alpha < \beta$ eine partielle Ordnung $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ angeben, so daß in einer generischen Erweiterung für jedes γ mit $\alpha \leq \gamma < \beta$, welches entweder α oder unerreichbar ist, eine Surjektion von γ auf $\gamma^{+(\omega+1)\mathbf{V}}$ existiert.

Definition 7.5 *Für eine reguläre Kardinalzahl λ sei $\mathbf{Fn}(I,J,\lambda)$ mit $|I| \geq \lambda$ und $J \neq \varnothing$ die Menge der partiellen Funktionen $p : u \longrightarrow J$, wobei $u \in [I]^{<\lambda}$.*

Diese Menge wird mit der umgekehrten Inklusion zur partiellen Ordnung und wurde in [Ku80, Kapitel VII, Abschnitt 6] ausführlich behandelt. Dort wurde gezeigt, daß sie die $(|J|^{<\lambda})^+$-Kettenbedingung erfüllt und darüber hinaus auch noch λ-abgeschlossen ist. Dieses FORCING wollen wir jetzt unter Benutzung der Konstruktion von EASTON iterieren.

Definition 7.6 *Seien $\alpha < \beta$ reguläre Kardinalzahlen.*

(a) *$\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ sei die Menge der γ mit $\alpha \leq \gamma < \beta$, wobei γ entweder α oder unerreichbar ist.*

(b) *$\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ die Menge der Funktionen p, so daß*

   (i) $\mathrm{dom}(p) = \mathcal{S}_{\alpha\beta}$.

   (ii) *Für jedes $\gamma \in \mathrm{dom}(p)$ ist $p(\gamma) \in \mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+(\omega+1)}, \gamma)$.*

   (iii) *Für jedes reguläre λ, welches nicht notwendig in $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ liegen muß, gilt*

$$|\{\gamma \in \lambda \cap \mathcal{S}_{\alpha\beta} \mid p(\gamma) \neq \varnothing\}| < \lambda.$$

   Dabei ist $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ koordinatenweise geordnet, d.h.

[17] Vergleiche [Ku80, Kapitel VIII, Abschnitt 4].

$$\overline{p} \leq p \longleftrightarrow (\forall \gamma \in \mathcal{S}_{\alpha\beta})(p(\gamma) \subseteq \overline{p}(\gamma)).$$

Der Grund, warum wir die Konstruktion von EASTON bemühen, liegt in dem folgenden Fakt; wir können nämlich ein solches FORCING immer als Produkt von zwei Faktoren auffassen, wobei die Wahl der Faktoren auch noch variiert werden kann. Das wird für die geforderte Faktorisierung unseres FORCINGs ganz wesentlich sein. Genauer gesagt erhalten wir das folgende

Lemma 7.7 *Sei $\alpha \leq \beta < \gamma$, wobei $\beta \in \mathcal{S}_{\alpha\gamma}$. Dann ist $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)} \simeq \mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)} \times \mathbb{P}^E_{(\beta,\gamma)}$.*

Der Beweis ähnelt dem für das original EASTON-FORCING. Für $\beta \in \mathcal{S}_{\alpha\gamma}$ ist $\mathcal{S}_{\alpha\gamma} = \mathcal{S}_{\alpha\beta} \cup \mathcal{S}_{\beta\gamma}$, dabei ist diese Vereinigung für $\alpha \neq \beta$ disjunkt und somit ist $\pi : \mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)} \times \mathbb{P}^E_{(\beta,\gamma)} \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}$ definiert durch $\pi(\langle p, q\rangle) := p \cup q$ ein Isomorphismus; ist $\alpha = \beta$, dann ist $\mathcal{S}_{\alpha\beta} = \{\alpha\} \subseteq \mathcal{S}_{\beta\gamma}$, so daß der erste Faktor keinen zusätzlichen Einfluß auf das Produkt hat, weil jede Bedingung des ersten Faktors schon im zweiten Faktor zu finden ist.

Durch diese Möglichkeit der Faktorisierung können wir weitere Eigenschaften ableiten. Das folgende Lemma garantiert uns, daß Konfinalitäten und damit auch Kardinalitäten bei Kardinalzahlen, die wir nicht ändern möchten, auch erhalten bleiben.

Lemma 7.8 (GCH) *Sei für reguläre $\alpha < \beta$ eine Kardinalzahl δ gegeben, deren Konfinalität beim Erzwingen mit $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ nicht erhalten bleibt. Dann existiert ein $\gamma \in \mathcal{S}_{\alpha\beta}$ und ein $0 < i \leq \omega + 1$ mit $\delta = \gamma^{+i}$. Insbesondere werden nur solche Kardinalzahlen δ kollabiert, wobei in diesem Fall die Kardinalität von δ in der generischen Erweiterung gerade γ ist.*

Beweis: Wir imitieren den Beweis der Original-Konstruktion[18] und zeigen zuerst für beliebige $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ aus $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ drei Hilfsaussagen, die schließlich die Behauptung schnell zeigen werden.

(7.3.1) $\mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)}$ ist $\tilde{\gamma}$ − abgeschlossen.

BEWEIS VON (7.3.1): Da diese EASTON-Konstruktion $\mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)}$ bis auf die in Bedingung (b)(iii) der Definition gegebene Ausdünnung im wesentlichen das Produkt $\prod_{\gamma \in \mathcal{S}_{\tilde{\gamma}\beta}} \mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+(\omega+1)}, \gamma)$ ist, vererbt sich die Abgeschlossenheit natürlich aufgrund der Regularität von γ sofort von den einzelnen Faktoren auf das gesamte FORCING. Die oben genannte Ausdünnung spielt hierbei keine Rolle, denn wenn wir eine absteigende Folge $\overline{p} := \langle p_i \mid i < \zeta\rangle$ von Bedingungen mit $\zeta < \tilde{\gamma}$ haben, dann sind auch für jedes $\gamma \in \mathcal{S}_{\tilde{\gamma}\beta}$ die Folgen $\langle p_i(\gamma) \mid i < \zeta\rangle$ in den einzelnen Faktoren absteigende Folgen. Diese haben aber aufgrund der hinreichenden Abgeschlossenheit der

[18] Vergleiche [Ku80, Kapitel VIII, Abschnitt 4].

Faktoren jeweils eine untere Schranke, die zusammengesetzt offenbar eine untere Schranke für $\overline{p}$ in $\mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)}$ ergibt. ⊠ (7.3.1)

(7.3.2) $\mathbf{Fn}(\gamma,\gamma^{+(\omega+1)},\gamma)$ erfüllt die $\gamma^{+(\omega+2)}$-Kettenbedingung und ist γ abgeschlossen.

Beweis von (7.3.2): Die zweite Behauptung ist schon bekannt; für die andere nutzen wir natürlich die bekannte Tatsache aus, daß $\mathbf{Fn}(\gamma,\gamma^{+(\omega+1)},\gamma)$ die $(|(\gamma^{+(\omega+1)})^{<\gamma}|)^+$-Kettenbedingung erfüllt, wobei unter GCH aber $(|(\gamma^{+(\omega+1)})^{<\gamma}|)^+$ natürlich nichts anderes als einfach $\gamma^{+(\omega+2)}$ ist. ⊠ (7.3.2)

(7.3.3) $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}$ erfüllt für $\lambda_\alpha := \max\{\gamma,\alpha^{+(\omega+1)}\}$ die λ_α^+-Kettenbedingung.

Beweis von (7.3.3): Hier nutzen wir die Größenbeschränkung des Produktes im Limesschritt in der Easton-Konstruktion. Setze daher für ein $p \in \mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}$

$$d(p) := \bigcup\{\ \{\delta\} \times \mathrm{dom}(\ p(\delta)\ )\mid \delta \in \mathcal{S}_\alpha\}.$$

Nun bekommt aber nach Wahl λ_α den Wert $\alpha^{+(\omega+1)}$ oder – falls $\gamma > \alpha$ und daher selbst unerreichbar – den Wert γ; in jedem Fall ist λ_α aber regulär. Nach Konstruktion gilt dann $|d(p)| < \lambda_\alpha$. Nehmen wir uns nun λ_α^+-viele Bedingungen p_i für $i < \lambda_\alpha^+$ her. Da wir GCH voraussetzen, können wir insbesondere das Δ-System-Lemma 1.2 anwenden, so daß wir eine Teilmenge $X \subseteq \lambda_\alpha^+$ mit $|X| = \lambda_\alpha^+$ bekommen, wobei die $d(p_i)$ für $i \in X$ ein Δ-System mit einer Wurzel r bilden. Wegen $|r| < \lambda_\alpha$ gibt es höchstens λ_α-viele Funktionen aus der partiellen Ordnung mit einem Definitionsbereich, der in r gegeben ist, so daß wir ein $Y \subseteq X$ mit $|Y| = \lambda_\alpha^+$ und $(\ \forall i,j \in Y\ )(\ \forall\langle\delta,n\rangle \in r\ )(\ p_i(\delta)(n) = p_j(\delta)(n)\ )$ finden können. Damit sind alle Bedingungen, die durch Y indiziert werden, wie gewünscht kompatibel. ⊠ (7.3.3)

Wir beweisen jetzt die Aussage des Lemmas. Nehmen wir an, wir hätten ein δ, welches durch $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ eine andere Konfinalität erhält, aber nicht die geforderte Gestalt hat. Offenbar kann δ wegen (7.3.1) nicht unter $\alpha+1$ liegen, da unterhalb von $\alpha+1$ gar keine Konfinalitäten geändert werden. Also existieren γ und $\tilde{\gamma}$, so daß

$$\text{(7.3.4)}\qquad \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \ \gamma < \delta \leq \tilde{\gamma}, \\[1ex] \bullet\ \ \{\gamma,\tilde{\gamma}\} \subseteq \mathcal{S}_{\alpha\beta}, \\[1ex] \bullet\ \ \text{Für ein } \gamma' \text{ mit } \gamma < \gamma' \leq \tilde{\gamma} \text{ gilt } \gamma' \notin \mathcal{S}_{\alpha\beta}. \end{array}\right.$$

Unter zweifacher Verwendung von Lemma 7.7 erhalten wir

$$\mathbb{P}^E_{\alpha\beta} \quad\simeq\quad \mathbb{P}^E_{(\alpha,\tilde{\gamma})} \times \mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)} \quad\simeq\quad (\ \mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)} \times \mathbf{Fn}(\gamma,\gamma^{+(\omega+1)},\gamma)\ ) \times \mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)},$$

weil $\mathbb{P}^E_{(\gamma,\tilde{\gamma})}$ nach gewählter Lage von γ und $\tilde{\gamma}$ offenbar isomorph zu $\mathbf{Fn}(\gamma,\gamma^{+(\omega+1)},\gamma)$ ist, denn $\mathcal{S}_{\gamma\tilde{\gamma}} = \{\gamma\}$. Jetzt nutzen wir die bewiesenen Aussagen aus, um schließlich einen Widerspruch abzuleiten, denn δ kann wegen (7.3.1) durch Anwendung von

$\mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)}$ keine andere Konfinalität bekommen haben; genauso wenig aber wegen (7.3.2) durch die Verwendung von $\mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+(\omega+1)}, \gamma)$. Wegen $\delta \geq \lambda_\alpha$ erhalten wir dann mit (7.3.3) einen Widerspruch[19]. ⊠(Lemma 7.8)

Für unsere Anwendung ist der Erhalt von GCH ganz wesentlich.

Lemma 7.9 *Beim Erzwingen mit $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$ für reguläre $\alpha \leq \beta$ bleibt* GCH *erhalten.*

Beweis: Es gelte GCH. Wir zeigen zunächst, daß ein einmaliges Erwingen mit $\mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+(\omega+1)}, \gamma)$ die Eigenschaft GCH nicht zerstört. Da diese partielle Ordnung γ-abgeschlossen ist, kommen keine Teilmengen mit einer Größe echt kleiner als γ hinzu, d.h. unterhalb von γ bleibt GCH erhalten. Für die restlichen Zahlen müssen wir die Antiketten zählen und ausnutzen, daß sich Teilmengen durch sogenannte *schöne Namen* darstellen lassen. Wir haben schon mehrfach ausgenutzt, daß die maximale Größe einer Antikette bezüglich dieser partiellen Ordnung (unter GCH) höchstens $(\gamma^{+(\omega+1)})^{<\gamma} = \gamma^{+(\omega+1)}$ ist. Außerdem besteht diese partielle Ordnung aus partiellen Funktionen von γ nach $\gamma^{+(\omega+1)}$ mit einer Mächtigkeit echt kleiner als γ. Daher ist ihre Mächtigkeit nach oben durch[20]

$$(\gamma^{+(\omega+1)})^{<\gamma} \cdot \gamma^{<\gamma} = \gamma^{+(\omega+1)} \cdot \gamma = \gamma^{+(\omega+1)}$$

abschätzbar. Somit gibt es aber höchstens $(\gamma^{+(\omega+1)})^{\gamma^{+(\omega+1)}} = \gamma^{+(\omega+2)}$ Antiketten bezüglich dieser partiellen Ordnung, d.h. wir finden auch nur $(\gamma^{+(\omega+2)})^\gamma = \gamma^{+(\omega+2)}$-viele schöne Namen für Teilmengen von γ einer generischen Erweiterung. Nun bezeugt aber die Funktion f, die in der generischen Erweiterung mit dem Definitionsbereich $\gamma^{+(\omega+2)}$ existiert, die jedem schönen Namen (bezüglich einer Aufzählung) ihren Wert in der generischen Erweiterung $\mathbf{V}[G]$ zuordnet, daß $\mathcal{P}(\gamma)^{\mathbf{V}[G]} \subseteq \mathrm{rng}(f)$ gilt, also $\mathbf{V}[G] \models 2^\gamma \leq |f| = \gamma^{+(\omega+2)}$. Dabei gilt natürlich trivialerweise die andere Ungleichung, da in der generischen Erweiterung $\gamma^{+(\omega+2)}$ die erste nicht kollabierte ($\mathbf{V}$-)Kardinalzahl oberhalb γ ist, d.h. $\gamma^{+(\omega+2)\mathbf{V}} = \gamma^{+\mathbf{V}[G]}$. Oberhalb von $\gamma^{+(\omega+2)}$ bleiben die Kardinalzahlen erhalten. Das gleiche Argument, wenn wir es induktiv weiterführen, zeigt auch den Erhalt von GCH für diese Zahlen, denn für ein $\lambda > \gamma^{+(\omega+2)}$ gibt es dann höchstens $(\gamma^{+(\omega+2)})^\lambda = \lambda^+$-viele schöne Namen für Teilmengen von λ einer generischen Erweiterung.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß diese Eigenschaft durch die Konstruktion des Easton-Kollaps nicht zerstört wird. Das läßt sich erneut aufgrund der Faktorisierung aus Lemma 7.7 leicht erreichen. Nehmen wir an, wir hätten eine Kardinalzahl

[19]Weil δ nicht die Form wie im Lemma beschrieben hat, ist $\delta > \alpha^{+(\omega+1)}$. Nun ist entweder $\gamma = \alpha$, dann erfüllt $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}$ die $\lambda^+_\alpha = \alpha^{+(\omega+2)}$-Kettenbedingung und damit wird die Konfinalität von δ nicht verändert. Ist andererseits $\gamma > \alpha$, dann ist γ unerreichbar und somit $\lambda_\alpha = \gamma$ und die Konfinalität von δ bleibt erneut erhalten.

[20]Nämlich durch das Produkt aus der Anzahl der Funktionen von $<\gamma$ nach $\gamma^{+(\omega+1)}$ und den Möglichkeiten bezüglich der Wahl des partiellen Definitionsbereiches, die jede solche Funktion hat.

δ in $\mathbf{V}$, für die GCH verletzt ist. Dann können wir γ und $\tilde{\gamma}$ mit der gleichen Lage bezüglich δ wie in (7.3.4) finden, so daß wir die gleiche Situation bekommen:

$$\mathbb{P}^E_{\alpha\beta} \quad \simeq \quad \mathbb{P}^E_{(\alpha,\tilde{\gamma})} \times \mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)} \quad \simeq \quad (\, \mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)} \times \mathbf{Fn}(\gamma, \gamma^{+(\omega+1)}, \gamma)\,) \times \mathbb{P}^E_{(\tilde{\gamma},\beta)}.$$

Aber dann kann aufgrund der Abgeschlossenheit dieser partiellen Ordnung die Potenzmenge nicht durch den letzten Faktor vergrößert worden sein; wie oben gezeigt auch nicht durch den mittleren Faktor. Der erste Faktor erfüllt aber die λ^+_α-Kettenbedingung, so daß durch die erneute Berechnung der Anzahl der schönen Namen sich $(\,|(\,\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}\,)^{<\lambda^+_\alpha}|\,)^\delta = \gamma^\delta = \delta^+$ als obere (und gleichzeitig auch untere) Schranke für die Potenzmenge von δ für dieses erste FORCING ergibt. Hierbei geht natürlich ein, daß $\lambda_\alpha < \delta$ ist, denn entweder ist λ_α gleich γ oder gleich $\alpha^{+(\omega+1)}$.

$\boxtimes$(Lemma 7.9)

Mit dieser Vorbereitung können wir diesen Teil der gesuchten partiellen Ordnung definieren.

Definition 7.10 *Für $\alpha \leq \gamma$ unerreichbar in $\mathbf{L}$ sei $\mathbb{P}^E_\alpha := (\,\mathbb{P}^E_{(\omega_2,\alpha)}\,)^{\mathbf{L}}$.*

Wir nehmen also in jedem Fall nur Funktionen aus $\mathbf{L}$, insbesondere soll die komplette Definition in $\mathbf{L}$ ausgeführt werden, d.h. die in die Konstruktion eingehenden (nicht-absoluten) Begriffe, wie Regularität, Unerreichbarkeit oder kardinaler Nachfolger, sind im Sinne von $\mathbf{L}$ zu verstehen. Zusammen mit der absoluten Definition des konstruktiblen Universums für die von uns im folgenden betrachteten Modelle werden wir die gewünschte gleichmäßige Definition des gesamten FORCINGs erhalten.

Die partielle Ordnung $\mathbb{P}^S_\alpha$

Da wir unser gewünschtes FORCING nun in zwei Teile trennen, ist dieser Teil mit der Vorbereitung durch SHELAH recht einfach. Wir müssen uns – wie bereits oben angedeutet – um Details bezüglich der Definition an dieser Stelle keine weiteren Gedanken machen, so daß wir sofort die folgende Definition ansetzen können.

Definition 7.11 *Bezeichne $\tilde{S}$ die Menge aller in $\mathbf{L}$ unerreichbaren Zahlen kleiner gleich γ, dann sei für $\alpha \in \tilde{S}$ mit $\mathbb{P}^S_\alpha$ der Rlim von $\overline{Q}$ gegeben, wobei $\overline{Q} = \langle \mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i \,|\, i < \alpha\rangle$ die RCS-Iteration, definiert durch*

$$\mathbb{Q}_i := \begin{cases} \mathbf{Nm} & : \quad \textit{falls } i \in \{\omega_2\} \cup \tilde{S}, \\ \mathbf{Levy}(2^{|\mathbb{P}_j|+|j|}, \omega_1) & : \quad \textit{falls } i = 2j+1, \\ \langle 1, 0\rangle & : \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichne $\langle 1,0\rangle$ die triviale partielle Ordnung mit größtem Element 0. Nach Theorem 7.4 gilt dann Bed($\mathbb{P}_\alpha$). Somit übersteht die Konstruktion die Limesstellen.

Gerade in diesem Beweis werden wir die Arbeit von Shelah gravierend ausnutzen. Fakten zu den RCS-Iterationen sind im [Sh98, Kapitel X,XI] zu finden.

Überlegen wir uns, was Erzwingen mit dieser partiellen Ordnung ausgehend von $\mathbf{L}$ bewirkt. Zunächst wird mit Namba-Forcing eine in ω_2 abzählbare und konfinale Folge addiert; anschließend wird bis zur nächsten unerreichbaren Zahl δ mit dem Levy-Kollaps δ auf ω_2 kollabiert, indem schrittweise alle Zahlen unterhalb δ auf ω_1 kollabiert werden. Hierbei geht ein, daß die bis dahin definierten partiellen Ordnungen innerhalb dieser Iteration alle eine Mächtigkeit kleiner als δ (alles in $\mathbf{L}$) haben; dabei hat $\mathbb{P}_\delta$ eine Mächtigkeit δ. Da jede partielle Ordnung in der Iteration jeweils Shelahs oben erwähnte Bedingung erfüllt, bleibt ω_1 erhalten und weil insbesondere $\mathbf{L} \models \mathsf{CH}$ gilt, werden auch keine neuen reellen Zahlen addiert und CH wird weiter vererbt. Aufgrund der Kettenbedingung für die in $\mathbf{L}$ unerreichbaren δ bleiben die Kardinalzahlen oberhalb eines solches δ beim Erzwingen mit $\mathbb{P}_{\overline{\delta}}$ für $\overline{\delta} \leq \delta$ erhalten, d.h. für jedes solche δ gilt für $\gamma \geq \delta$ immer $\gamma^{+\mathbf{L}} = \gamma^{+\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\delta}}$.

Darüber hinaus bleibt auch ganz GCH erhalten. Dazu werden wir wieder die Theorie der schönen Namen verwenden. Wir wissen schon, daß $|\mathbb{P}_\alpha| = \alpha$ ist und daß $\mathbb{P}_\alpha$ die α-Kettenbedingung erfüllt. Also existieren höchstens $\alpha^{<\alpha} = \alpha$ Antiketten. Für Teilmengen von ω_1 gibt es also höchstens $\alpha^{\omega_1} = \alpha$ viele schöne Namen und für Teilmengen von δ für $\delta \geq \alpha$ höchstens $\alpha^\delta = \delta^+$-viele. Nun ist $\alpha = \omega_2^{\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\alpha}}$ und wegen der Kettenbedingung bleiben auch die kardinalen Nachfolger erhalten, d.h. es gilt $\mathbf{L}^{\mathbb{P}_\alpha} \models 2^{\omega_1} = \omega_2 \ \wedge \ (\forall \delta \geq \omega_2)(\ 2^\delta = \delta^+ \ )$, also insgesamt GCH.

Die partielle Ordnung $\mathbb{P}_\alpha$

Fassen wir nun unsere Ergebnisse zusammen und definieren zunächst die gesuchten partiellen Ordnungen.

Definition 7.12 *Für $\alpha \leq \gamma$ unerreichbar in $\mathbf{L}$ setze $\mathbb{P}_\alpha := \mathbb{P}^E_\alpha * \dot{\mathbb{P}}^S_\alpha$.*

Dann gelten die geforderten Bedingungen: Zunächst ist sofort klar, daß wir die gewünschten Konfinalitätseigenschaften haben, denn für ein in $\mathbf{L}$ unerreichbares α gilt für ein (über $\mathbf{L}$) $\mathbb{P}_\gamma$-generisches G_γ immer $\mathrm{cf}(\alpha^{(+i)\mathbf{L}})^{\mathbf{L}[G_\gamma]} = \mathrm{cf}(\alpha)^{\mathbf{L}[G_\gamma]} = \omega$. Dabei wird die erste Gleichung aufgrund von $\mathbb{P}^E_\gamma$ garantiert, denn aufgrund des verwendeten Kollaps $\mathbf{Fn}(\alpha, \alpha^{+(\omega+1)\mathbf{L}}, \alpha)$, welches α-abgeschlossen ist, kommen insbesondere keine Folgen vom Ordnungstyp kleiner α hinzu, d.h. die Zahlen $\alpha^{(+i)\mathbf{L}}$ für $i < \omega$ bekommen danach die Konfinalität $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Aber anschließend wird in der Iteration durch $\mathbb{P}^E_\alpha$ zunächst α auf ω_2 kollabiert und dann im nächsten Schritt sofort ein Namba-Forcing ausgeführt, so daß dieses α letztendlich in $\mathbf{L}[G_\gamma]$ eine abzählbare Konfinalität hat. Damit folgt auch die zweite Gleichung. Überlegen wir uns, warum die Faktorisierung gilt. Wir haben diese Eigenschaft für beide partielle Ordnungen jeweils einzeln, so daß wir diese aufgrund der Konstruktion auf das

Produkt übertragen können; es gilt nämlich für beliebige in $\mathbf{L}$ unerreichbare α:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\gamma &\simeq (\,\mathbb{P}^E_\alpha * \dot{\mathbb{P}}^S_\alpha\,) * (\,\mathbb{P}^E_\gamma * \dot{\mathbb{P}}^S_\gamma\,)^{\cdot} \\
&\simeq (\,(\,\mathbb{P}^E_\alpha * \dot{\mathbb{P}}^S_\alpha\,) * \dot{\mathbb{P}}^E_\gamma\,) * \dot{\mathbb{P}}^S_\gamma \\
&\simeq (\,(\,\mathbb{P}^E_\alpha * \dot{\mathbb{P}}^S_\alpha\,) \times (\,\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}\,)^{\mathbf{L}}\,) * \dot{\mathbb{P}}^S_\gamma \\
&\simeq (\,(\,\mathbb{P}^E_\alpha \times (\,\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}\,)^{\mathbf{L}}\,) * \dot{\mathbb{P}}^S_\alpha\,) * \dot{\mathbb{P}}^S_\gamma \\
&\simeq \mathbb{P}^E_\gamma * \dot{\mathbb{P}}^S_\gamma \\
&\simeq \mathbb{P}_\gamma.
\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung denken wir an die Definition des Sternproduktes. Inhaltlich bedeutet der Stern die Nacheinanderausführung von Forcings. Dabei – und das ist gerade der Iterationscharakter an diesem Produkt – können Objekte in die partielle Ordnung aufgenommen werden, die erst durch das Anwenden früherer entstanden sind. Somit bestärkt also diese Gleichung unsere Vorstellung dieser Verknüpfungsart, die sich nach Lemma 1.10 auch ganz allgemein beweisen läßt. Beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile geht die absolute Definition von $\mathbb{P}^E_\alpha$ ein. Die Definition von $\mathbf{L}$ ist absolut, so daß in einer generischen Erweiterung keine zusätzlichen konstruktiblen Objekte genommen werden. Ganz wesentlich ist hierbei die Tatsache, daß α an dieser Stelle (in der Iteration) wie ω_2 aussieht und daher sowohl mit $\dot{\mathbb{P}}^E_\gamma$ als auch mit $(\,\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)}\,)^{\mathbf{L}}$ an der gleichen Stelle mit der Kollabierung der Kardinalzahlen angefangen wird.

Die darauf folgende Gleichung folgt aus den gleichen Argumenten wie oben. Man überlegt sich, daß $\dot{\mathbb{P}}^S_\alpha$ und $(\mathbb{P}^E_{(\alpha,\gamma)})^{\mathbf{L}}$ keinen gegenseitigen Einfluß aufeinander haben, sondern für die Anwendung von $\dot{\mathbb{P}}^S_\alpha$ lediglich $\mathbb{P}^E_\alpha$ von Bedeutung ist, somit können beide partielle Ordnungen in iher Anwendung vertauscht werden[21]. Die restlichen geforderten Eigenschaften des Theorems sind offensichtlich. Die Bedingungen (a) und (b) werden durch $\mathbb{P}^S_\alpha$ garantiert, worauf $\mathbb{P}^E_\alpha$ keinen Einfluß mehr hat. Offenbar ist aufgrund der gleichmäßigen Definition der beiden Teilordnungen, und damit auch der gesamten, die Bedingung (h) auch kein Problem. Die geforderte Formel $\Phi(x)$ kodiert gerade die Vorschrift zur uniformen Definition der partiellen Ordnung. Das ist möglich, da wir nach Konstruktion der partiellen Ordnungen jeweils die gleiche Definitionsvorschrift benutzt haben, nämlich nach dem Schema: nehme die unerreichbaren Zahlen unterhalb α und verwende jeweils die partiellen Ordnungen $\mathbb{P}^E_\gamma$ bzw. $\mathbb{P}^S_\gamma$, die ihrerseits eine vom spezifischen γ unabhängige Definitionsvorschrift haben. Die notwendige Absolutheit zwischen $\mathbf{L}_\alpha$ und $\mathbf{L}$ ist sogar durch die Elementarität, gegeben durch das Silver-Ununterscheidbare α, garantiert. Die Bedingungen (d), (e) und (f) werden von beiden partiellen Ordnungen erfüllt und durch ihr Sternprodukt nicht mehr zerstört. Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

[21] Vergleiche Lemma 1.10.

Eine Variante des FORCINGs

Zum Schluß wollen wir noch eine vielleicht elegantere Version skizzieren. Wie oben schon angedeutet ist es möglich, daß gesamte FORCING in *eine* RCS-Iteration hineinzustecken. Das hat auf das Ergebnis keinen weiteren Einfluß, allerdings könnten wir derart auf den ganzen Apperat mit dem EASTON-Kollaps verzichten. Für $\alpha \leq \gamma$ unerreichbar in $\mathbf{L}$ definieren wir die gesuchte partielle Ordnung $\mathbb{P}_\alpha$ als den Rlim von $\overline{Q}$, wobei $\overline{Q} = \langle \mathbb{P}_i, \mathbb{Q}_i \mid i < \alpha \rangle$ die RCS-Iteration, gegeben durch

$$\mathbb{Q}_i := \begin{cases} \mathbf{Fn}(\omega_2, \omega_2^{+(\omega+1)\mathbf{L}}, \omega_2) * \mathbf{Nm} & : \quad \text{falls } i = \omega_2 \text{ oder} \\ & \quad\ \ i \text{ ist unerreichbar in } \mathbf{L}, \\ \mathbf{Levy}(2^{|\mathbb{P}_j| + |j|}, \omega_1) & : \quad \text{falls } i = 2j+1, \\ \langle 1, 0 \rangle & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach den obigen Diskussionen ist klar, daß diese partiellen Ordnungen, wenn sie denn in ihren Eigenschaften die Limesschritte in der Iteration übersteht, die geforderten Bedingungen des Theorems 7.4 erfüllen. Das einzige Problem, wie auch schon früher bemerkt, ist der kritische Fall in der Definition, in der wir ein Sternprodukt von zwei partiellen Ordnungen verwenden möchten. Um dieses Problem in den Griff zu bekommen, haben wir eigentlich zwei Möglichkeiten:

Als erstes können wir versuchen, die geforderte Bedingung direkt nachzuweisen; und tatsächlich, schaut man sich den Beweis in [Sh98] an, wie dort die Bedingung für das NAMBA-FORCING nachgewiesen wurde, dann zeigt der gleiche Beweis auch die Bedingung für dieses Sternprodukt. Wir dürfen dabei nicht vergessen, daß die im Sternprodukt zuerst verwendete partielle Ordnung ω_1-abgeschlossen ist und somit sowieso die Bedingung erfüllt. Um das aber exakt zu beschreiben, müßten wir im Detail diesen Begriff analysieren, damit wir ihn im Beweis verwenden können. Allerdings wird diese Bedingung viel allgemeiner eingeführt als wir wirklich für die Anwednung in der RCS-Iteration benötigen. In der Tat wird eine $\mathcal{S}$-Bedingung für eine Klasse $\mathcal{S}$ von Kardinalzahlen definiert; dabei wird sich unsere Bedingung Bed($\mathbb{P}$) als $\{\lambda \geq \omega_2 \mid \lambda \leq |\mathbb{P}|\}$-Bedingung entpuppen. Aber auch diese Bedingung wird als $\mathbb{I}$-Bedingung für eine Klasse $\mathbb{I}$ von Idealen aufgefaßt, wobei hier die $\mathcal{S}$-Bedingung gerade die $\{\, \{X \subseteq \lambda \,:\, |X| < \lambda\} \,:\, \lambda \in \mathcal{S}\}$-Bedingung ist. Letztendlich wird mit diesem Begriff gearbeitet. Das hat den Vorteil, daß man viel allgemeinere Eigenschaften nachweisen kann, so daß man flexibler in der Anwendung ist. So erhält eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$ immer ω_1, falls $\mathbb{P}$ die $\mathcal{S}$-Bedingung für beliebiges $\mathcal{S}$ mit $\omega_1 \notin \mathcal{S}$ erfüllt[22]. NAMBA-FORCING erfüllt[23] die $\mathcal{S}$-Bedingung, falls $\omega_2 \in \mathcal{S}$. Es gilt sogar, daß jedes ω_1-abgeschlossenes FORCING jede $\mathcal{S}$-Bedingung erfüllt[24].

[22] Vergleiche [Sh98, Theorem XI.3.6].
[23] Vergleiche [Sh98, Theorem XI.4.4].
[24] Vergleiche [Sh98, Theorem XI.4.5].

Nun könnte man als zweite Möglichkeit versuchen, die Ideale für die beiden Faktoren geeignet zu wählen, um dann unter Verwendung geeigneter Lemmata[25] die gewünschte Bedingung für das Sternprodukt nachzuweisen, ohne hierfür einen direkten Beweis von Bed$(\,\cdot\,)$ führen zu müssen. Aber auch das ist nicht so einfach möglich, da das eigentliche Theorem[26] über die Stern-Verknüpfung in dieser Formulierung nicht sofort anwendbar ist, aber man trotzdem dessen Beweisidee nutzen kann, um den Nachweis zu führen; aber auch hier müßte man näher in die Materie einsteigen.

Unsere beschriebene Konstruktion war scheinbar aufwendiger aufgrund des Easton-Kollaps, ist aber dennoch viel elementarer, da wir die schon nachgewiesenen Aussagen aus [Sh98] nutzen können.

[25] Man betrachte etwa die beiden Lemmata XI.4.7 und XI.5.1 aus [Sh98].
[26] Vergleiche [Sh98, Theorem XI.5.1].

Literaturverzeichnis

[Bu96] BURGHARDT, MANFRED: *Mengenlehre*, Skriptum zu einer Vorlesung von Peter Koepke, Bonn, URL: http://www.uni-bonn.de/logic/logic.html#lectures, 1996

[ChKe90] CHANG, CHEN-CHUNG; KEISLER, H.JEROME: *Model Theory*, Amsterdam, London, North-Holland Publishing Company, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics 73, 1990

[DevJen75] DEVLIN, KEITH; JENSEN, RONALD B.: *Marginalia to a Theorem of Silver*, erschienen in: Logic Conference Kiel 1974, Proceedings of the International Summer Institute and Logic Colloquium, Berlin, Springer, Lecture Notes in Mathematics 499, S.115-142, 1975

[Dev84] DEVLIN, KEITH: *Constructibility*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, Perspectives in Mathematical Logic, 1984

[DoJen81] DODD, ANTHONY J.; JENSEN, RONALD B.: *The Core Model*, Annals of Mathematical Logic 20, S.43-75, 1981

[Do82] DODD, ANTHONY J.: *The Core Model*, Cambridge, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Notes Series 61, 1982

[Dr74] DRAKE, FRANK R.: *Set Theory - An Introduction to Large Cardinals*, Amsterdam, London, North-Holland, 1974

[Gö31] GÖDEL, KURT F.: *Über formal entscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandte Systeme I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38, 1931

[He97] HEGEWALD, ANNEKATRIN: *Generische Ultraprodukte und Woodin-Forcing*, Berlin, Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 1997

[Hi00] HILBERT, DAVID: *Mathematische Probleme*, Vortrag auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß Paris 1900, in: P.S. Alexandrov: Die Hilbertschen Probleme, Frankfurt am Main, Verlag Harri Deutsch, Ostwald Klassiker der exakten Wissenschaft 252, 1998

[Jec71] Jech, Thomas: *The closed unbounded filter on $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$*, Notices of the American Mathematical Society 18, S.663, 1971

[Jec73] Jech, Thomas: *Some combinatorical problems concerning uncountable cardinals*, Annals of Mathematical Logic 5, S.165-198, 1973

[Jec78] Jech, Thomas: *Set Theory*, New York et al., Academic Press, 1978

[Jec86] Jech, Thomas: *Multiple Forcing*, Cambridge, Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics 88, 1986

[JenKa71] Jensen, Ronald B.; Karp, Carol: *Primitive Recursive Set Functions*, erschienen in: Dana S.Scott (ed.), Axiomatic set theory, Proceedings of the symposium in pure mathematics of the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, ein Symposium an der Universität von Kalifornien, Los Angeles, Kalifornien, 10.July–5.August, 1967, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, p. 143-167, 1971

[Jen72] Jensen, Ronald B.: *The Fine Structure of the constructible Hierarchy,* Annals of Mathematical Logic 4, S.229-308, 1972

[Ka94] Kanamori, Akihiro: *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings,* Berlin et al., Springer, Perspectives in Mathematical Logic, 1994.

[Koe88] Koepke, Peter: *Some applications of short core models*, Annals of Pure and Applied Logic 37, S.179-204, 1988

[Ku70] Kunen, Kenneth: *Some Applications of Iterated Ultrapowers in Set Theory*, Annals of Mathematical Logic 1, S. 179-227, 1970

[Ku80] Kunen, Kenneth: *Set Theory, An Introduction to Independence Proof,* Amsterdam et al., North Holland, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, 1980

[LöSt99] Löwe, Benedikt; Steel, John R.: *An Introduction to Core Model Theory*, erschienen in: Cooper, Barry S., Truss John K., Sets and Proofs, Invited Papers from Logic Colloquium '97 - European Meeting of the Association for Symbolic Logic, Leeds, July 1997, Cambridge, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Notes Series 258, S.103-157, 1999

[Me74] Menas, Telis K.: *On strong compactness and supercompactness*, Annals of Mathematical Logic 7, S. 327-359, 1974

[Mi84] Mitchell, William: *The Core Model for Sequences of Measures I*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 95, S. 41-58, 1984

[Mi94] MICHELL, WILLIAM: *The Core Model up to a Woodin Cardinal*, Amsterdam, North-Holland, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 134, S.157-175, 1994

[Sh98] SHELAH, SAHARON: *Proper and Improper Forcing,* New York et al., Springer, Perspectives in Mathematical Logic, 1998

[Si71] SILVER, JACK: *Some applications of model theory in set theory*, Annals of Pure and Applied Logic 3, S. 45-110, 1971

[We00] WELCH, PHILIP D.: *Some remarks on the Maximality of Inner Models*, wird erscheinen in: Samuel Buss, Petr Hájek, Pavel Pudlák Logic Colloquium '98, Proceedings of the 1998 Association for Symbolic Logic European Summer Meeting, Prague, Czech Republic, 1998, Los Angeles, Association for Symbolic Logic, Lecture Notes in Logic, 2000

[ViWe∞] VICKERS, JOHN; WELCH, PHILIP D.: *On Elementary Embeddings of an Inner Model to The Universe* wird erscheinen in: Journal of Symbolic Logic

[Wo88] WOODIN, HUGH: *Supercompact cardinals, sets of reals and weakly homogeneous trees*, Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. 85, S.6587-6591, 1988

[Ze97] ZEMAN, MARTIN: *Das Kernmodell für nichtüberlappende Extender und seine Anwendungen*, Dissertation an der Humboldt-Universität zu Berlin, 1997

Index

Q-Formel, 16, 17, 53
$\Gamma(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$, 40
$\Gamma^*(\overline{\alpha}, \overline{\mathcal{M}})$, 46
$\mathcal{D}$-club*, 104
$\mathcal{D}$-kettenabgeschlossen, 96
$\mathcal{D}$-stationär, 97
$\mathcal{D}$-unbeschränkt, 96
$0^{\#}$, 30–37
$\square_\kappa$, 81
$\tilde{h}^n_{\mathcal{M}}$, 24
$h_{\mathcal{M}}$, 16
SCH, 81

Abwärtserweiterung, kanonische, 38
abzählbar vollständig, 25
akzeptierbar, 16
Aufwärtserweiterung, kanonische
  Σ^*, 46
  Σ_0, 40

Definierbarkeitsfragen in **L**, 14, 15
Delta-System Lemma, 1

fügsam, 16
Forcing, 2–13
  Easton, 5
  Easton-Kollaps $\mathbb{P}^E_{(\alpha,\beta)}$, 134
  iteriertes, 12
  Levy Kollaps, 6
  Namba, 6
  partielle Ordnung $\mathbb{P}^S_\alpha$, 138
  partielle Ordnung $\mathbb{P}_\alpha$, 139
funktional absolut, 23
Fusionslemma, 9

gesund, 20
gute Funktionen, 22
gut liegen, 59

Iteration, 29

Jónsson-Kardinalzahlen, 106
  starke, 108

Kondensationslemma, 15

Mostowski-Isomorphiesatz, 1

Paarfunktion (Gödelsche), 14
Projektum, 18
  ultimatives, 20
Pseudo-Ultraprodukt, 40, 46

Ramsey-Kardinalzahlen, 108
RCS-Iteration, 132, 141
relative Konstruktiblität, 2

Satz von Łoś
  normales Ultraprodukt, 25
  Pseudo-Ultraprodukt, 40
schön, 112
schwach $\mathcal{D}$-club, 97
schwach club$_\omega$, 101
schwach fügsam, 27
sehr gut liegen, 62
Silver-Ununterscheidbare, 33, 35
Singuläre Kardinalzahl-Hypothese, 81
Skolemfunktion, 16
  kanonische Σ_1, 16
Stationarität auf $[X]^{<\gamma}$
  durch überabzählbar abgeschlossene Mengen, 104
  durch Algebren, 92

durch naheliegende Verallgemeinerung, 96
Sternprodukt, 3

Theoreme
Überdeckungslemma, 83
Fundiertheit des $\Sigma^\star$-UP, 63
Fundiertheit des Σ_0-UP, 59
Häufige Erweiterbarkeit
Version 1, 72
Version 1 – FS, 78
Version 2, 113
Version 2 –FS, 119

Ultrafilter *über* einer Struktur, 25
Uniformisierungssatz, 22, 49

Thesen

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, das bekannte Theorem über die häufige Erweiterbarkeit von Einbettungen unter den Bezeichnungen[27] aus dem dritten Kapitel in der folgenden Form

Theorem 3.9 (Version 1, Jensen **- 1974)** *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}$ stationär in γ. Für $\alpha \in \mathcal{S}$ sei $\mu_\alpha > \tau_\alpha$ beliebig gewählt, so daß τ_α eine Kardinalzahl ist in $\mathbf{J}_{\mu_\alpha}$; weiterhin sei $\tilde{\sigma}_\alpha : \mathbf{J}_{\mu_\alpha} \underset{\Sigma_0}{\longrightarrow} \mathfrak{A}_\alpha$ die kanonische Aufwärtserweiterung von σ_α. Dann gibt es eine club Menge $\mathcal{C} \subseteq \gamma$, so daß für jedes $\alpha \in \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ das Pseudo-Ultraprodukt $\mathfrak{A}_\alpha$ fundiert ist.*

derart zu verallgemeinern, daß wir sofort über die oben verwendeten Submodelle (oder allgemein über Teilmengen von $\mathbf{J}_\tau$ mit einer kleineren Mächtigkeit) sprechen und nicht zusätzlich eine Kodierungsfunktion benötigen, die es uns erlaubt, wie im obigen Theorem die Aussage auf Begriffe über Ordinalzahlen zurückzuführen. So konnten wir dann, nachdem wir im fünften Kapitel geeignete Begriffe einführten, unter den Bezeichnungen[28] aus dem sechsten Kapitel die folgende Version zeigen:

Theorem 6.2 (Version 2) *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$ nun $\mathcal{D}$-*stationär* *in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$, wobei $\mathcal{D}$ eine schöne[29] Menge ist. Wähle zu $u \in \mathcal{S}$ ein $\mu_u \geq \tau_u$, so daß τ_u eine Kardinalzahl in $\mathbf{J}_{\mu_u}$ ist. Sei dann $\tilde{\sigma}_u : \mathbf{J}_{\mu_u} \longrightarrow \mathfrak{A}_u$ die kanonische Erweiterung von σ_u. Dann liegt* $\mathcal{S}' := \{u \in \mathcal{S} \mid \mathfrak{A}_u \text{ ist nicht fundiert}\}$ *nicht $\mathcal{D}$-stationär* in $[\mathbf{J}_\tau]^{<\gamma}$.*

Somit hatten wir eine Aussage bewiesen, die dem ersten Theorem entspricht. Dann haben wir im sechsten Kapitel nachgewiesen, daß die Theoreme in der obigen Form *optimal* bewiesen wurden, falls ZF mit der Existenz von $0^\#$ konsistent ist, d.h. wir konnten dann weder im ersten Theorem auf die Einschränkung der Menge $\mathcal{S}$ auf die Menge $\mathcal{D}$ verzichten, noch auf den etwas stärkeren Begriff der Stationarität* anstelle der normalen Stationarität. Der geführte Beweis des Überdeckungslemma

[27] Für eine gegebene Surjektion $f : \gamma \xrightarrow{\text{auf}} \tau$ setze $X_\alpha := f"\alpha$, wobei $\gamma < \tau$ überabzählbar und regulär ist. Betrachte dann eine club Menge $\mathcal{C}$, so daß neben geeigneten Normierungseigenschaften immer $X_\alpha \prec \mathbf{J}_\tau$ für $\alpha \in \mathcal{C}$ gilt, und die stationäre Menge $\mathcal{D} := \{\alpha \in \mathcal{C} \mid \mathrm{cf}(\alpha) > \omega\}$. Außerdem sei $\sigma_\alpha : \mathbf{J}_{\tau_\alpha} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} X_\alpha$ der (inverse) Mostowski-Kollaps.

[28] Betrachte die (in $[\mathbf{J}]^{<\gamma}$ liegende) club Menge $\mathcal{C}$, die erneut neben geeigneten Normierungseigenschaften wieder nur Submodelle von $\mathbf{J}_\tau$ enthält. Setze $\sigma_u : \mathbf{J}_{\tau_u} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} u$ für jedes $u \in \mathcal{C}$.

[29] Vergleiche Definition 6.1.

im vierten Kapitel zeigt abschließend eine typische Anwendung der Argumentation mit diesen Aussagen über die Erweiterbarkeit von gegebenen Einbettungen.

Die obigen Aussagen über die häufige Erweiterbarkeit in den beiden genannten Theoremen heben vorhandene Einbettungen von Anfangsstücken des konstruktiblen Universums, so daß sich diese Aussagen bisher lediglich auf das ursprüngliche GÖDELsche Universum beziehen. Daraus ergibt sich offenbar die natürliche Frage, ob wir die entsprechenden Aussagen auch für beliebige Anfangstücke einer relativ konstruktiblen Hierarchie nachweisen können. Da wir an vielen Stellen Kondensationsargumente oder ganz allgemein den MOSTOWSKI-Isomorphiesatz anwendeten, treten dabei natürlich Probleme auf, weil wir im allgemeinen den Erhalt der Menge, zu der wir relativ konstruiert haben, nicht erwarten können. Allerdings gibt es Ausnahmen; so kann man für die in der Kernmodelltheorie betrachteten Modelle der Form $\mathbf{L}[E]$, zumindest unter geeigneten (Nicht-)Existenzannahmen an Große Kardinalzahlen, eine analoge Version beweisen, wie ich durch Gespräche erfahren habe. In einem solchen Beweis sollte zwar die Grundidee erhalten bleiben, aber Details werden komplizierter; so werden Kondensationsargumente durch die Verwendung von Iterationen ersetzt. Die technischen Details dieser Beweise sind noch auszuführen. Es ist auch nicht bekannt, wie weit man solche Theoreme in dieser Stärke überhaupt in größeren Kernmodellen beweisen kann. Dieses Problem bedarf noch einer genaueren Analyse.