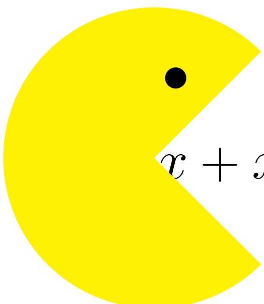
Analysis

AOR Dr. Thoralf Räsch

Mathematisches Institut
der Universität Bonn

Version 5.4.0

8. Februar 2024



$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

Polynom-nom-nom…

Danksagung

Dieses Skript entstand während meiner Vorlesung *Mathematik I für Physiker und Physikerinnen* im Wintersemester 2012/13. Grundkonzepte basieren teilweise auf Vorlagen der Herren Professoren Franke und Koepke aus vergangenen Semestern. Dieser Vorlesungsteil ergänzt das Skript *Lineare Algebra* um den Analysisanteil der oben genannten Vorlesung.

⋆ ⋆ ⋆

Für die Erstbearbeitung im Sommersemester 2012 danke ich meinem Tutor Frank Zickenheiner für die tatkräftige und geduldige Unterstützung bei der Erstellung einer LaTeX-Vorlage meiner Tafelbilder. Des weiteren danke ich Frau Christiane Langel für die fleißige Nach- und Einarbeitung im Wintersemester 2017/18. Für die intensive Überarbeitung und kompetente Gestaltung danke ich über viele, viele Semester hinweg zunächst Herrn Peter Rosinsky und anschließend Frau Gabriela Brüll.

⋆ ⋆ ⋆

Mit jedem Semester erfolgt eine Ergänzung und Überarbeitung. So danke ich den Studierenden in meinen Kursen, die massiv und gewinnbringend mit all ihren Kommentaren und Fragen dazu beitragen. Besonders bedanke ich mich bei den Studierenden aus dem Kurs im Wintersemester 2014/15 und 2017/18 für die außerordentlich produktive Unterstützung. Insbesondere möchte ich Herrn Peter Rosinsky danken, der unermüdlich den Typos auf der Spur war.

⋆ ⋆ ⋆

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Mathematik als Sprache. Man kann die Mathematik als eine formale Sprache auffassen, die wie andere Sprachen Symbole und Grammatik hat. Dabei gibt es verschiedene Arten von Symbolen. So ist zum Beispiel „+“ ein sogenanntes *Funktionssymbol*, „0“ ist ein *Konstantensymbol*, x ist ein Symbol für eine Variable und „=“ ist ein *Relationssymbol*. Solche Symbole können wir auf mehr oder weniger sinnhafte Weise hintereinanderschreiben. Wenn wir Symbole der ersten drei genannten Arten geeignet verschachteln, so erhalten wir sogenannte *Terme*.

Beispiel 1.1: Die Ausdrücke $x, 1, x+1$ sind Terme.
Verknüpfen wir zwei Terme t_1 und t_2 mit einem Funktionssymbol, so erhalten wir wieder einen Term. Die geeignete Verknüpfung mit Relationssymbolen hingegen ergibt eine Formel.

Beispiel 1.2: Der Ausdruck $t_1 = t_2$ ist eine Formel.
Auch Formeln können mit einander verknüpft werden. Seien dafür φ und ψ Formeln. Dann heißt $\varphi \vee \psi$ die *Disjunktion*, $\varphi \wedge \psi$ die *Konjunktion*, $\varphi \leftrightarrow \psi$ die *Äquivalenz* und $\varphi \to \psi$ die *Implikation* von φ und ψ.

Beispiel 1.3: Der Ausdruck $(x < 0 \;\vee\; x = 0 \;\vee\; x > 0)$ ist eine Formel.
Was genau diese einzelnen zusammengesetzten Formeln nun bedeuten, können wir anhand der folgenden *Wahrheitstabelle* ablesen.

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \to \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabelle 1: Wahrheitstabelle

Hierbei sei mit dem Symbol 1 die Aussage *Die Formel ist wahr* bezeichnet, und mit dem Symbol 0 sei die Negation von 1 bezeichnet, also *Die Formel ist nicht wahr*. Da es in der (klassischen) mathematischen Logik nur die Wahrheitswerte *Wahr* und *Falsch* gibt, reicht uns dies. Die Disjunktion von φ und ψ bedeutet also in Worten „φ oder ψ ist wahr“, die Konjunktion bedeutet „φ und ψ ist wahr“, Äquivalenz heißt „φ ist genau dann wahr, wenn ψ wahr ist“, und schließlich bedeutet eine Implikation in Worten „wenn φ wahr ist, dann ist auch ψ wahr“.

Schauen Sie genau auf die Einträge bei der Implikation hin! Eigentlich erscheint alles klar – der einzige Eintrag in der Tabelle, über den man sich zunächst wundern könnte ist der zweite Eintrag in der letzten Spalte. Dieser bedeutet, dass man aus einer falschen Aussage immer auf eine korrekte Weise alles herleiten kann.

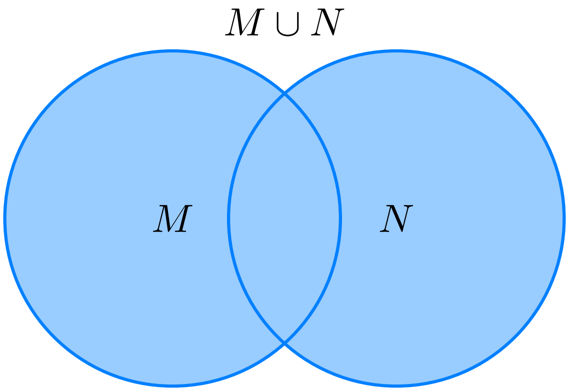
Beispiel 1.4: Überdenken Sie, was die Aussage „Wenn es morgen regnet, nehme ich meinen Schirm mit“ bedeutet. Dürfen Sie morgen einen Schirm mitnehmen, wenn doch die Sonne scheint – oder verbietet dies die gerade getätigte Regel?

Naive Mengenlehre und Quantoren. Seien M und N zwei Mengen. Auch mit Mengen kann man operieren, ähnlich wie man mit Zahlen oder Aussagen operieren kann. Wir wollen hier die grundlegendsten Mengenverknüpfungen auflisten.

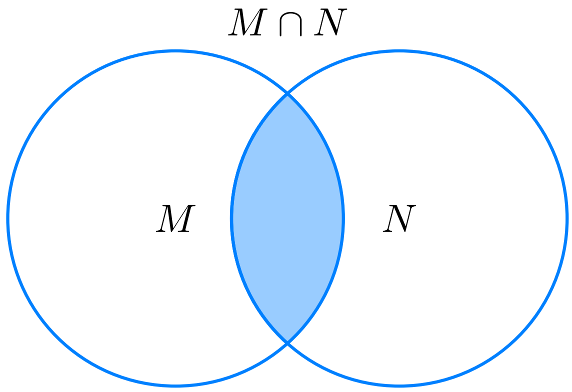
(a) Die Vereinigung zweier Mengen: $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ – vgl. Abbildung 1a
(b) Der Schnitt zweier Mengen: $M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ – vgl. Abbildung 1b

(c) Die Differenz zweier Mengen: $M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ – vgl. Abbildung 1c

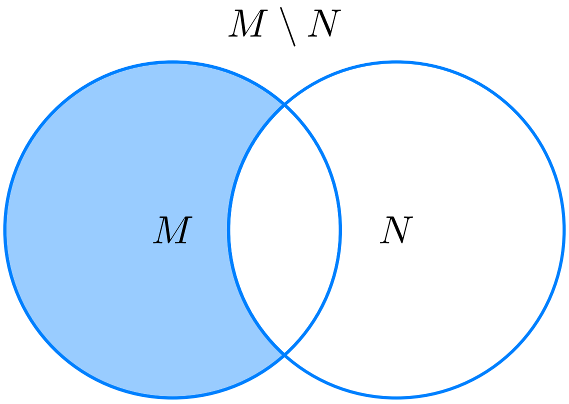
(d) Die symmetrische Differenz von Mengen: $M \Delta N = \{x \mid x \in (M \cup N) \setminus (M \cap N)\}$ – vgl. Abbildung 1d



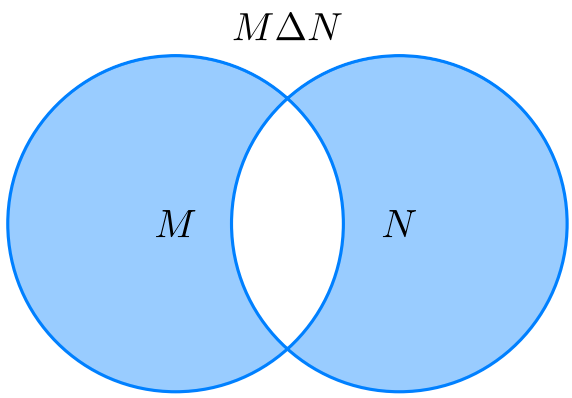
(a) Vereinigung zweier Mengen $M \cup N$



(b) Schnitt zweier Mengen $M \cap N$



(c) Differenz zweier Mengen $M \setminus N$



(d) sym. Differenz zweier Mengen $M \Delta N$

Abbildung 1: Naive Mengenlehre

Ferner gibt es unter Mengen noch Relationen. Die wichtigsten sind die Gleichheitsrelation und die Teilmengenrelation. Dabei heißen zwei Mengen gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind, also genauer: $M = N \leftrightarrow \forall x\,(x \in M \leftrightarrow x \in N)$. Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M (in Formeln $N \subseteq M$) wenn alle Elemente von N auch Elemente von M sind, also formal: $N \subseteq M \leftrightarrow \forall x\,(x \in N \to x \in M)$.

Zusammenfassen von Objekten über Eigenschaften. Nun sei M eine Menge und es sei P eine Eigenschaft die ein $x \in M$ haben kann. Wenn ein x die Eigenschaft P hat, so schreiben wir Px. Man kann sich nun fragen, welche oder auch wie viele Elemente von M die Eigenschaft P haben (oder auch nicht haben). Man möchte also die Menge $\{x \mid Px\}$ *quantifizieren*. Dabei gibt es zwei speziell ausgezeichnete Zustände: den Zustand „Es gibt mindestens ein x mit Px“ und den Zustand „Für alle x gilt Px“. Das motiviert die Definition des Existenz-Quantors $\exists$ und des All-Quantors $\forall$. Wir schreiben $\exists x\,(Px)$, wenn es mindestens ein x gibt welches P erfüllt und genauso schreiben wir $\forall x\,(Px)$, wenn wirklich jedes Element tatsächlich auch P erfüllt.

Beispiel 1.5: Mit $x + 0 = x$ ist eine Eigenschaft P gegeben, die eine natürliche Zahl haben kann oder nicht. Da wir wissen, dass diese Eigenschaft wirklich jede natürliche Zahl hat, können wir nun (innerhalb der natürlichen Zahlen) schreiben: $\forall x\,(x + 0 = x)$. Etwas komplizierter ist die Lage schon, wenn wir zwei Variablen x und y berücksichtigen müssen, denn dann können Existenz- und Allquantor in der selben Formel auftreten, beispielsweise in der Formel $\forall x \exists y : (x + 1 = y)$.

Beispiel 1.6: Verschiedene Quantoren dürfen nicht einfach vertauscht werden können. Die Formel aus Beispiel 1.5 gilt innerhalb der natürlichen Zahlen, vertauschen wir die Quantoren aber, erhalten wir $\exists y \forall x : (x+1=y)$. Diese Formel gilt innerhalb der natürlichen Zahlen *nicht*.

Zu guter Letzt wollen wir noch das Symbol $\vDash$ einführen. Sei φ eine beliebige Formel oder Aussage. Wenn φ von jedem Element einer Menge M erfüllt wird, so schreiben wir $M \vDash \varphi$, das heißt in M gilt φ. Dies kann Ihnen helfen, wenn Sie ausdrücken möchten, in welchem Kontext die Formel gilt oder eben nicht gilt.

Beispiel 1.7: Mit unseren Erkenntnissen aus Beispiel 1.5 können wir schreiben $\mathbb{N} \vDash \forall x : (x+0=x)$ oder $\mathbb{N} \vDash \forall x \exists y : (x+1=y)$.

Beispiel 1.8: In den ganzen Zahlen gibt es natürlich zu jeder Zahl einen Nachfolger und einen Vorgänger. In den natürlichen Zahlen gibt es zwar stets einen Nachfolger, aber nur für jede von null verschiedene Zahl einen Vorgänger. In Formeln liest sich dies wie folgt:

(a) $\mathbb{N} \vDash \forall x \exists y : (x+1=y)$
(b) $\mathbb{N} \vDash \forall x \exists y : (x \neq 0 \longrightarrow y+1=x)$
(c) $\mathbb{Z} \vDash \forall x \exists y : (x+1=y)$
(d) $\mathbb{Z} \vDash \forall x \exists y : (y+1=x)$

Zahlenbereiche. In der Mathematik ist es von großer Bedeutung, genau zu wissen, mit welchen Zahlen und Elementen man arbeitet. In unterschiedlichen Zahlenbereichen sind unterschiedliche Aussagen wahr und unterschiedliche Operationen möglich, wie Sie es auch gerade schon im Beispiel sehen konnten. Andere Beispiele sind:

Beispiel 1.9: In den natürlichen Zahlen gilt die Aussage: *Jede Zahl hat einen eindeutigen kleinsten Nachfolger*, in den reellen Zahlen ist diese aber falsch. Andersherum kann man zu jeder positiven reellen Zahl eine Wurzel finden, zu jeder natürlichen Zahl aber nicht.

Die wichtigsten Zahlenbereiche, mit denen wir arbeiten, sind die fünf folgenden:

(a) Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
(b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.
(c) Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$.
(d) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
(e) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \left\{ x + \mathrm{i}y \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$, wobei $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt.

Dabei wollen wir die Existenz dieser Zahlenbereiche an dieser Stelle voraussetzen und nicht herleiten. Tatsächlich haben viele Mathematiker lange an einer geeigneten Konstruktion der natürlichen Zahlen gearbeitet und die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen zu konstruieren ist überhaupt kein trivialer Vorgang. Wir wollen uns hier aber nicht mit den Konstruktionen der verschiedenen Zahlenbereiche auseinandersetzten; es soll uns genügen, dass wir ein Gefühl dafür haben, was eine natürliche Zahl, eine ganze Zahl usw. ist.

Vollständige Induktion. Angenommen wir wollen eine Aussage, bei der wir uns sicher sind, dass sie für alle natürlichen Zahlen wahr ist, beweisen. Wir können diese Aussage nicht einfach der Reihe nach für jede natürliche Zahl prüfen – das würde wohl zu lange dauern. Ein Beweis muss nach endlichen vielen Schritten beendet sein. Ein häufig angewandtes Prinzip, welches uns in dieser Situation helfen kann, ist das Prinzip der *vollständigen Induktion*:

Vollständige Induktion Sei A ein Aussage über ganze Zahlen. Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, sodass $A(n_0)$ gilt. Wenn nun für ein beliebiges, ganzzahliges $n \geq n_0$, für das $A(n)$ richtig ist, $A(n+1)$ folgt, so gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Haben Sie bemerkt, dass wir sogar ab einer ganzen Zahl aufwärts formuliert haben? Dies entspricht, mit Hilfe eines Shifts, der Formulierung für die natürlichen Zahlen.

Das Prinzip selbst ist einfach einzusehen und eines der wichtigsten Beweismethoden in der Mathematik. Einen Beweis, den man mit Hilfe der vollständigen Induktion führt, gliedert sich formal in zwei Schritte:

(1) Der *Induktionsanfang:* Es ist zu zeigen, dass $A(n_0)$ richtig ist.
(2) Der *Induktionsschritt:* Es ist zu zeigen, dass aus $A(n)$ auch $A(n+1)$ folgt.

Die Aussage, dass $A(n)$ für ein beliebiges, aber festes $n \geq n_0$ richtig ist, um daraus dann $A(n+1)$ zu folgern, nennt man die *Induktionsvoraussetzung*.

Beispiel 1.10: (Der kleine Gauß) *Es ist* $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Diese Aussage beweisen wir nun mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang

Für $n = 0$ gilt $0 = 0 = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (0+1)$, also ist die Aussage für $n_0 = 0$ wahr.

Induktionsschritt

Angenommen die Behauptung gelte für ein festes $n \geq 0$.
Wir betrachten die Behauptung für $n+1$: Es gilt nun

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+(n+1) &= (1+2+\ldots+n)+(n+1) \\ &\overset{(\mathrm{IV})}{=} \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Hierbei wurde im zweiten Gleichheitszeichen die Induktionsvoraussetzung (IV) benutzt, denn für n wissen wir ja, nach Voraussetzung schon, dass die Aussage gilt.

Ähnlich beschaffen wie die Aussage gerade ist das folgende Resultat:

Satz 1.11:

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis: Dies beweisen wir über vollständige Induktion:

Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $n_0 = 1$:

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

Induktionsschritt

Angenommen die Aussage gelte für ein festes $n \geq 1$. Dann gilt:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{(IV)}}{=} \quad \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \quad \frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6} \\
&= \quad \frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6} \\
&= \quad \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \quad \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}
\end{aligned}$$

Also gilt $A(n+1)$. In der zweiten Zeile wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet.

Damit gilt die zu zeigende Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \geq 1$. ⊠

Als eine Anwendung des gerade gesehenen Resultates, können wir folgendes Resultat formulieren:

Lemma 1.12:

Es ist

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Zwar haben wir noch nicht offiziell erklärt, was ein Integral bedeutet, aber wir haben eine Anschauung davon, als der Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der x-Achse und den Funktionsgraphen einer Funktion eingeschlossen ist.

Mit dieser Anschauung im Kopf, können wir die folgende Relationen betrachten:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) \leq \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right),$$

welche man sich mit Hilfe des nachfolgenden Bildes klar macht.

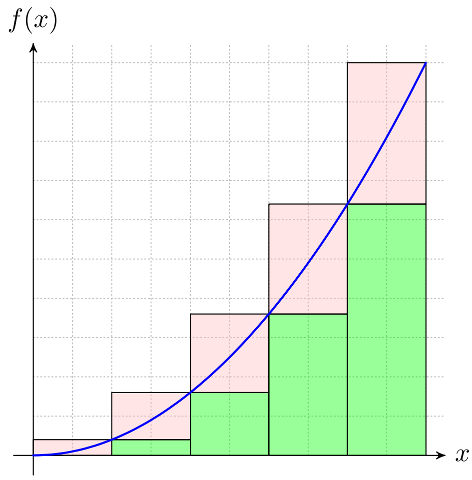


Abbildung 2: Ober- und Unterflächen von x^2

Nun gelten die folgenden Relationen und Äquivalenzen:

$$\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right) \quad \leq \quad \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \quad \leq \quad \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

$$\begin{array}{lrcccc}
\Leftrightarrow & \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} & \leq & \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x & \leq & \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)\,(2n-2)}{6} & \leq & \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x & \leq & \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)\,(2n+2)}{6} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 & \leq & \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x & \leq & \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2
\end{array}$$

Da $\left(1-\frac{1}{n}\right)^3$ und $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ mit wachsenden n von unten und oben „beliebig nah“ gegen 1 gehen, gilt demnach (Tusch!):

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 1.13: Das Prinzip der vollständigen Induktion kann uns nicht nur helfen, um Gleichheiten zu beweisen. Wir wollen nun zeigen, dass $2^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. *Beweis:*

Induktionsanfang

Die Aussage gilt für $n_0 \in \{0, 1, 2\}$:

$$2^0 = 1 > 0, \quad 2^1 = 2 > 1 \text{ und } 2^2 = 4 > 2$$

Induktionsschritt

Angenommen die Aussage gelte für ein festes $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&\overset{\text{(IV)}}{>} 2 \cdot n \\
&= n + n \\
&> n + 1
\end{aligned}$$

Also gilt $A\,(n+1)$. In der zweiten Zeile wurde die Induktionsvoraussetzung verwendet. Die letzte Zeile gilt, da $n > 1$. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die Aussage auch für $n = 0$ gilt

Damit gilt die zu zeigende Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$. ⊠

Definition durch Rekursion. Analog zum Prinzip der Induktion, mit welchem uns praktisch gelingt, das Problem der Unendlichkeit zu bezwingen, erlaubt uns das Prinzip der *Rekursion* Funktionen auf allen natürlichen Zahlen gleichzeitig zu definieren.

Das Prinzip der rekursiven Definition. Wir formulieren das Prinzip gleich wieder für ganze Zahlen ab einer festen ganzen Zahl aufwärts. Sei dazu $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl.

Rekursionsanfang

Sei das (mathematische) Objekt $F\,(n_0)$ definiert.

Rekursionsregel

Es gibt eine Definitionsvorschrift, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ stets $F\,(n+1)$ aus $F\,(n)$ festlegt.

Dann ist $F\,(n)$ für alle(!) ganzen Zahlen größer gleich n_0 definiert.

Es folgen einige (teilweise bekannte) Definitionen als Musterbeispiele für Rekursionen.

Definition 1.14 – Fakultät:

Definiere die Funktion $n!$ (sprich: n Fakultät) durch Rekursion über n mit dem Rekursionsanfang

$$0! = 1$$

und der Rekursionsregel

$$(n+1)! = (n+1) \cdot (n!)\,.$$

Definition 1.15 – Mehrfache Summe, Mehrfaches Produkt:

Für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ definieren wir die mehrfache Summe rekursiv, durch

$$\sum_{i=a}^{a} x_i = x_a$$

und für $b \geq a$ durch

$$\sum_{i=a}^{b+1} x_i = \sum_{i=a}^{b} x_i + x_{b+1}$$

Ferner setzen wir für $b < a$,

$$\sum_{i=a}^{b} x_i = 0.$$

Analog zur mehrfachen Summe, definieren wir das mehrfache Produkt durch

$$\prod_{i=a}^{a} x_i = x_a$$

und für $b \geq a$ durch

$$\prod_{i=a}^{b+1} x_i = \prod_{i=a}^{b} x_i \cdot x_{b+1}$$

Ferner setzen wir für $b < a$,

$$\prod_{i=a}^{b} x_i = 1.$$

Der Vorteil dieser *exakten* Definition von mehrfachen Summen, gegenüber der „Pünktchennotation“, wie wir sie zum Beispiel bei der Formulierung des kleinen Gauß verwandt haben, liegt auf der Hand. Bisher mussten wir uns auf unser Gefühl verlassen um beispielsweise die Zeichenfolge $1 + \ldots + n$ richtig zu interpretieren, nun aber haben wir eine ganz präzise Angabe, welche uns genau sagt, wie und worüber zu summieren ist.

Sicherlich lässt das zuletzt genannte Beispiel, also die Summe $1 + \ldots + n$, sehr wenig Interpretationsspielraum zu. Eine Summe mit verschiedenen sinnvollen Interpretationsmöglichkeiten hingegen, ist die Zeichenfolge $2 + 4 + \ldots + 32$. Hier ist es vollkommen unklar, worüber zu summieren ist. Beispielsweise könnte es die Summe über alle geraden Zahlen bis 32 oder auch die Summe über alle Zweierpotenzen bis 32 sein. Solche Uneindeutigkeiten können wir nun durch das Summenzeichen (bzw. das Produktzeichen) vermeiden.

Als eine weitere Anwendung des Gelernten wollen wir nun noch Folgendes beweisen:

Lemma 1.16 – Geometrische Summenformel:

Für alle natürlichen Zahlen k und alle reellen Zahlen $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

Beweis:

Induktionsanfang

Für $k = 0$: $$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$$

Induktionsschluss

Sei für ein $k > 0$ die Behauptung gezeigt. Dann ist

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right) + q^{k+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} = \frac{q^{k+1}-1+q^{k+2}-q^{k+1}}{q-1} = \frac{q^{k+2}-1}{q-1}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Satz.

$\boxtimes$

Die Summe $\sum_{i=0}^{k} q^i$ heißt (endliche) *geometrische Reihe.* Sie findet in der Mathematik und in angrenzenden Gebieten viel Anwendung.

Kombinatorik. In diesem Abschnitt schauen wir uns einfache kombinatorische Prinzipien an, die für uns relevant seien werden.

Zunächst wird hier das so genannte *Schubfachprinzip* vorgestellt. Der Name rührt von der folgenden und aus dem täglichen Leben sicherlich bekannten Situation her:

> „Wenn k Gegenstände in n Schubfächer gelegt werden und es ist $k > n$, so gibt es in mindestens einem der Schubfächer mindestens zwei Gegenstände.“

Etwas mathematischer liest sich dies wie folgt:

Satz 1.17:

Seien A und B zwei endliche Teilmengen mit $|A| > |B|$ und $f : A \to B$ eine Funktion. Dann gibt es $a, a' \in A, a \neq a'$ mit $f(a) = f(a')$. Das heißt, die Abbildung $f\colon A \to B$ ist nicht injektiv.

Es gibt auch allgemeinere Schubfachprinzipien für unendliche Mengen, also etwa wenn wir die Voraussetzungen des Satzes für unendliche Mengen A und B abändern, wobei A überabzählbar und B abzählbar ist. Dann muss es ebenfalls ein „Schubfach“ geben, in dem mehr als ein Element vorkommt; genauer gesagt muss es eines geben, welches bereits überabzählbar viele Elemente enthält.

Für unendliche Mengen ist dieses Prinzip vielleicht nicht ganz so anschaulich klar, aber im Falle endlicher Mengen wird sicherlich jeder sofort diese Aussage als wahr akzeptieren.

Beispiel 1.18: In einer Gruppe von 13 Personen haben mindestens 2 im gleichen Monat Geburtstag. (Auch klar!). Bezogen auf Satz 1.17 ist A die Menge der Personen, B die Menge der Monate und f weist jeder Person ihren Geburtsmonat zu.

Auf dem Weg zu den eigentlichen Zählformeln führen wir zunächst den *Binomialkoeffizient* ein:

Definition 1.19 – Binomialkoeffizient:

Für natürliche Zahlen n, k mit $k \leq n$ wird der Quotient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

gelesen „n über k“, als Binomialkoeffizient bezeichnet.

Formal können wir diesen für $k > n$ gleich 0 setzen.

Der Binomialkoeffizient gibt an, wie viele k-elementige Teilmengen man aus einer n-elementigen Grundmenge bilden kann. Er hat in der Mathematik sehr viele Anwendungen: in der Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie, der Linearen Algebra, usw. Eine sehr wichtige Anwendung, die sowohl die Definition aber insbesondere die Bezeichnung des Binomialkoeffizienten rechtfertigt, sehen wir im folgenden Satz:

Satz 1.20 – Binomischer Lehrsatz:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot y + \cdots + \binom{n}{n-1}x \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\end{aligned}$$

Beweis: Dieser Satz lässt sich wieder mit vollständiger Induktion zeigen.

Induktionsanfang Die Aussage gilt für $n_0 = 0$:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k$$

Induktionsschluss

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y) \cdot (x+y)^n \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} (x+y) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\ &= x \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i + y \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) x^{n-i+1} y^i + y^{n+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} x^{(n+1)-i} y^i + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{(n+1)-i} y^i
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Satz. ⊠

Bemerkung 1.21: Der Satz fällt für $n = 2$ mit den uns bekannten binomischen Formeln zusammen:

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot (2-0)!} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

Somit haben wir:

$$(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 \cdot y^0 + 2 \cdot x^1 \cdot y^1 + 1 \cdot x^0 \cdot y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Folgende Eigenschaften des Binomialkoeffizienten können hilfreich sein:

Satz 1.22:

Für alle $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$ gilt folgende Symmetrie- und Additionseigenschaft:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis: Wir beweisen beide Eigenschaften direkt und beginnen mit der ersten – zu (a):

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-n+k)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

Zu (b):

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot \big((n-1)-k\big)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot \big((n-1)-(k-1)\big)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot (n-k) + (n-1)! \cdot k}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \cdot \big((n-k)+k\big)}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

⊠

Binomialkoeffizienten lassen sich leicht mit Hilfe des so genannten *Pascalschen Dreiecks* berechnen, welches entsteht, indem man die jeweiligen oberen Elternknoten addiert und so den Tochterknoten erhält. Dieser Vorgang entspricht genau der Additionseigenschaft aus Satz 1.22 (b). Auch die Symmetrieeigenschaft (a) zeigt sich schnell mit einem Blick auf das Pascalsche Dreieck:

n	Binomialkoeffizienten										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
$\vdots$						$\vdots$					

Tabelle 2: Pascalsches Dreieck

Mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks lassen sich die allgemeinen binomischen Formeln herleiten, wie wir weiter oben gezeigt haben. Es ist zum Beispiel für $n = 4$:

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4.$$

⋆ ⋆ ⋆

Zählformeln. Kommen wir nun zu den wichtigen *Zählformeln*, die vielerorts inner- und außerhalb der Mathematik Anwendung finden. Häufig bedient man sich folgendem einfachen *Urnenmodell*, um beispielsweise zufällige Ereignisse zu modellieren. Dabei stellen wir uns vor, dass eine Urne mit unterschiedlichen Kugeln gefüllt ist, und wir nacheinander Kugeln aus dieser Urne ziehen sollen. Dabei gibt es zwei Optionen, die variiert werden können:

(a) Wir ziehen nacheinander eine Kugel und legen diese wieder in die Urne zurück oder nicht.

(b) Wir ziehen nacheinander Kugeln aus der Urne und merken uns dabei die Reihenfolge der gezogenen Kugeln oder nicht.

Somit lassen sich vier Arten, die Kugeln zu ziehen unterscheiden: nämlich *mit* oder *ohne* Wiederholung (also mit oder ohne Zurücklegen) und *mit* oder *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge (der gezogenen Kugeln). Wir wollen diese verschiedenen Vorgehensweisen nun genauer untersuchen.

Zunächst schauen wir uns den Fall **„mit Reihenfolge“** an. Diese Art der Ziehung wird allgemein als *Variation* bezeichnet. Wir unterscheiden erneut zwei Unterfälle:

(1) **Variation ohne Wiederholung** (ohne Zurücklegen), d.h. wir ziehen k Kugeln aus einer Urne mit insgesamt n Kugeln und legen dabei die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne zurück und achten auf die Reihenfolge während der Ziehung. Dann gibt es insgesamt $\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$

Möglichkeiten: Für die erste Kugel gibt es n Möglichkeiten, für die zweite $n-1$, ... und für die k-te sind es $n-k+1$. Insgesamt ergeben sich so also $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Beispiel: Wir wollen aus einer Gruppe von 8 Schülern eine 4er-Staffel zusammenstellen. Hier ist $n = 8$ und $k = 4$; ohne Wiederholung, mit Reihenfolge:

$$\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680.$$

(2) Variation mit Wiederholung (mit Zurücklegen), d.h. wir ziehen k Kugeln aus einer Urne mit insgesamt n Kugeln und legen dabei die gezogene Kugel immer wieder zurück und achten penibel auf die Reihenfolge während der Ziehung. Dann gibt es insgesamt $\boxed{n^k}$ Möglichkeiten: Für jede der k Ziehungen gibt es n Kugeln zur Auswahl, also ist die Anzahl der Möglichkeiten $\underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}} = n^k$.

Beispiel: Wir wollen einen Safe knacken. Der Code besteht aus vier Stellen mit jeweils zehn möglichen Ziffern. Dann ist $n = 10$ und $k = 4$ und es gibt somit $n^k = 10^4 = 10\,000$ Möglichkeiten.

Es bleibt der Fall **„ohne Reihenfolge“**. Diese Art der Ziehung wird allgemein als *Kombination* bezeichnet. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

(1) Kombination ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen), d.h. wir möchten k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ziehen, wobei wir die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne legen, aber auch nicht auf die Reihenfolge während der Ziehung achten. Dann gibt es insgesamt $\binom{n}{k} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten. Dies entspricht der Variation ohne Wiederholung, wobei durch die Anzahl der Permutationen der Kugeln $k!$ geteilt wird, da die Reihenfolge nicht wichtig ist.

Beispiel: Wir spielen Lotto: 6 aus 49. Wir planen den Jackpot und fangen zunächst langsam mit einem 6er an. Es gibt insgesamt:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1} = 13\,983\,816,$$

also knapp 14 Millionen Möglichkeiten. $(n = 49, k = 6)$

(2) Kombination mit Wiederholung (mit Zurücklegen), d.h. wir möchten k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln ziehen und legen dabei die gezogenen Kugeln immer wieder in die Urne zurück; wir achten während der Ziehung nicht auf die Reihenfolge. Dann gibt es insgesamt $\boxed{\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}}$ Möglichkeiten.

Beispiel: Wir spielen Kniffel und würfeln mit fünf Würfeln. Wie viele Konstellationen der Würfel gibt es? Wir würfeln mit fünf Würfeln, d.h. wir erhalten fünf Zahlen, also $k = 5$. Woher bekommen wir n? Hier müssen wir überlegen, woher die Zahlen kommen – in diesem Fall von einem Würfel mit sechs Möglichkeiten, d.h. $n = 6$. Es gibt dann

$$\begin{aligned}\binom{n+k-1}{k} &= \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} &&= \frac{(6+5-1)!}{5!\,(6-1)!} \\ &= \frac{10!}{5!\cdot 5!} &&= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 256\end{aligned}$$

Möglichkeiten.

Bei unserem Kniffelwurf interessiert uns, wie häufig wir welche Zahl bekommen haben. Dies können wir folgendermaßen codieren: Wir schreiben in einer Zeile mit sechs Spalten in jede i-te Spalte so viele Kreuze, wie häufig die Zahl i gewürfelt wurde. Ein Wurf mit zwei Zweien, zwei Dreien und einer Sechs sähe so aus: $\mid \times\times \mid \times\times \mid \mid \mid \times$. Insgesamt haben wir somit $n-1$ Trennstriche (für n Spalten) und k Kreuze (für k Züge), also $n+k-1$ Positionen, aus denen wir als Kombination ohne Wiederholung k Positionen auswählen - also $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten!

Fassen wir die vier prinzipiellen Möglichkeiten noch einmal übersichtlich in einer Tabelle zusammen. Die jeweils in Klammern stehende Bezeichnung für die einzelnen Fälle wird mitunter in der Literatur verwendet und soll hier der Vollständigkeit halber angegeben sein:

	Variation (mit Reihenfolge)	Kombination (ohne Reihenfolge)
mit Wiederholung	n^k (k-Stichprobe)	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ (k-Auswahl)
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$ (k-Permutation)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (k-Kombination)

Tabelle 3: Kombinationen

An dieser Stelle sollte vielleicht kurz auf das Wachstum der Fakultätsfunktion eingegangen werden, um auch ein Gefühl dafür zu bekommen, wie sich die in der Tabelle aufgeführten Funktionen verhalten. Dafür seien hier die ersten paar Werte der Fakultät aufgelistet:

$$0! := 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,\ \ldots$$
$$10! \approx 3\cdot 10^6,\ 20! \approx 2\cdot 10^{18},\ 100! \approx 10^{158},\ \ldots$$

Wie wir also beobachten können, werden die Zahlen sehr schnell absurd groß. Um hierfür ein Gefühl zu bekommen, analysieren wir das Wachstum etwas: Tatsächlich wächst die Fakultät schneller als jedes Polynom. Wir haben nämlich das folgende Resultat:

Lemma 1.23:

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion n^k, für jedes feste $k \geq 1$.

Beweis: Wir betrachten $n > 2k$ und sortieren um:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 \\ &\geq (k+1) \cdot (n \cdot 1) \cdot \big((n-1) \cdot 2\big) \cdot \big((n-2) \cdot 3\big) \cdot \ldots \cdot \big((n-k+1) \cdot k\big) \\ &= (k+1) \cdot n \cdot (2n-2) \cdot (3n-6) \cdot \ldots \cdot \big(k \cdot n - (k+1) \cdot k\big) \\ &= (k+1) \cdot n \cdot (n+n-2) \cdot (n+2n-6) \cdot \ldots \cdot \big(n + (k-1) \cdot n - (k+1) \cdot k\big) \\ &\geq (k+1) \cdot \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-mal}} \\ &> n^k. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile Ungleichheit, da alle Faktoren zwischen $(n-k+1)$ und $(k+1)$ weggefallen sind (das wissen wir, weil $n > 2k$). Die zweite Ungleichung gilt, weil $n > 2k$ und somit

$$n-2, 2n-6, \ldots, (k-1) \cdot n - (k+1) \cdot k > 0.$$

⊠

Die Fakultät wächst aber auch schneller als jede Exponentialfunktion. Dies sehen wir im nächsten Lemma:

Lemma 1.24:

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion k^n, für jedes feste $k \geq 2$.

Beweis: Wir betrachten $n > 2k^2$. Man kann sich schnell davon überzeugen, dass dann auch gilt:

$$n - \frac{n}{2} > k^2 \text{ und } n - k^2 > \frac{n}{2}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \left(k^2+1\right) \cdot k^2 \cdot \ldots \cdot 1 \\ &> \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \left(k^2+1\right)}_{n-k^2 \text{ Faktoren}} \\ &\geq \underbrace{k^2 \cdot \ldots \cdot k^2}_{n-k^2 \text{ Faktoren}} \\ &> \underbrace{k^2 \cdot \ldots \cdot k^2}_{\frac{n}{2} \text{ Faktoren}} \\ &= k^n. \end{aligned}$$

⊠

2. Algebraische Strukturen

In allen Bereichen der Mathematik arbeitet man mit algebraischen Strukturen. Eine sehr wichtige algebraische Struktur ist der *Körper*.

Definition 2.1 – Körper:

Ein Körper ist eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei inneren Verknüpfungen $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ (Addition) und $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ (Multiplikation), welche den folgenden Axiomen genügen:

(K1): Für alle $x,y,z \in \mathbb{K}$ gilt: $x+(y+z) = (x+y)+z$ (Assoziativität der Addition)
(K2): Es gibt ein Element $0\in\mathbb{K}$ mit $x+0=x$ für alle $x\in\mathbb{K}$ (0 ist das neutrale Element der Addition)
(K3): Für alle $x\in\mathbb{K}$ gibt es ein $-x\in\mathbb{K}$ mit $x+(-x)=0$ ($-x$ ist das inverse Element zu x bzgl. der Addition)
(K4): Für alle $x,y\in\mathbb{K}$ gilt: $x+y=y+x$ (Kommutativgesetz der Addition)
(K5): Für alle $x,y,z\in\mathbb{K}$ gilt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)
(K6): Es gibt ein Element $1\in\mathbb{K}$ mit $x\cdot 1=x$ (1 ist das neutrale Element der Multiplikation)

(K7): Für alle $x\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ gibt es ein $x^{-1}\in K$ mit $x\cdot x^{-1}=1$ (x^{-1} ist das inverse Element zu x bzgl. der Multiplikation)
(K8): Für alle $x,y\in\mathbb{K}$ gilt: $x\cdot y=y\cdot x$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)
(K9): Für alle $x,y,z\in\mathbb{K}$ gilt: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (Distributivgesetz)
(K10): $0\neq 1$ (Achtung! – Was bedeutet dies genau?)

Beispiel 2.2: Die Menge der natürlichen Zahlen bildet keinen Körper - außer 0 ist kein Element invertierbar bezüglich der Addition. In den ganzen Zahlen ist dieser Umstand zwar geheilt, doch existieren hier außer 1 und -1 keine multiplikativen Inversen. Damit ist auch $\mathbb{Z}$ kein Körper.

Viele Strukturen, welche diesen Bedingungen genügen, sind uns schon wohlbekannt. Die Menge der reellen Zahlen mit der uns vertrauten Multiplikation und Addition aber auch die Menge der rationalen Zahlen, ebenfalls mit den uns vertrauten Verknüpfungen, bilden jeweils einen Körper. Es gibt aber noch mehr Körper.

Beispiel 2.3: Die zweielementige Menge $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ mit der Addition

$$0+0=0 \qquad 1+0=1 \qquad 1+1=0$$

und der Multiplikation

$$0\cdot 0=0 \qquad 1\cdot 0=0 \qquad 1\cdot 1=1$$

ist ebenfalls ein Körper, der aber nicht eine Teilstruktur eines der eben genannten Körper ist (An den Leser: Warum nicht?).

Dieser zuletzt genannte Körper $\mathbb{Z}_2$ zeigt auch, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ nichts mit den uns schon aus der Schule bekannten „klassischen“ Punkt und Strichrechnungen zu tun haben müssen. Dies gilt auch für die jeweiligen neutralen Elemente der Verknüpfungen, die nicht notwendigerweise etwas mit den bekannten Zahlen 0 und 1 zu tun haben müssen.

Starten wir mit einem einfachen ersten Satz über Körper.

Satz 2.4:

In einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ gelten folgende Aussagen:

(a) $-0 = 0$
(b) $-(-x) = x$
(c) $-(x+y) = (-x) + (-y)$
(d) $x \cdot 0 = 0$
(e) $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \neq 0$
(f) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$
(g) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$
(h) $(-1) \cdot x = -x$
(i) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
(j) Für alle $x, y \neq 0$ ist $(x^{-1})^{-1} = x$ und $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

Beachten Sie, dass Sie beim Lesen der einzelnen Aussagen wahrscheinlich kein Problem sehen – bedenken Sie aber, dass wir hier über Aussagen in einem beliebigen(!) Körper sprechen.

Beweis: Wir beweisen die einzelnen Aussagen durch Benutzung der Körperaxiome. Es bleibt dem Leser überlassen, sich an jedem Gleichheitszeichen zu überlegen, warum dieses gilt!

Wir zeigen zunächst (a): $-0 \overset{(K2)}{=} (-0) + 0 \overset{(K4)}{=} 0 + (-0) \overset{(K3)}{=} 0$.

Für (b) überlegt man sich:

$$\begin{aligned} -(-x) &= -(-x) + 0 &&= -(-x) + x + (-x) \\ &= -(-x) + (-x) + x &&= (-x) + (-(-x)) + x \\ &= 0 + x &&= x + 0 &&= x \end{aligned}$$

Schließlich folgt (c):

$$\begin{aligned} -(x+y) &= -(x+y) + x + (-x) + y + (-y) \\ &= -(x+y) + (x+y) + (-x) + (-y) &&= (-x) + (-y) \end{aligned}$$

Und auch (d):

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) &&= x \cdot (0+0) + (-(x \cdot 0)) \\ &= x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) &&= 0 \end{aligned}$$

Für (e) sei $x \neq 0$. Angenommen $x^{-1} = 0$. (Wir wollen diese Annahme zum Widerspruch führen und damit $x^{-1} \neq 0$ beweisen.) Dann gilt:

$$1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$$

Das aber widerspricht dem Axiom (K10): $0 \neq 1$.

$\boxtimes$

Wir werden später noch mal auf Körper zurück kommen, uns aber nun erst einer anderen Klasse von algebraischen Objekten zuwenden, den *Gruppen*.

⋆ ⋆ ⋆

Wir starten mit der zu Grunde liegenden Definition.

Definition 2.5 – Gruppe:

Eine Struktur $(G, +', 0')$, welche die Axiome (K1)-(K3) erfüllt, heißt Gruppe.

Sie kennen Gruppenstrukturen bereits.

Beispiel 2.6: Die Struktur $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist eine Gruppe; Vektorräume mit der normalen Vektoraddition sind Gruppen. Weiterhin sind auch Körper, eingeschränkt auf ihre additive Struktur, Gruppen.

Es gibt auch noch spannendere Gruppen, die für Sie später noch interessant werden:

Definition 2.7 – Symmetrische Gruppe:

Die Menge der Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ bildet die **symmetrische Gruppe** $S_n = (S_n, \circ, \mathrm{id})$. Die Verknüpfung zweier Permutation ist definiert als

$$(a_1, \dots, a_n) \circ (b_1, \dots, b_n) = (a_{b_1}, a_{b_2}, \dots, a_{b_n}).$$

Eine *Permutation* ist eine Bijektion auf $\{1, 2, \dots, n\}$. Anschaulich werden durch eine Permutation n Objekte mit Reihenfolge umsortiert.

Beispiel 2.8: Mit der Permutation $(4, 2, 1, 3)$ können Sie sich eine Abbildung vorstellen, die folgende Zuordnungen vorschreibt: $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 1$ und $4 \mapsto 3$. Diese wird manchmal auch (in der Langversion) als $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ geschrieben.

Beispiel 2.9: Wenn Sie zwei Permutation miteinander verknüpfen, können Sie sich die obige Definition auch als die Hintereinanderausführung von Abbildungen vorstellen – so gilt: $(4, 3, 2, 1) \circ (4, 2, 1, 3) = (1, 3, 4, 2)$, da 1 durch die hintere Permutation auf 4 und diese dann durch die vordere Permutation auf 1 geschickt wird.

Lemma 2.10:

Die Verknüpfung von Permutationen ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

Beispiel 2.11: $(4, 3, 2, 1) \circ (4, 2, 1, 3) = (1, 3, 4, 2) \neq (3, 1, 2, 4) = (4, 2, 1, 3) \circ (4, 3, 2, 1)$

Das neutrale Element der Verknüpfung von Permutationen ist die so genannte Identität $\mathrm{id} = (1, \dots, n)$. Das Inverse einer Permutation können wir direkt angeben und ist definiert als

$$(a_1, \dots, a_n)^{-1} := (b_1, \dots, b_n),$$

wobei $a_{b_1} = 1$, $a_{b_2} = 2, \dots, a_{b_n} = n$.

Beispiel 2.12: So ist die Permutation $\pi^{-1} = (3, 2, 4, 1)$ invers zu $\pi = (4, 2, 1, 3)$, wie Sie sich selbst leicht überzeugen können.

Lemma 2.13:

Die symmetrische Gruppe ist eine Gruppe.

Beweis: Klar nach den gemachten Überlegungen! ⊠

Bemerkung 2.14: In der Literatur sehen Sie manchmal auch die so genannte *Zykelschreibweise*. In dieser werden die zyklischen Kreise innerhalb der Permutation betont. Bei der Zykelschreibweise

können Sie mit einer beliebigen Zahl i starten und danach die iterierten Bilder $\pi(i)$, $\pi^2(i)$, $\pi^3(i), \ldots$ betrachten, bis Sie wieder bei der Zahl i sind. Sind dann nicht alle Zahlen vorgekommen, so starten Sie erneut, usw. So liest sich die Permutation $\pi := (4,2,1,3)$ als $\pi = (143)(2)$. Natürlich ist das die gleiche Permutation wie $(2)(431)$ oder auch nur (314), da man die einelementigen Zyklen gern weglässt.
Beachten Sie, dass wir in der Zykelschreibweise die Kommata zwischen den Zahlen weglassen, um einen Unterschied zwischen der Permutationskurzschreibweise und der entsprechenden Zykelschreibweise zu machen. So entspricht $(1,2,3,4)$ der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, also der Identität. Dagegen ist der Zykel (1234) die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, also nicht die Identität!

Bemerkung 2.15: Eine zyklische Permutation, die genau aus zwei Elementen besteht, nennt man auch *Vertauschung* oder *Transposition*. Jede zyklische Permutation (größerer Länge) lässt sich als Produkt von geeigneten Transpositionen schreiben – so ist $(143) = (14)(43)$.

Dies ist ein Beispiel einer Gruppe, deren Elemente keine Zahlen sind, wie wir sie aus der Schule kennen. Wenn man sich weiter mit Mathematik auseinandersetzt, wird man noch viele anderen Gruppen kennenlernen: Drehgruppen, Spiegelungsgruppen, Automorphismengruppen (von Vektorräumen, Mannigfaltigkeiten, Überlagerungen...), etc.

⋆ ⋆ ⋆

Definition 2.16 – Kommutativität/Abelsche Gruppe:

Eine Gruppe die zusätzlich noch (K4) erfüllt heißt *kommutativ* oder *abelsch*.

Beispiel 2.17: $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{R}, +, 0)$ oder auch $\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1\right)$ sind abelsche Gruppen. Die symmetrische Gruppe hingegen ist für $n \geq 3$ nicht abelsch (Übung).

⋆ ⋆ ⋆

Ordungsaxiome. Wir werden nun die Struktur der Körper um die Möglichkeit des Ordnens der Elemente erweitern. Dazu führen wir neue Axiome ein, die uns aus dem Bereich der reellen Zahlen plausibel erscheinen werden.

Lemma 2.18 – Ordnungsaxiome:

Die Ordnung $<$ (echt kleiner) auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen erfüllt die folgenden Axiome einer *linearen Ordnung*: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(O1): $x \not< x$ (*Irreflexivität*)
(O2): $x < y$ und $y < z \;\Rightarrow\; x < z$ (*Transitivität*)
(O3): $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ (*Linearität*)

Diesen Begriff von „Ordnung“ wollen wir abstrahieren.

Definition 2.19 – Partielle/Lineare Ordnung:

Eine Struktur $(S, <)$, welche den Axiomen (O1) und (O2) genügt, heißt partielle Ordnung (auf S). Falls die Struktur zusätzlich noch Axiom (O3) erfüllt heißt sie eine lineare Ordnung.

Beachten Sie: Aus Gründen der Bequemlichkeit oder der Ästhetik, schreiben wir auch $x > y$ für $y < x$.

Beispiel 2.20: Klassische Beispiele von linear geordneten Strukturen sind $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$, mit der uns bekannten Bedeutung von $<$. Ersetzen wir $<$ jeweils durch $\leq$ erhalten wir keine lineare Ordnung mehr, da (O1) nicht erfüllt ist!

Es gibt aber auch Beispiele außerhalb der Welt der Zahlen:

Beispiel 2.21: Auf der Menge der reellen Polynome bis Grad 1, also $\mathtt{Pol}_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist $\prec$ eine lineare Ordnung, wobei $ax + b \prec cx + d$ ist, wenn $a < c$ ist oder $a = c$ und $b < d$ gilt. Dabei ist $<$ die uns bekannte Kleiner-Relation aus den reellen Zahlen. Diese Ordnung lässt sich auf Polynome beliebigen Grades erweitern.

Beispiel 2.22: Für eine beliebige Menge M ist die Struktur $(\mathfrak{P}(M), \subsetneq)$ partiell geordnet aber für $|M| > 1$ nicht linear. Hierbei sei mit $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge der Menge M bezeichnet, also die Menge aller Teilmengen von M.

Folgende Eindeutigkeitsbeziehung lässt sich leicht beweisen:

Satz 2.23:

Sei $(S, <)$ eine lineare Ordnung. Dann gilt für alle $x, y \in S$ genau eine der Relationen $x < y$, $x = y$ und $y < x$.

Beweis: Nach (O3) (Linearität) gilt mindestens eine der Relationen.

- Angenommen $x < y$ und $x = y$. Dann $x < x$, Widerspruch zur Irreflexivität.
- Angenommen $x = y$ und $y < x$. Dann $x < x$, Widerspruch zur Irreflexivität.
- Angenommen $x < y$ und $y < x$. Nach der Transitivität ist $x < x$, Widerspruch zur Irreflexivität.

$\boxtimes$

⋆ ⋆ ⋆

Angeordnete Körper. Die reellen Zahlen sind zum einen ein Körper, zusätzlich noch linear geordnet. Dabei treten die arithmetische Struktur und die Ordnungsstruktur in folgende Wechselwirkung:

Lemma 2.24 – Anordnungsaxiome:

Im angeordneten Körper der reellen Zahlen gelten folgende Aussagen:

(AK1): Wenn $x < y$, so gilt $x + z < y + z$.
(AK2): Wenn $x > 0$ und $y > 0$, so auch $x \cdot y > 0$.

Diese Wechselwirkung zwischen Arithmetik und Ordnung führt uns zu Folgendem:

Definition 2.25 – (An)geordneter Körper:

Eine Struktur $(S,+,\cdot,-,^{-1},0,1,<)$ ist ein (an)geordneter Körper, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

(a) $(S,+,\cdot,-,^{-1},0,1)$ ist ein Körper
(b) $(S,<)$ ist eine lineare Ordnung
(c) $(S,+,\cdot,-,^{-1},0,1,<)$ erfüllt die Axiome (AK1) und (AK2).

Beispiel 2.26: Von den Strukturen aus Beispiel 2.20 bilden $(\mathbb{Q},<)$ und $(\mathbb{R},<)$ einen angeordneten Körper. $(\mathbb{N},<)$ und $(\mathbb{Z},<)$ erfüllen zwar (AK1) und (AK2), aber $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind keine Körper und erfüllen somit die erste Bedingung aus Definition 2.25 nicht.

Beispiel 2.27: Die Struktur $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 2.3 kann nicht angeordnet werden: Es muss gelten, dass $1>0$ ist, addiert man aber auf beiden Seiten eine 1, erhält man $0>1$.

Wie in unserem ersten Theorem über Körper, wollen wir auch hier einige Eigenschaften von angeordneten Körpern beweisen, die uns aus den reellen Zahlen schon wohlbekannt sind.

Satz 2.28:

In einem (allgemeinen) angeordneten Körper gelten folgende Aussagen:

(a) $x>0 \Leftrightarrow -x<0$
(b) $x<y \Leftrightarrow x-y<0$
(c) $x<y$ und $z>0 \Rightarrow xz<yz$
(d) $x<y$ und $z<0 \Rightarrow xz>yz$
(e) $x\neq 0 \Rightarrow x^2>0$
(f) $1>0$
(g) $x>0 \Rightarrow x^{-1}>0$
(h) $x>y>0 \Rightarrow x^{-1}<y^{-1}$
(i) $y<x<0 \Rightarrow x^{-1}<y^{-1}$

Beweis:

Zu (a) Sei $x>0$. Angenommen $-x>0$. Nach (AK1) ist dann

$$0=x+(-x)>x+0>0+0=0$$

und $0>0$. Widerspruch.

Angenommen $-x=0$. Nach (AK1) ist dann

$$0=x+(-x)>0+0=0.$$

Widerspruch. Also gilt $-x<0$.
Sei umgekehrt $-x<0$. Angenommen $x<0$. Nach (AK1) ist dann

$$0=x+(-x)<0+(-x)<0+0=0.$$

Widerspruch.

Angenommen $x = 0$. Nach (AK1) ist dann

$$0 = x + (-x) = 0 + (-x) < 0 + 0 = 0.$$

Widerspruch. Also ist $x > 0$.

Zu (b) Sei $x < y$. Dann ist $x - y = x + (-y) < y + (-y) = 0$. Sei umgekehrt $x - y < 0$. Dann ist $x = (x - y) + y < 0 + y = y$.

Zu (c) Sei $x < y$ und $z > 0$. Dann ist $y - x > 0$, $yz - xz = (y - x)z > 0$ und $xz < yz$.

Zu (d) Sei $x < y$ und $z < 0$. Dann ist $-z > 0$ und $xz - yz = (y - x)(-z) > 0$. Also ist $xz > yz$.

Zu (e) Sei $x \neq 0$.

Fall 1 $x > 0$. Dann ist $x^2 = xx > 0$.
Fall 2 $x < 0$. Dann ist $-x > 0$ und $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

Zu (f) Mit (e) ist $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

Zu (g) Sei $x > 0$. Angenommen $x^{-1} < 0$. Dann wäre $-x^{-1} > 0$ und somit auch $-1 = (-1) \cdot x \cdot x^{-1} = x \cdot (-x^{-1}) > 0$. Hierbei gilt die letzte Ungleichung wegen (AK2). Also hätten wir $1 = -(-1) < 0$ nach (a), was aber (f) widerspricht.

Zu (h) Sei $x > y > 0$. Angenommen $x^{-1} > y^{-1}$. Dann ist

$$1 = xx^{-1} > yx^{-1} > yy^{-1} = 1,$$

Widerspruch. Also ist $x^{-1} < y^{-1}$.
Analog für (i).

⊠

Ein weiteres wichtiges Resultat ist die sogenannte *Ungleichung von Bernoulli*:

Satz 2.29 – Ungleichung von Bernoulli:

Sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis: Wir beweisen diese Aussage durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsanfang: $(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

Für den Induktionsschluss sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Dann ist:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \overset{\text{(IV)}}{\geq} (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

Die erste Ungleichheit benutzt die Tatsache: $1 + x \geq 0$. ⊠

Definition 2.30 – Betrag:

Für ein Element x eines angeordneten Körpers definieren wir den (Absolut-)Betrag $|x|$ von x durch

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 2.31:

Für ein x aus einem angeordneten Körper gilt:

(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(c) $-|x| \leq x \leq |x|$
(d) $|-x| = |x|$
(e) $|xy| = |x||y|$
(f) $|x^n| = |x|^n$
(g) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Beweis: Klar!

⊠

Satz 2.32 – Dreiecksungleichung:

In einem angeordneten Körper K gilt für beliebige $x, y \in \mathbb{K}$ stets die folgende Ungleichung:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis: Es gilt nach Definition des Betrags $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$.

- Falls $x + y \geq 0$ gilt $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
- Falls $x + y < 0$ gilt $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$.

⊠

Bemerkung 2.33: Geometrisch bedeutet die Dreiecksungleichung, dass eine Seite im Dreieck immer kürzer ist, als die Summe der Länge der beiden anderen Seiten. Die direkte Verbindung zwischen zwei Punkten ist also der kürzeste Weg.

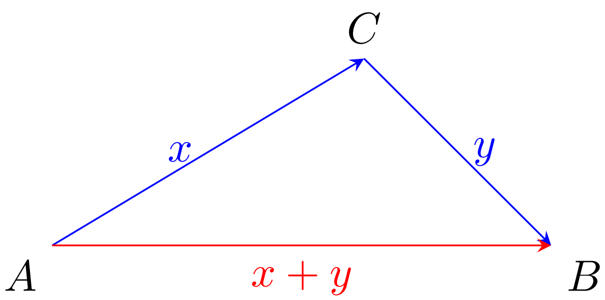


Abbildung 3: Die Dreiecksungleichung in der Geometrie

⋆ ⋆ ⋆

Das archimedische Prinzip. Das Prinzip des Archimedes, welches für uns einen axiomatischen Charakter haben soll, besagt, dass die natürlichen Zahlen „unbeschränkt“ in den reellen Zahlen liegen. Genauer liest es sich wie folgt:

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x < n$.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man $\mathbb{R}$ auch einen *archimedischen Körper*. Diese grundlegende Eigenschaft der natürlichen Zahlen wirkt vielleicht unscheinbar, ist aber von großer Bedeutung für die gesamte Entwicklung der reellen Analysis.

Dank dieser Tatsache haben wir folgende Resultate:

Satz 2.34:

Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis: Für $x = \frac{1}{\varepsilon}$ liefert uns das Prinzip von Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$. ⊠

Satz 2.35:

Sei $b > 1$ und $K \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.

Beweis: Sei $b = 1 + x$ mit $x > 0$. Nach dem Prinzip des Archimedes können wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > K$ wählen. Nach der bernoullischen Ungleichung ist

$$b^n = (1 + x)^n > 1 + nx > nx > K.$$

⊠

Satz 2.36:

Sei $b \in \mathbb{R}$, $|b| < 1$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b^n| < \varepsilon$.

Beweis:

Fall 1 $b > 0$. Dann ist $b^{-1} > 1^{-1} = 1$. Nach dem vorangehenden Satz gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(b^n)^{-1} = (b^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$. Dann ist $|b^n| = b^n < \varepsilon$.

Fall 2 $b = 0$. Dann ist $\left|b^1\right| = |0| < \varepsilon$.

Fall 3 $b < 0$. Hier können wir Fall 1 auf $-b > 1$ anwenden. Wähle also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left|(-b)^n\right| < \varepsilon$. Dann ist $|b^n| = \left|(-b)^n\right| < \varepsilon$.

⊠

Satz 2.37:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es genau eine ganze Zahl n, sodass

$$n \leq x < n + 1 \tag{$*$}$$

Beweis: Wir zeigen den Satz nur für $x > 0$.

Existenz: Angenommen, es gibt keine ganze Zahl mit $(*)$. Dann gilt aber: Wenn $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$, dann ist $n+1 \leq x$. Dies ist der Induktionsschritt für die Aussage $n \leq x$ und zwar für beliebige $n \in \mathbb{Z}$. Da außerdem der Induktionsanfang $0 \leq x$ gilt, folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion schließlich $n \leq x$ für beliebige natürliche Zahlen n.

Andererseits gibt es nach dem archimedischen Axiom ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 = n_0 \cdot 1 > x$. Das ist ein Widerspruch. Folglich gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq x < n + 1$.

Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe verschiedene natürliche Zahlen $m < n$ mit $m \leq x < m + 1$ und $n \leq x < n + 1$. Dann ist $x < m + 1 \leq n \leq x$ und $x < x$. Dies ist ein Widerspruch zu (O1). ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Intermezzo: Abschlusseigenschaften von Zahlenbereichen. Wir haben bereits einige Zahlenbereiche kennengelernt. Diese haben unterschiedliche Eigenschaften, insbesondere verschiedene Abschlusseigenschaften bezüglich verschiedener Operationen: Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist unsere „Grundmenge“. Hier wissen wir, was es bedeutet zu addieren und zu multiplizieren, haben aber zu beiden Operationen nicht unbedingt ein inverses Element zur Verfügung.

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist nun die „Vervollständigung“ der ganzen Zahlen bezüglich der Addition, d.h. wir haben hier nun zu jeden Element ein additives Inverses zur Verfügung.

Die Menge $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$ der rationalen Zahlen vervollständigt $\mathbb{Z}$ nun hinsichtlich der Multiplikation, da jedes Element (außer 0) multiplikativ invertierbar ist.

Die Struktur $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen vervollständigt $\mathbb{Q}$ bezüglich der Existenz von Nullstellen gewisser „stetiger“ Funktionen, genauer: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \leq x_1$ reelle Zahlen mit $f(x_0) \leq 0$ und $f(x_1) \geq 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl z mit $x_0 \leq z \leq x_1$ und $f(z) = 0$ (Diese Aussage wird auch als Zwischenwertsatz bezeichnet).

Wir wissen noch nicht was „Stetigkeit“ bedeutet, haben aber dennoch eine Idee davon, die uns hier genügen soll. Diese Beschreibung der reellen Zahlen bedeutet heuristisch, dass die reellen Zahlen keine „Löcher“ haben. Die rationalen Zahlen liegen dicht in den reellen Zahlen, das heißt, dass zwischen beliebigen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl liegt.

Die rationalen Zahlen dagegen haben sehr wohl Lücken, die durch die irrationalen Zahlen aufgefüllt werden. Beachten Sie dabei, dass die rationalen Zahlen die gleiche Mächtigkeit wie die natürlichen und ganzen Zahlen besitzen – sie ist abzählbar. Die reellen Zahlen dagegen sind überabzählbar, wie die komplexen Zahlen auch. Es gibt also substanziell mehr irrationale als rationale Zahlen.

Was in den reellen Zahlen immer noch nicht klappt, ist das Wurzelziehen aus einer negativen Zahl. Dieses (reelle) Manko lässt sich aber beheben, indem man nun wieder in einen größeren Zahlenbereich übergeht. Das soll der nächste Abschnitt genauer erläutern.

⋆ ⋆ ⋆

Die Komplexe Ebene. Die Konstruktion der komplexen Zahlen wird durch das Fehlen der Wurzeln negativer reeller Zahlen (innerhalb der reellen Zahlen) motiviert. So hat das Polynom $f(x) = x^2 + 1$ in den reellen Zahlen keine Nullstelle. Daher setzen wir die fehlende Zahl einfach zunächst symbolisch wie folgt an:

$$\mathrm{i} := \sqrt{-1}$$

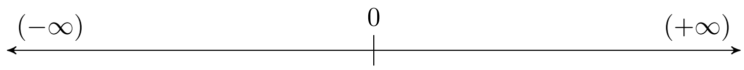
Es wird die neue Zahl i als *imaginäre Einheit* bezeichnet. Nun können wir so tun, als könnten wir mit dieser Zahl (symbolisch) rechnen wie auch bisher:

$$\begin{aligned}
(x + \mathrm{i}y) \cdot (x' + \mathrm{i}y') &= xx' + \mathrm{i}xy' + \mathrm{i}yx' + \mathrm{ii}yy' \\
&= xx' + \mathrm{i}(xy' + yx') + (-1)yy' \\
&= (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + yx')
\end{aligned}$$

Wir nennen den Ausdruck $x + \mathrm{i}y$ für $x, y \in \mathbb{R}$ eine *komplexe Zahl*. Wegen der eindeutigen Zuordnung $x + \mathrm{i}y \mapsto (x, y)$ können wir uns eine komplexe Zahl als einen Punkt in der Ebene denken.

Ähnlich wie man sich häufig die Menge der reellen Zahlen als eine Gerade vorstellt, kann man sich also die Menge der komplexen Zahlen als eine Ebene vorstellen, weshalb man dann auch von der *komplexen Ebene* spricht. Auf der x-Achse wird dabei der *Realteil* der komplexen Zahl aufgetragen. Auf der y-Achse steht der *Imaginärteil*.

Die Menge der reellen Zahlen wird oft als Zahlen*gerade* dargestellt:



Die komplexen Zahlen bilden eine Zahlen*ebene*, die **komplexe Ebene**:

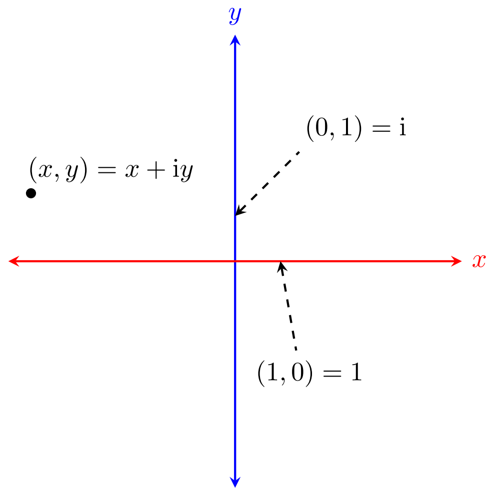


Abbildung 4: Die komplexe Zahlenebene

Da wir für eine komplexe Zahl, wie wir gesehen haben, zwei unterschiedliche Schreibweisen mit der selben Bedeutung haben, können wir uns entscheiden, mit welcher Schreibweise wir arbeiten wollen. Wir werden hier zunächst mit der Tupelschreibweise arbeiten, aber später frei zwischen den verschieden Schreibweisen hin und her wechseln.

Definition 2.38 – Komplexe Zahlen:

Die Menge der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} = \big\{(x,y) \;\big|\; x,y \in \mathbb{R}\big\}$$

mit den Verknüpfungen

$$(x,y) + \big(x',y'\big) := \big(x+x', y+y'\big)$$
$$(x,y) \cdot \big(x',y'\big) := \big(xx' - yy', xy' + yx'\big)$$

Aus den Definitionen der beiden Operationen ergeben sich die Inversen wie folgt:

$$-(x,y) = (-x,-y)$$
$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ferner definieren wir für $z = (x,y)$ die Abbildungen $\mathfrak{Re}(z) = x$ und $\mathfrak{Im}(z) = y$. Wir nennen x dann den Realteil und y den Imaginärteil von z.

Die etwas komplizierte Definition der Multiplikation zweier komplexer Zahlen begründet sich durch den nächsten Satz:

Satz 2.39:

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit den obigen Verknüpfungen bildet einen Körper.

Beweis: Hier sind die Körperaxiome (K1)-(K10) zu überprüfen. Wir beschränken uns exemplarisch auf ein paar Fälle und überlassen die restlichen Aussagen als Übung. Die additiven Axiome (K1)-(K4) gelten aufgrund der entsprechenden Aussagen in den einzelnen Komponenten und der komponentenweise Definition der Addition. Die multiplikativen Axiome sind weniger anschaulich. Für die Assoziativität (K5) multiplizieren wir aus:

$$\begin{aligned}
\Big((x,y)\cdot(x',y')\Big)\cdot(x'',y'') &= \\
&= \left(xx'-yy', xy'+yx'\right)\cdot\left(x'',y''\right) \\
&= \left(xx'x''-yy'x''-xy'y''-yx'y'', xx'y''-yy'y''+xy'x''+yx'x''\right) \\
(x,y)\cdot\Big((x',y')\cdot(x'',y'')\Big) &= \\
&= (x,y)\cdot\left(x'x''-y'y'', x'y''+y'x''\right) \\
&= \left(xx'x''-xy'y''-yx'y''-yy'x'', xx'y''+xy'x''+yx'x''-yy'y''\right).
\end{aligned}$$

(K6): $(x,y)\cdot 1=(x,y)\cdot(1,0)=(x\cdot 1, y\cdot 1)=(x,y)$.

(K7): Sei $(x,y)\neq 0$. Dann ist $x^2+y^2>0$. Weiter ist:

$$(x,y)\cdot(x,y)^{-1}=(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+yx}{x^2+y^2}\right)=(1,0)=1.$$

Die Kommutativität (K8) folgt aus Symmetriegründen.

(K9): Für die Distributivität multiplizieren wir wieder einfach aus:

$$\begin{aligned}
(x,y)\cdot\Big((x',y')+(x'',y'')\Big) &= (x,y)\cdot\left(x'+x'', y'+y''\right) \\
&= \left(xx'+xx''-yy'-yy'', xy'+xy''+yx'+yx''\right) \\
(x,y)\cdot(x',y')+(x,y)\cdot(x'',y'') &= \left(xx'-yy', xy'+yx'\right)+\left(xx''-yy'', xy''+yx''\right) \\
&= \left(xx'-yy'+xx''-yy'', xy'+yx'+xy''+yx''\right).
\end{aligned}$$

(K10): Schließlich ist $0=(0,0)\neq(1,0)=1$. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Geometrische Interpretation komplexer Operationen. Das Addieren und Multiplizieren komplexer Zahlen lassen geometrische Interpretationen zu. So ist das Addieren zweier komplexer Zahlen geometrisch nichts anderes als das Addieren zweier Vektoren des $\mathbb{R}^2$ (so ist das Addieren auf $\mathbb{C}$ schließlich auch definiert). Für die Veranschaulichung der Multiplikation bitte ich noch etwas um Geduld.

Als *Norm* oder *Betrag* einer komplexen Zahl z definieren wir den euklidischen Abstand des Punktes z in der Ebene zum Nullpunkt. Also haben wir für $z=x+\mathrm{i}y$ nach dem Satz des Pythagoras

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

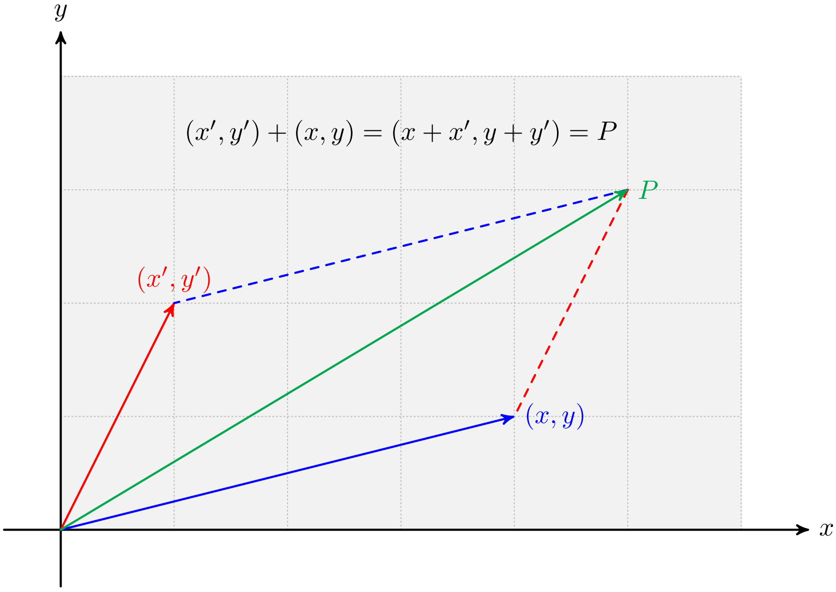


Abbildung 5: Graphische Veranschaulichung der Addition in der Ebene

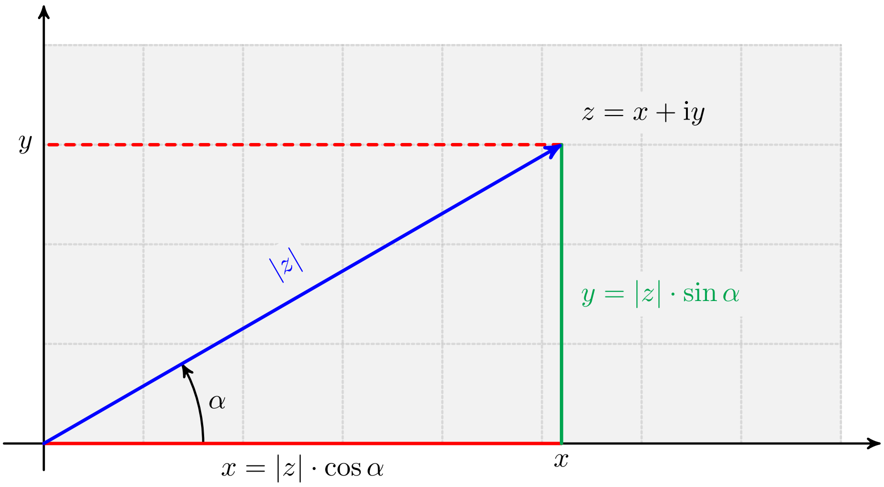


Abbildung 6: Der komplexe Betrag

Satz 2.40:

Für beliebige komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
(b) $|x| \geq 0$
(c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(d) $|-x| = |x|$
(e) $|xy| = |x||y|$
(f) $|x^n| = |x|^n$
(g) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Die Beweise für diese Aussagen ergeben sich sämtlich aus der geometrischen Interpretationen des Betrags.

⋆ ⋆ ⋆

Mit Hilfe des Betrages und Abbildung 6 kommen wir nun zu einer anderen Darstellung komplexer Zahlen. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, sodass gilt:

$$z = \big(|z| \cos(\alpha), |z| \sin(\alpha)\big) .$$

Wenn eine komplexe Zahl in dieser Darstellung gegeben ist, so sagt man, dass sie in *Polarkoordinaten* gegeben ist.

Für eine weitere komplexe Zahl $z' = \Big(\left|z'\right| \cos(\alpha'), \left|z'\right| \sin(\alpha')\Big)$ können wir dann rechnen:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (|z| \cdot \cos\alpha, |z| \cdot \sin\alpha) \cdot (\left|z'\right| \cdot \cos\alpha', \left|z'\right| \cdot \sin\alpha') \\ &= (|z| \cdot \left|z'\right| \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha' - |z| \cdot \left|z'\right| \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha', \\ &\qquad |z| \cdot \left|z'\right| \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha' + |z| \cdot \left|z'\right| \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha') \\ &= |z| \cdot \left|z'\right| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \sin\alpha \cdot \sin\alpha', \cos\alpha \cdot \sin\alpha' + \sin\alpha \cdot \cos\alpha') \\ &= |z| \cdot \left|z'\right| \cdot \Big(\cos\big(\alpha + \alpha'\big), \sin\big(\alpha + \alpha'\big)\Big) \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ergibt sich aus den *Additionstheoremen* für die Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$. Das bedeutet, dass das Multiplizieren mit einer Zahl $z = (|z|\cos\,\alpha, |z|\sin\,\alpha)$ geometrisch einer Drehung um den Winkel α und einer Streckung um die Norm von z entspricht.

Satz 2.41:

Der Einheitskreis
$$S^1 = \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| = 1\big\}$$
ist, zusammen mit der komplexen Multiplikation, eine Gruppe. Sie ist die Gruppe der Drehungen der Ebene.

Der Beweis dieses Satzes ist leicht und benutzt lediglich Eigenschaften des Betrages. Mithilfe der Polarkoordinaten können wir nun auch sehr leicht beweisen, dass die komplexen Zahlen bezüglich des Wurzelziehens abgeschlossen sind:

Lemma 2.42:

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und jedem $x \in \mathbb{C}$, gibt es ein $b \in \mathbb{C}$ mit $b^k = x$.

Beweis: Definiere die folgende komplexe Zahl: $x = |x| \big(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)\big)$. Dann erfüllt die komplexe Zahl $b = \sqrt[k]{|x|} \Big(\cos\big(\frac{\alpha}{k}\big) + \mathrm{i}\sin\big(\frac{\alpha}{k}\big)\Big)$ die gewünschte Bedingung: $b^k = x$. ⊠

Beispiel 2.43: Betrachten wir das Beispiel $z^3 = 1$.

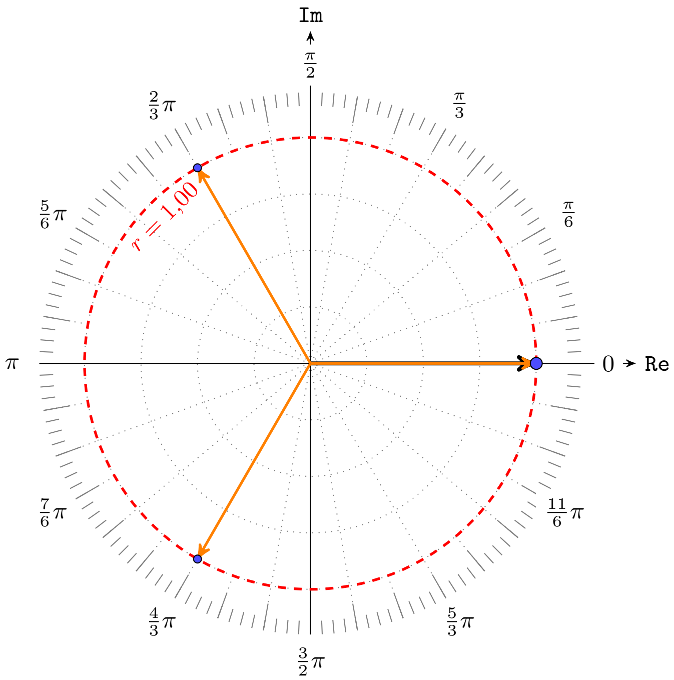


Abbildung 7: Grafische Darstellung der Lösungen von $z^3 = 1$

Zur Lösung bestimmen wir zunächst die Polardarstellung:

Der Radius ist trivial $r = 1$. Da $\mathfrak{Im}(1) = 0$, kann ϕ lediglich die Werte 0 oder π annehmen. Da $\mathfrak{Re}(1) = 1$ ist $\phi = 0$. Also lautet die Polardarstellung von 1:

$$z^3 = 1 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$$

Wir wissen, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi + 2\pi\mathrm{i}}$, sodass wir finden:

$$\begin{aligned} & 1 = 1\mathrm{e}^{\mathrm{i}0+2\pi\mathrm{i}} \\ \rightarrow \quad & z_k = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{0}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)k} \qquad k = 1,2,3 \end{aligned}$$

Dies gibt uns folgende konkreten Lösungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \\ z_2 &= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} \\ z_3 &= 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 \end{aligned}$$

Diese Nullstellen nennt man die *dritten Einheitswurzeln*.

Beispiel 2.44: Gleiches wollen wir nun auch für $z^4 = 1{,}6$ durchsprechen.
Wir finden: $r = 1{,}6$ und damit mit

$$\phi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\mathfrak{Re}(z)}{r}\right) & \text{falls } \mathfrak{Im}(z) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\mathfrak{Re}(z)}{r}\right) & \text{falls } \mathfrak{Im}(z) < 0 \end{cases} \overset{\mathfrak{Im}(1{,}6)=0}{\rightarrow} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{1{,}6}{1{,}6}\right) = 0$$

Also ist

$$z^4 = 1{,}6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$$

Damit finden wir die Lösungen:

$$z_k = \sqrt[4]{1{,}6} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)k} \approx 1{,}125 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{2}} \qquad k = 1,2,3,4$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1{,}125 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} & z_3 &= 1{,}125 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} \\ z_2 &= 1{,}125 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} & z_4 &= 1{,}125 \end{aligned}$$

Die Grafische Darstellung ist in Abbildung 8 zu sehen.

Nun können wir nun auch folgendes Beweisen:

Lemma 2.45:

Jedes quadratische Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren.

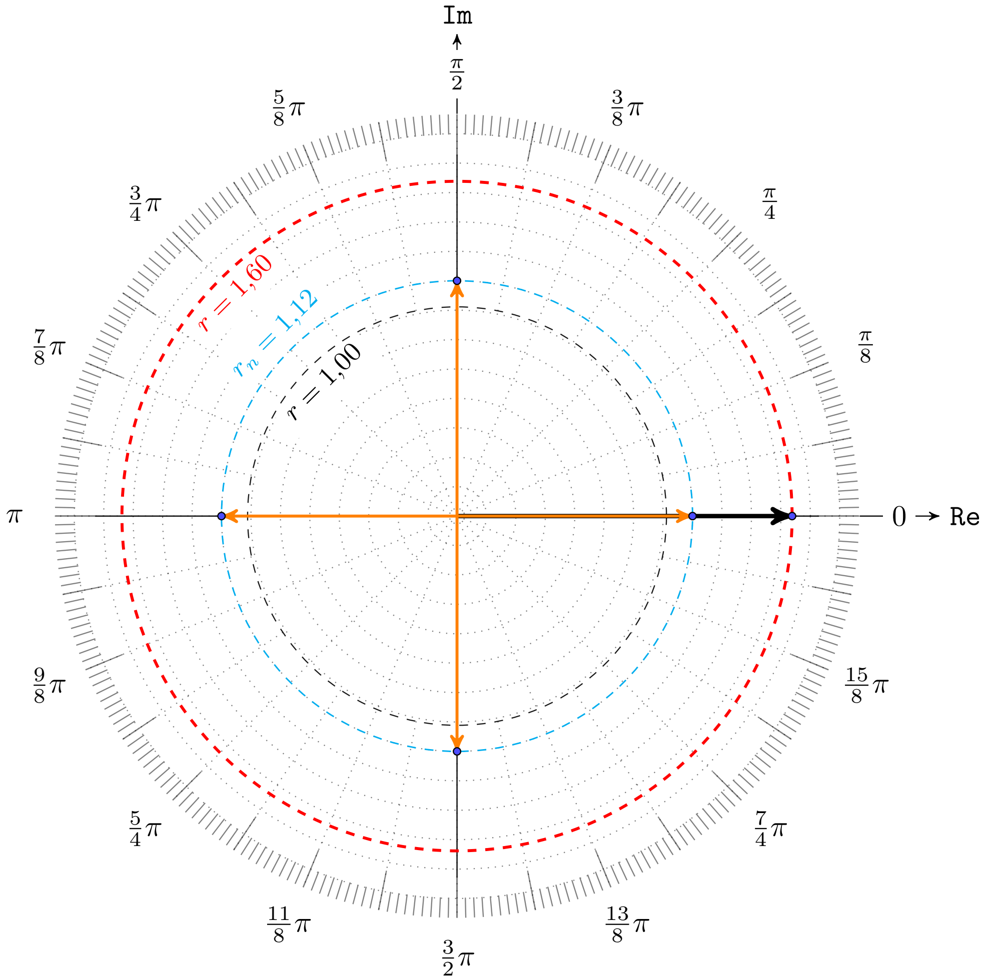


Abbildung 8: Grafische Darstellung der Lösungen von $z^4 = 1{,}6$

Das bedeutet: Für jedes Polynom p der Gestalt $p(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$ gibt es zwei Zahlen $b_0, b_1 \in \mathbb{C}$, sodass

$$p(z) = a_2(z - b_0)(z - b_1).$$

Da wir in $\mathbb{C}$ nun beliebig Wurzeln ziehen können, lässt sich dieser Satz leicht mit Hilfe der p-q-Formel angewendet auf das Polynom $a_2^{-1}p$ einsehen. Allgemeiner gilt folgende Aussage:

Satz 2.46 – Fundamentalsatz der Algebra[1]:

Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Induktiv erhält man mit diesem Satz, dass jedes Polynom in $\mathbb{C}$ tatsächlich komplett in Linearfaktoren zerfällt, indem man mit Polynomdivision sukzessive die Linearfaktoren vom Ausgangspolynom abspaltet und den Satz auf das durch die Polynomdivision erhaltene Polynom anwendet. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ist etwas technischer.

[1] Zur Information: Einen Körper K, welcher die Eigenschaft hat, dass jedes Polynom mit Koeffizienten in K schon eine Nullstelle in K hat, nennt man *algebraisch abgeschlossen*. Man kann den Fundamentalsatz der Algebra daher auch wie folgt formulieren: „$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen“. Dem Studium von Polynomen widmet sich die Körper- und Galoistheorie in der Algebra.

3. Folgen und Reihen

Folgen. Wir haben uns in einen der vorhergehenden Abschnitte schon mit den Ausdrücken $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ und $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ befasst und haben dann gesagt, dass diese für sehr große n beliebig nahe gegen 1 laufen. Bei der Zuordnung $n \mapsto \left(1-\frac{1}{n}\right)$ handelt es sich um eine so genannte *Folge*. Mit der Eigenschaft, dass diese Folge „beliebig nahe gegen 1 geht", spricht man auch davon, dass sie gegen 1 *konvergiert*. Diese Begriffe wollen wir in diesem Abschnitt genauer untersuchen.

Definition 3.1 – Folge:

Eine Folge ist eine unendlich lange Sequenz

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, ...)$$

von komplexen Zahlen[2].

Man kann eine Folge auch als eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definieren, wobei man dann a_n statt $a(n)$ schreibt. Wie bei allen Abbildungen nennen wir zwei Folgen (a_n) und (b_n) dann und nur dann gleich wenn $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. So sind zum Beispiel die Folgen $1, 2, 3, 4\ldots$ und $2, 1, 3, 4\ldots$ verschieden.

Folgen kann man durch eine feste Funktionsvorschrift, wie beispielsweise durch $a_n = \frac{1}{n}$ (für $n > 0$) definieren, aber auch rekursiv. So ist die Folge $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ rekursiv definiert. Die letzte Folge ist die sogenannte *Fibonacci-Folge*.

Um Grenzwertprozesse besser beschreiben zu können, sind die sogenannten ε-Kriterien sehr hilfreich:

Definition 3.2 – Konvergenz, Grenzwert und Nullfolge:

Eine Folge (a_n) heißt gegen a konvergent, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon = N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > N$. Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und nennen a den Grenzwert der Folge. Eine Folge die gegen 0 konvergiert heißt Nullfolge.

Beispiel 3.3: Ein triviales Beispiel für eine Nullfolge ist die konstante Folge $0, 0, 0\ldots$. Ein weiteres Beispiel für eine Nullfolge ist die Folge $\frac{1}{n}$. Dies ist auch sehr leicht einzusehen, da es nach dem Archimedischen Prinzip für alle $\varepsilon > 0$ ein $N > \frac{1}{\varepsilon}$ gibt. Damit ist aber $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n > N$. Ein Beispiel für eine konvergente Folge die keine Nullfolge ist, ist die eingangs erwähnte Folge $1 - \frac{1}{n}$.

Beispiel 3.4: Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$ auf Konvergenz. Dazu wählen wir nach dem Archimedischen Prinzip für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

[2]Manchmal ist es von der Anwendung her sinnvoll, von einem von Null verschiedenen Startindex auszugehen. Durch eine einfache Indexverschiebung lässt sich dies leicht realisieren, sodass wir uns von Zeit zu Zeit diese Freiheit gönnen werden.

für alle $n \geq n_0$. Damit muss $a = 1$ der Grenzwert sein, also gilt: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$.
Beachten Sie, dass nicht jede Folge konvergent ist, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 3.5:

Die Folge $a_n = n$ ist nicht konvergent.

Beweis: Angenommen doch. Sei dann $b = \lim_{n\to\infty} n$ der Grenzwert. Für $\varepsilon = 1$ wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0 : |b - n| < 1$. Wähle nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq b + 1$. Dann ist $|b - n| = n - b \geq 1$, obwohl wegen $n \geq n_0 : |b - n| < 1$. Dies ist ein Widerspruch. ⊠

Beispiel 3.6: Auch die Folge $a_n = (-1)^n$ ist nicht konvergent; pendelt zwischen zwei Werten, ohne sich endgültig für einen zu entscheiden. (Überlegen Sie sich anhand der Definition, warum diese Folge nicht konvergent ist.)
Eine anderes, manchmal auch sehr nützliches Kriterium für Konvergenz, liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.7:

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn die Menge $M = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; |a_n - a| \geq \varepsilon\right\}$ für alle $\varepsilon > 0$ endlich ist.

Beweis: Wenn (a_n) konvergiert, so ist die aufgeführte Menge M offenbar endlich. Sei auf der anderen Seite $N = \max(M)$. Dann gilt nach Definition von M für alle $n > N$ und für alle $\varepsilon > 0$, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ und damit konvergiert (a_n) gegen a. ⊠

Beispiel 3.8: Wir betrachten die Folge $a_n = \sqrt[n]{x}$ für $x > 1$. Wir haben dann offenbar $(a_n)^n = x$. Wir nehmen nun an, dass $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass es unendlich viele Folgenglieder in einer Teilfolge a_{n_k} gibt mit: $|a_{n_k} - 1| > \varepsilon$. Dann ist a_{n_k} entweder echt größer $1 + \varepsilon$ oder echt kleiner $1 - \varepsilon$. Letzteres kann nach Konstruktion wegen $x > 1$ nicht sein.
Dann gilt aber für die betrachtete Teilfolge auch: $x = (a_{n_k})^{n_k} > (1+\varepsilon)^{n_k}$. Nun wächst allerdings der letzte Ausdruck für wachsendes n_k ins Unendliche. Ein Widerspruch. Damit folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Korollar 3.9:

Konstante Folgen $a_n = x$ haben den Grenzwert x.

Beweis: Die Menge $\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; |a_n - x| \geq \varepsilon\right\}$ ist leer und damit endlich. ⊠

Satz 3.10:

Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

Beweis: Sei zum Widerspruch angenommen, dass $a \neq b$ zwei Grenzwerte zu der Folge (a_n) sind und sei $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Für $c = a, b$ seien ferner N_c, sodass $|a_n - c| < \varepsilon$ für alle $n > N_c$ und sei $N = \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt für alle $n > N$

$$|a - b| = \big|(a - a_n) + (a_n - b)\big| \leq |a - a_n| + |b - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Dies ist ein Widerspruch. ⊠

Mit dem letzten Satz wissen wir nun, dass der Limesoperator wohldefiniert ist.

Satz 3.11:

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit den Limiten a und b. Dann gilt

(a) Die Folge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und hat Grenzwert $a + b$.
(b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und hat Grenzwert $a \cdot b$.

Beweis:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{gilt.}$$

Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \big|(a+b) - (a_n + b_n)\big| &= \big|(a - a_n) + (b - b_n)\big| \\ &\leq |a - a_n| + |b - b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$:

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}, |a - a_n| < 1 \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}$$

Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a \cdot b - a_n \cdot b_n| &= |a \cdot b - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a_n \cdot b_n| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |b - b_n| \cdot |a_n| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |b - b_n| \cdot (|a| + 1) \\ &< \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} \cdot (|a| + |b| + 1) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

⊠

Mit Hilfe des letzten Satzes sehen wir sofort:

Korollar 3.12:

Die Menge der konvergenten reellen (bzw. komplexen) Folgen ist ein reeller (bzw. komplexer) Vektorraum und der Limesoperator ist eine lineare Funktion.

In diesem Vektorraum können wir mit Quotienten rechnen:

Lemma 3.13:

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit den Limiten a und $b \neq 0$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.

Beweis: Wir werden die Aussage für den Fall $(a_n) = 1$ zeigen. Für den allgemeinen Fall kann man dann Satz 3.11(b) auf die Folge $\frac{1}{b_n}$ anwenden.
Da $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N_0$ gilt:

$$\frac{1}{2}|b| < |b| - |b - b_n| \leq |b_n|$$

Dann gilt aber auch

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Nun können wir aber noch für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $|b_n - b| < |b|^2 \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Damit haben wir dann

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon.$$

⊠

Beispiel 3.14: Als Anwendung der letzten Sätze wollen wir nun die Konvergenz einer uns schon bekannten Folge nochmals beweisen. In jeder Gleichheit in dieser Rechnung geht einer der obigen Sätze ein:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right) &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (1-0) \cdot (1-0) \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Die obigen Sätze können also ein nützliches Hilfsmittel sein, um den Grenzwert einer konvergenten Folge zu bestimmen.

Achtung!

Die genannten Rechenregeln gelten nur für **konvergente** Folgen.

Beispiel 3.15: Die Rechenregeln für den Limesoperator kann man nicht auf die Folge $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ anwenden, da die Folge im Exponenten nicht konvergent ist. Tut man dies trotzdem, erhält man fälschlicherweise den Grenzwert $a = 1$; diese Folge konvergiert aber tatsächlich gegen die Eulersche Zahl e.

Cauchy-Folgen. Es gibt Folgen rationaler Zahlen deren Grenzwert existiert, aber selber keine rationale Zahl ist. So hat zum Beispiel die Folge

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \quad \ldots$$

der Partialbruchentwickelung von $\sqrt{2}$ lauter rationale Folgenglieder aber $\sqrt{2}$ selbst ist offenbar nicht rational. Das heißt, dass nicht jede Folge rationaler Zahlen, bei der wir beobachten, dass die Folgenglieder irgendwann „sehr nah beieinander liegen“ auch einen rationalen Grenzwert haben muss. Dieses „sehr nah beieinander liegen“ wollen wir nun präzisieren.

Definition 3.16 – Cauchy-Folge:

Eine Folge (a_n) heißt Cauchy-Folge, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m > N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt.

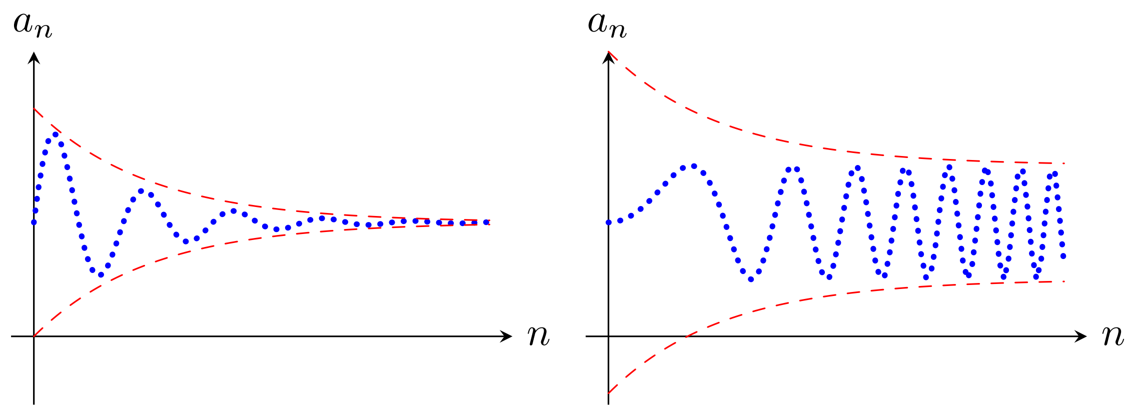


Abbildung 9: Das Cauchy-Kriterium bei konvergenten und divergenten Folgen

Satz 3.17:

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei a der Grenzwert von (a_n). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $m, n \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a - a_n| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

⊠

Man sieht hier also, dass der Begriff der Cauchy-Folge allgemeiner ist als der der konvergenten Folge. In den rationalen Zahlen gibt es –wie wir gesehen haben– Cauchy-Folgen, welche nicht (in den rationalen Zahlen!) konvergieren. Damit sind die rationalen Zahlen gegenüber Cauchy-Folgen nicht abgeschlossen (oder wie man auch sagt: *vollständig*), anders als die reellen Zahlen von denen wir diese Eigenschaft fordern:

Satz 3.18 – Vollständigkeitsaxiom:

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert gegen einen reellen Grenzwert.

⋆ ⋆ ⋆

Wir untersuchen nun weitere Zusammenhänge und Eigenschaften von Folgen.

Definition 3.19 – Eigenschaften von Folgen:

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

(a) (a_n) ist **strikt monoton wachsend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m < a_n$
(b) (a_n) ist **monoton wachsend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m \leq a_n$
(c) (a_n) ist nach **oben beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle n gilt: $a_n < b$
(d) (a_n) ist **strikt monoton fallend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m > a_n$
(e) (a_n) ist **monoton fallend**, wenn $m < n \Rightarrow a_m \geq a_n$
(f) (a_n) ist nach **unten beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle n gilt: $a_n > b$
(g) Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt **beschränkt**.

Beispiel 3.20: Die Folge $a_n = n$ ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt. Die Folge $b_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend und beschränkt. Die Folge $c_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht monoton.

Definition 3.21 – Häufungspunkt:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Ein Punkt $x \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** von (a_n), falls in jeder ε-Umgebung unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen, das bedeutet, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; |a_n - x| < \varepsilon\right\}$ stets unendlich viele Elemente enthält.

Man beachte hier, dass der Begriff des Häufungspunktes allgemeiner ist als der des Grenzwerts. Eine konvergente Folge hat natürlich ihren Grenzwert als Häufungspunkt, aber die Folge $(-1)^n$ ist nicht konvergent, hat aber die beiden Häufungspunkte -1 und 1.

Beispiel 3.22: Die reelle Folge $a_n = \begin{cases} n & n \text{ ist gerade} \\ 42 & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$ ist nach unten beschränkt, nicht monoton und hat einen Häufungspunkt bei $x = 42$.

Definition 3.23 – Limes superior, Limes inferior:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Der **Limes superior** von a_n ist der größte Häufungspunkt h_{sup} der Folge. Analog ist der **Limes inferior** der kleinste Häufungspunkt h_{inf} der Folge. Wir schreiben

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = h_{\text{sup}} \text{ und } \liminf_{n\to\infty} a_n = h_{\text{inf}}.$$

Beispiel 3.24: Für die Folge aus Beispiel 3.22 gilt: $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = 42$. Für die reelle Folge

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} & n \text{ ist gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

gilt $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$ (Warum?).

Lemma 3.25:

Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei a der Grenzwert der konvergenten Folge (a_n). Nach Lemma 3.7 ist für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $M = \left\{a_n \;\middle|\; |a_n - a| \geq \varepsilon\right\}$ endlich. Damit ist (a_n) nach unten beschränkt durch $\min(M \cup \{a_n - \varepsilon\})$ und nach oben beschränkt durch $\max(M \cup \{a_n + \varepsilon\})$.

⊠

Satz 3.26 – Bolzano-Weierstraß:

Eine beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.

Beweis: Sei a eine untere und b eine obere Schranke der beschränkten Folge $(a_n)_n$. Sei $c_0 = a + \frac{b-a}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $[a, b]$. Dann befinden sich in mindestens in einem der Intervalle $[a, c_0]$ oder $[c_0, b]$ unendlich viele Folgenglieder. Ohne Einschränkung wollen wir annehmen, dass sich im Intervall $[c_0, b]$ unendlich viele Folgenglieder befinden.

Sei nun weiterhin c_1 der Mittelpunkt des Intervalls $[c_0, b]$. Wieder muss mindestens eins der Intervalle $[c_0, c_1]$ und $[c_1, b]$ unendlich viele Folgenglieder enthalten. Wieder wählen wir uns ein solches aus und wählen uns von diesen den Mittelpunkt c_3. Nach diesem Prinzip verfahren wir immer weiter und erhalten eine Folge (c_n).

Diese ist eine Cauchy-Folge, da $|c_n - c_m| \leq 2^{-\min\{m,n\}} \cdot |b-a|$. Damit ist (c_n) also insbesondere konvergent. In jeder ε-Umgebung um den Grenzwert $c^\star$ liegen nach Konstruktion von c_n unendlich viele Folgenglieder. Also ist $c^\star$ ein Häufungspunkt von a_n. ⊠

Satz 3.27:

Eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Sei (a_m) durch die Zahl b nach oben beschränkt, das bedeutet für beliebige m stets $a_m < b$ gilt. Wir müssen zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Angenommen, dies wäre falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ Zahlen $m, n \geq n_0$ existieren mit $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Nach dem archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl k, sodass $k \cdot \varepsilon > b - a_0$.

Wähle nun $m_1 < n_1$, sodass $a_{n_1} - a_{m_1} \geq \varepsilon$. Wähle dann $m_2 < n_2$, sodass $n_1 < m_2$ und $a_{n_2} - a_{m_2} \geq \varepsilon$. Fahre fort bis zu $m_k < n_k$ mit $n_{k-1} < m_k$ und $a_{n_k} - a_{m_k} \geq \varepsilon$.
Aber dann ist

$$b - a_0 > (a_{n_k} - a_{m_k}) + (a_{n_{k-1}} - a_{m_{k-1}}) + \ldots + (a_{n_1} - a_{m_1}) \geq k \cdot \varepsilon > b - a_0$$

Dieser Widerspruch beendet den Beweis. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Reihen. Jetzt betrachten wir besondere Arten von Folgen – die so genannte Folge der Teilsummen oder auch *Partialsummenfolge* genannt. Dies wird uns zu den Reihen führen.

Für eine gegebene Zahlenfolge (a_i) können wir Teilsummen betrachten und auch die Folge dieser Teilsummenwerte:

$$\begin{array}{lcl} s_0 & := & a_0 \\ s_1 & := & a_0 + a_1 \\ s_2 & := & a_0 + a_1 + a_2 \\ s_3 & := & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 & := & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Das Verhalten der Folge der Teilsummen (s_n) – der so genannten Partialsummen – wollen wir im Weiteren untersuchen.

Definition 3.28 – Konvergenz, Divergenz:

Sei $(a_n)_{m\leq n}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann definiere die Reihe:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Der Wert $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ dieser Reihe ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Wenn dieser Grenzwert existiert, so konvergiert die Reihe. Andernfalls divergiert die Reihe.

Bemerkung 3.29: Beachten Sie, dass wir mit dem Ausdruck $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ sowohl die Partialsummenfolge (als Zahlenfolge) als auch ihren Reihenwert (als Grenzwert der Partialsummenfolge) bezeichnen.

Beispiel 3.30: Beachten Sie, dass sich bei einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar der Grenzwert S, wenn dieser existiert, symbolisch als unendliche Summe

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

darstellen lässt, Sie aber nie vergessen dürfen, dass S als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ der Partialsummen definiert ist. So könnten Sie formal mit der Folge $a_n = (-1)^n$ die dazugehörige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ unter die Lupe nehmen und würden bei der Betrachtung der Partialsummen festellen, dass diese Folge keinen Grenzwert hat – es gilt nämlich:

$$\begin{array}{lcl} s_0 & := & 1 \\ s_1 & := & 1 + (-1) = 0 \\ s_2 & := & 1 + (-1) + 1 = 1 \\ s_3 & := & 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0 \\ s_4 & := & 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Offenbar hat die Partialsummenfolge zwei Häufungspunkte, aber keinen Grenzwert.

Beispiel 3.31: Ein Beispiel für konvergente Reihen sind periodische Dezimalzahlen. Betrachten Sie die folgende Zahl, die wir als Reihe schreiben können:

$$0,3\overline{42} = \frac{3}{10} + \frac{42}{10^3} + \frac{42}{10^5} + \frac{42}{10^7} + \cdots = \frac{3}{10} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{42}{10^{2k+3}}$$

Achtung!

Sie dürfen nicht auf die Idee kommen, das (im Körper der reellen Zahlen) für endliche Summen gegebene Assoziativgesetz auf diese unendlichen Summen übertragen zu wollen – ein solches Gesetz haben Sie im Allgemeinen nicht: Im Fall von $a_n = (-1)^n$ würde sich durch geschicktes paarweises Zusammenfassen von Summanden dann scheinbar alles zu null aufheben; ein klarer Widerspruch.

Die Konvergenz einer Reihe $\sum_i a_i$ stellt klare Anforderungen an die zugrundeliegende Folge (a_n). Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe liefert der folgende Satz:

Satz 3.32 – Notwendiges Kriterium:

Wenn $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert, so ist (a_i) Nullfolge.

Die Umkehrung dieser Aussage ist übrigens falsch, wie wir spätestens mit der harmonischen Reihe im Satz 3.43 sehen werden.

Beweis von Satz 3.32: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{i=0}^{n} a_i$ konvergiert, ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$

$$\left| \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \right) \right| < \varepsilon.$$

Dann ist für alle $n \geq n_0 + 1$

$$|a_n| = \left| \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \right| < \varepsilon.$$

Damit ist a_n eine Nullfolge. ⊠(Satz 3.32)

Ein erstes Beispiel für eine konvergente Reihe liefert uns das folgende Lemma.

Lemma 3.33:

(a) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$. Dann divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Beweis:

(a) Für $|q| < 1$ haben wir mit der geometrischen Summenformel

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} q^n \right) = \lim_{m\to\infty} \frac{q^{m+1}-1}{q-1} = \frac{\left(\lim_{m\to\infty} q^{m+1} \right) - 1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1}.$$

(b) Für $|q| \geq 1$ ist $|q^n| = |q|^n \geq 1$. Daher ist (q^n) keine Nullfolge, die Reihe divergiert somit nach Satz 3.32. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Wir werden nun einige Rechengesetze für Reihen notieren.

Satz 3.34:

Sei $m \leq n$. Die Reihe $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$ konvergiert. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{\infty} a_i &= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=m}^{k} a_i = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{k} a_i\right)\\ &= \sum_{i=m}^{n} a_i + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=n+1}^{k} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i\end{aligned}$$

⊠

Satz 3.35:

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis: Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(a_n+b_n) = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{m} a_n + \sum_{n=0}^{m} b_n\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n + \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.\end{aligned}$$

Ferner haben wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\lambda a_n = \lim_{m\to\infty}\left(\lambda\sum_{n=0}^{m} a_n\right) = \lambda\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

⊠

Bemerkung 3.36: Wie schon bei Folgen sagt uns der letzte Satz, dass der Raum

$$\left\{ (a_n) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \right\}$$

einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bildet und dass die Abbildung $(a_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ linear ist.

⋆ ⋆ ⋆

Konvergenzkriterien. Um einer Reihe anzusehen, ob diese konvergiert, gibt es ein paar Tricks, deren Betrachtung sich lohnt.

Lemma 3.37 – Quotientenkriterium:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Gibt es ein reelles θ mit $0 \leq \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq n_0$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \theta$$

gilt, dann konvergiert[3] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge bildet. Sei $\varepsilon > 0$. Da (θ^l) eine Nullfolge ist, existiert ein $n_1 \geq n_0$, sodass für alle $l \geq n_1$

$$\left|a_{n_0}\right| \frac{\theta^{l+1-n_0}}{1-\theta} < \varepsilon.$$

Man zeigt leicht mit vollständiger Induktion, dass für $n \geq n_0$: $|a_n| \leq \theta^{n-n_0}\left|a_{n_0}\right|$. Dann ist für $k \geq l \geq n_1$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{k} a_n - \sum_{n=0}^{l} a_n\right| &= \left|\sum_{n=l+1}^{k} a_n\right| \\
&\leq \sum_{n=l+1}^{k} |a_n| = |a_{l+1}| + |a_{l+2}| + \ldots + |a_k| \\
&\leq \theta^{l+1-n_0}\left|a_{n_0}\right| + \theta^{l+2-n_0}\left|a_{n_0}\right| + \ldots + \theta^{k-n_0}\left|a_{n_0}\right| \\
&= \left|a_{n_0}\right|\theta^{l+1-n_0}(1+\theta+\theta^2+\ldots+\theta^{k-l-1}) \\
&= \left|a_{n_0}\right|\theta^{l+1-n_0}\frac{1-\theta^{k-l}}{1-\theta} < \left|a_{n_0}\right|\theta^{l+1-n_0}\frac{1}{1-\theta} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

⊠

Beispiel 3.38: Die Wahl von $\theta < 1$ ist hierbei wesentlich: So divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ (siehe Satz 3.43), aber wir haben $\frac{n}{n+1} \leq 1$ für alle $n > 0$. Wir finden aber offenbar kein globales $\theta < 1$, welches $\frac{n}{n+1} \leq \theta < 1$ erfüllt, da die Folge $\frac{n}{n+1} \leq 1$ gegen 1 konvergiert.

Beispiel 3.39: Wir wollen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

mit Hilfe des Quotientenkriteriums überprüfen. Hier haben wir natürlich

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{(für alle } n \in \mathbb{N}\text{)}$$

und damit ist diese Reihe konvergent.

Beispiel 3.40: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

und überprüfen ihre Konvergenz mithilfe des Quotientenkriteriums:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)! n^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

Beim letzten Ausdruck sehen wir schnell, dass es sich in diesen Fall bei $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ um eine Nullfolge handelt, das heißt, dass wir auch (beispielsweise) für $\theta = \frac{1}{2}$ einen Index n_0 findet, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \theta$$

Damit ist diese Reihe konvergent.

[3]Wie wir später sehen werden, liegt hier sogar absolute Konvergenz vor.

Beispiel 3.41: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Für die Partialsummenfolgen gilt dabei:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Als beschränkte und monotone Folge ist die Folge der Partialsummen (und damit die Reihe selbst) konvergent. Dies ist ein Beispiel für die Anwendung des Satzes 3.27, weniger für das Quotientenkriterium.

⋆ ⋆ ⋆

Bevor wir mit den Kriterien weiter machen, betrachten wir parallel eine Verschärfung der Konvergenz.

Definition 3.42 – Absolute Konvergenz:

Eine Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ **konvergiert absolut**, wenn $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 3.43:

(a) Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ divergiert.

(b) Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert.

(c) Die alternierende harmonische Reihe ist nicht absolut konvergent.

Beweis:

(a) Die Partialsummen der harmonische Reihe werden beliebig groß, denn

$$[1] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \ldots \quad > \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

(c) folgt sofort aus (a).

(b) Wir zeigen, dass die Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihe eine Cauchy-Folge bilden. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem archimedischen Axiom existiert ein n_0, sodass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Seien $n \geq m \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \right| \quad &= \quad \left| \sum_{i=m+1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \right| \quad = \quad \left| \sum_{i=m+1}^{n} \frac{(-1)^{i-m-1}}{i} \right| \\ &= \frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) - \left(\frac{1}{m+4} - \frac{1}{m+5} \right) - \ldots \\ &< \frac{1}{m+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen aufgrund des Betrages, denn dann kann schlimmstenfalls ein ändern eines Vorzeichens sofort verziehen werden. Die erste Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Klammern stets positiv sind und so durch Weglassen der Rest höchstens größer wird. ⊠

Satz 3.44:

Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis: Sei $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ eine Cauchy-Folge bilden. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Partialsummen von $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ eine Cauchy-Folge bilden, existiert ein n_0, sodass für $l \geq k \geq n_0$

$$\sum_{n=k+1}^{l} |a_n| < \varepsilon.$$

Dann ist aber auch nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=k+1}^{l} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{l} |a_n| < \varepsilon.$$

⊠

Absolute Konvergenz ist offenbar eine stärkere Bedingung als Konvergenz. Nicht jede konvergente Reihe konvergiert absolut, wie wir bereits gesehen haben. Für absolut konvergente Reihen bekommen wir folgenden Umordnungssatz:

Satz 3.45 – Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen:

Für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und eine Permutation $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ ebenfalls absolut konvergent. Beide Grenzwerte der Reihen stimmen überein:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Bei konvergenten aber nicht absolut konvergenten Reihen dürfen wir nicht einfach so umordnen. In der Tat kann durch geeignete Umordnung jede beliebige Zahl angenommen werden, wie uns folgender Satz sagt:

Satz 3.46 – Umordnungssatz für konvergente Reihen:

Für eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reeller Zahlen existiert zu jedem beliebigen $S \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Permutation $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\pi(n)}$ gegen S konvergiert beziehungsweise (bestimmt) divergiert[4].

Beispiel 3.47: Die alternierende harmonische Reihe lässt sich durch geschickte Wahl der Permutation so umordnen, dass sie bestimmt gegen ∞ divergiert (Übung).

⋆ ⋆ ⋆

[4] Man nennt bekanntlich jede nicht konvergente Reihe divergent. Reihen, deren Divergenz dadurch gegeben ist, dass die dazugehörige Partialsummenfolge gegen $\pm\infty$ strebt, nennt man in der Literatur auch *bestimmt divergent*.

Zurück zu weiteren Konvergenzkriterien.

Satz 3.48 – Majorantenkriterium:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ von reellen Zahlen $a_n \geq 0$ heißt Majorante einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|b_n| \leq a_n$. Wenn die Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergiert, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ebenfalls absolut.

Beweis: Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=0}^{k} |b_n|$ ist eine monoton wachsende Folge. Da $\sum_{n=0}^{k} |b_n| \leq \sum_{n=0}^{k} a_n$, ist die Folge weiterhin durch den Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach oben beschränkt. Nach Satz 3.27 ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und daher konvergent. ⊠

Beispiel 3.49: Wir wissen schon, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ gilt. Dank des Majorantenkriteriums wissen wir nun auch, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} < \infty$$

für alle $\alpha \geq 2$. (Tatsächlich gilt dies schon für alle $\alpha > 1$, aber dieses Resultat ist schwieriger zu zeigen.)

Beispiel 3.50: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$.

Satz 3.51 – Wurzelkriterium:

Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen. Gibt es ein $0 < q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

dann ist die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ absolut konvergent.

Beweis: Aus $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ folgt, dass $a_n \leq q^n$. Damit ist die Reihe $\sum_n q^n$ eine Majorante zu $\sum_n a_n$. ⊠

Bemerkung 3.52: Die Voraussetzung, dass $q < 1$ und dass wir ein q finden, welches $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ für alle hinreichend großen n erfüllt, ist dabei offensichtlich wesentlich.

Beispiel 3.53: Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$. Es gilt nun

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2^{\frac{n}{n}}}{n^{\frac{n}{n}}} = \frac{2}{n}.$$

Der letzte Ausdruck ist eine Nullfolge. Daher sehen wir mithilfe des Wurzelkriteriums, dass diese Reihe konvergiert. (Warum?)

Satz 3.54 – Produktsatz:

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Definiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0.$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Beweis: Setze $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ sowie $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ und $\beta_n = B_n - B$. Dann ist

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0 \\ &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_nB + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0. \end{aligned}$$

Setze weiter $\gamma = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$. Da $A_nB \to AB$, genügt es zu zeigen, dass (γ_n) eine Nullfolge ist. Sei $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Nach Voraussetzung ist β_n eine Nullfolge, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\beta_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann haben wir für alle $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0a_n + \ldots + \beta_Na_{n-N}| + |\beta_{N+1}a_{n-N-1} + \ldots + \beta_na_0| \\ &\leq |\beta_0a_n + \ldots + \beta_Na_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Für festes N erhält man also $\lim_{n\to\infty}|\gamma_n| < \varepsilon\alpha$. Da ε beliebig war, folgt ebenfalls, dass γ_n eine Nullfolge ist und damit der Satz. ⊠

Der Vollständigkeit halber sei ein nützliches Kriterium für alternierende Reihen erwähnt:

Satz 3.55 – Leibniz-Kriterium:

Sei (a_n) eine monotone fallende Nullfolge. Dann ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konvergent.

Beweis: (Anleitung) Man kann nachrechnen, dass die Partialsumme $(s_{2k})_k$ monoton fallend und $(s_{2k+1})_k$ monoton wachsend ist. Außerdem ist $(s_{2k})_k$ wegen $s_{2k} \geq s_1$ beschränkt und somit konvergent. Analog ist $(s_{2k+1})_k$ beschränkt und somit konvergent.

Man kann zeigen, dass beide Grenzwerte gleich sind und die gesamte Partialsummenfolge $(s_n)_n$ ebenfalls gegen diesen Grenzwert konvergiert. ⊠

Beispiel 3.56: Mit dem Leibnizkriterium folgt offenbar sofort die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe.

Beispiel 3.57: Die Voraussetzung des Satzes 3.55 ist tatsächlich wichtig. Wenn die Folge a_n keine monoton fallende Nullfolge ist, sondern mit dem Vorzeichen geeignet springt, dann könnten sich die Vorzeichen neutralisieren, wie das folgende Beispiel zeigt: Nehmen Sie die Folge aus der alternierenden harmonischen Reihe

$$a_n := (-1)^n \cdot \tfrac{1}{n}$$

und betrachten Sie die Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\cdot} n a_n$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \tfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \cdot \tfrac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Somit ist diese Reihe die harmonische Reihe und immer noch nicht konvergent.

Beispiel 3.58: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \cdot \frac{2n}{n!}.$$

Natürlich ist $\frac{2n}{n!}$ eine monoton fallende Nullfolge und ferner ist $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Daher ist diese Reihe nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

⋆ ⋆ ⋆

Die Exponentialreihe. In der Mathematik spielt die Exponentialfunktion eine zentrale Rolle; diese werden wir nun schrittweise definieren.

Satz 3.59:

Die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ist für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergent.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{C}$. Wir weisen das Quotientenkriterium mit $\theta = \frac{1}{2}$ nach. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{x}{n_0+1}\right| < \frac{1}{2}$. Dann ist für $n \geq n_0$

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \cdot \left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

⊠

Definition 3.60 – Exponentialfunktion, Eulersche Zahl:

Die durch $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ definierte Funktion heißt Exponentialfunktion. Der Wert $\mathrm{e} := \exp(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ heißt Eulersche Zahl.

Satz 3.61:

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Beweis: Nach dem Produktsatz für Reihen ist $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} c_n$, wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$. Damit ist dann wie gewünscht: $\sum_{n\geq 0} c_n = \sum_{n\geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!}$. ⊠

Satz 3.62:

Für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n.$$

Deshalb schreiben wir auch kurz e^n statt $\exp(n)$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang

$$\exp(0) = 1 = \mathrm{e}^0.$$

Induktionsschluss

Sei $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. Dann ist

$$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = \mathrm{e}^n \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}^{n+1}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für negative $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt $\exp(n) \cdot \exp(-n) = \exp(n-n) = \exp(0) = 1$ und

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^{n}.$$

$\boxtimes$

⋆ ⋆ ⋆

Eine wesentliche Klasse von Funktionen bilden die Potenzreihen. Diese stellen eine Verallgemeinerung der Polynome dar.

Definition 3.63 – Potenzreihe:

Eine Reihe der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe.

Viele wichtige Funktionen lassen sich als Potenzreihen darstellen. Neben der Exponentialfunktion beispielsweise auch die trigonometrischen Funktionen (Kosinus, Sinus, Tangens...), wie wir später noch sehen werden.

4. Stetigkeit von Funktionen

In diesem Abschnitt geht es um eine von zwei der in der Analysis grundlegendsten Eigenschaften von Funktionen.

Stetige Funktionen. Viele der in der analytischen Modellierung betrachteten Funktionen sind *stetig*.

Definition 4.1 – Stetigkeit:

Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $M \subseteq \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $x \in M$, wenn für jede Folge (x_n) von Elementen von M, die gegen x konvergiert, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

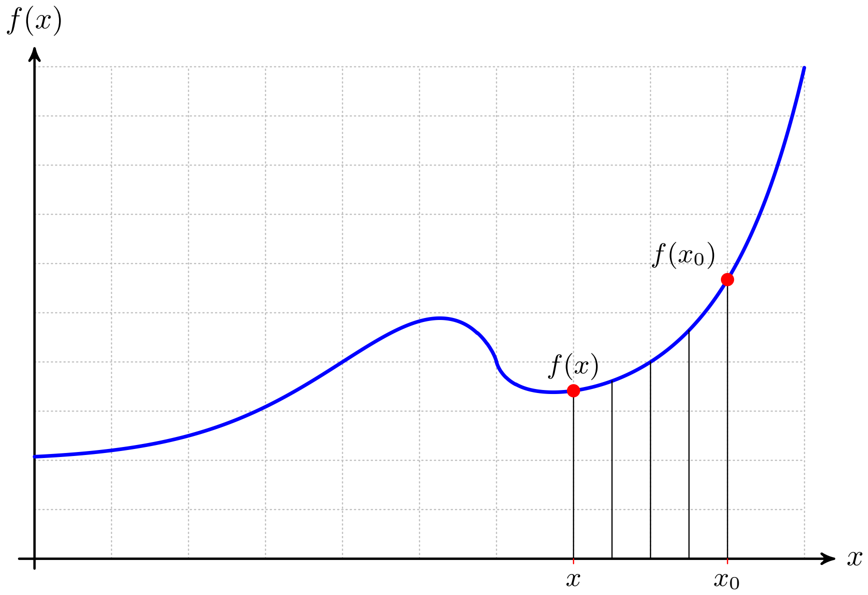


Abbildung 10: Eine stetige Funktion

Beispiel 4.2: Die Betragsfunktion ist stetig an der Stelle $x = 0$. Sei (x_n) eine beliebige Nullfolge. Also gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n > N$ gilt: $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0 = f(0) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Eine äquivalente und manchmal auch als Definition verwendete Version ist die Folgende:

Satz 4.3 – ε-δ-Kriterium:

Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig an der Stelle $x \in M$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\textit{für alle } y \in M \textit{ mit } |y - x| < \delta \textit{ gilt: } \big|f(y) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

Beweis: Wir zeigen beide Richtungen der gewünschten Aussage:

„$\Leftarrow$“ : Angenommen, es gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $\big|f(y) - f(x)\big| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $|y - x| < \delta$ gilt. Wir müssen für jede Folge (x_n) von Elementen in M, die gegen x konvergiert, zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Sei nun für ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) = \delta$ wie in der Voraussetzung gegeben. Da die Folge (x_n) gegen x konvergiert, gilt $|x_n - x| < \delta$ für alle hinreichend großen n. Nach Voraussetzung ist dann $\left|f(x_n) - f(x)\right| < \varepsilon$, ebenfalls für alle hinreichend großen n. Damit konvergiert $f(x_n)$ gegen $f(x)$.

„$\Rightarrow$“ : Es gelte nun im Sinne der anderen Beweisrichtung für alle Folgen (x_n) von Elementen in M mit $x_n \to x$, dass auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gilt. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon$ für alle $y \in M$ mit $|y - x| < \delta$.

Angenommen, dies wäre falsch – das hieße, es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass kein $\delta > 0$ existiert mit $\left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $|y - x| < \delta$. Sei dann für alle $n \in \mathbb{N}$ zu $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ ein $y_n \in M$ so gewählt, dass $|y_n - x| < \delta$, aber $\left|f(x) - f(y_n)\right| \geq \varepsilon$.

Es konvergiert (y_n) nun offenbar gegen x. Damit gilt nach Voraussetzung aber auch $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\left|f(y_n) - f(x)\right| > \varepsilon$ für alle $n > 1$. Damit ist der Satz bewiesen. $\boxtimes$

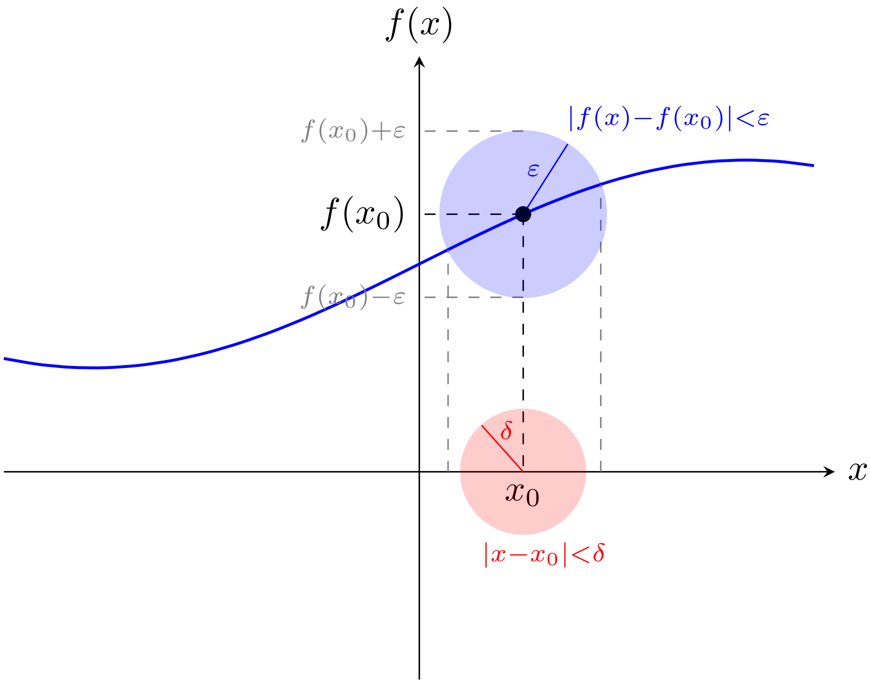


Abbildung 11: Das ε-δ-Kriterium am Beispiel einer Sinusfunktion

Beispiel 4.4: Wir zeigen mittels ε-δ-Kriterium, dass die Funktion $f(x) := \frac{x}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist. Dazu berechnen wir

$$\left|f(x) - f(1)\right| = \frac{|x-1|}{\left|2(1+x)\right|} < \frac{\delta}{\left|2(1+x)\right|} < \frac{\delta}{2} \overset{!}{\leq} \varepsilon.$$

Dabei gilt die erste Ungleichung wegen der Bedingung $|x - 1| < \delta$. Für ein $\varepsilon > 0$ beliebig wählen wir also unser $\delta \leq 2\varepsilon$, damit die letzte obige Abschätzung gilt. Somit ist f stetig bei $x_0 = 1$.

⋆ ⋆ ⋆

Definition 4.5 – Stetige Funktion:

Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt stetig, wenn sie an allen Stellen $x \in M$ stetig ist.

Wir werden zeigen, dass die Klasse der stetigen Funktionen viele wichtige Funktionen enthält.

Satz 4.6:

(a) Die konstante Funktion $\mathrm{const}_c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{const}_c(z) = c$ ist stetig.

(b) Die identische Funktion (Identität) $\mathrm{id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{id}(z) = z$ ist stetig.

(c) Wenn die Funktionen $f, g\colon M \to \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M$ stetig sind, so sind auch die Summe $f + g\colon M \to \mathbb{C}$, $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ und das Produkt $f \cdot g\colon M \to \mathbb{C}$, $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ an der Stelle x stetig.

(d) Wenn die Funktionen $f, g\colon M \to \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M$ stetig sind und $g(x) \neq 0$ so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}\colon M' \to \mathbb{C}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ an der Stelle x stetig. Hierbei sei $M' := \left\{x \in M \mid g(x) \neq 0\right\}$.

(e) Sei die Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M_0 \subseteq M$ stetig. Dann ist auch die Einschränkung $f\big|_{M_0}\colon M_0 \to \mathbb{C}$, $\left(f\big|_{M_0}\right)(z) = f(z)$ an der Stelle x stetig.

(f) Wenn $f\colon M \to \mathbb{C}$ stetig und $M_0 \subseteq M$ ist, so ist $f\big|_{M_0}$ stetig.

Beweis: Wir benutzen zum Nachweis die Definition von Stetigkeit.

(a) Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{const}_c(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c = \mathrm{const}_c(x)\,.$$

Also ist const_c stetig an der Stelle x. Da $x \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist const_c stetig.

(b) Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{id}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x = \mathrm{id}(x)\,.$$

Also ist id stetig an der Stelle x. Da $x \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist id stetig.

(c) Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) &&= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= f(x) + g(x) &&= (f+g)(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f \cdot g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) \cdot g(x_n)\big) &&= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} g(x_n) \\ &= f(x) \cdot g(x) &&= (f \cdot g)(x)\,. \end{aligned}$$

Also sind $f + g$ und $f \cdot g$ an der Stelle x stetig.

(d)Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Da g an der Stelle x stetig ist, ist $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x) \neq 0$. Daher ist für fast alle n: $g(x_n) \neq 0$. Durch Übergang zu einem Endstück der Folge kann man annehmen, dass für alle n: $g(x_n) \neq 0$. Dann gilt wieder

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)\,.$$

Also ist $\frac{f}{g}$ an der Stelle x stetig.

(e) und (f) sind trivial. ⊠

Beispiel 4.7: Ein Gegenbeispiel für eine an jeder Stelle stetigen Funktion ist die folgende Funktion:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist dann $\lim_{n\to\infty} H\left(-\frac{1}{n}\right) = 1$ aber $H(0) = 0$. Damit ist diese Funktion in 0 nicht stetig.

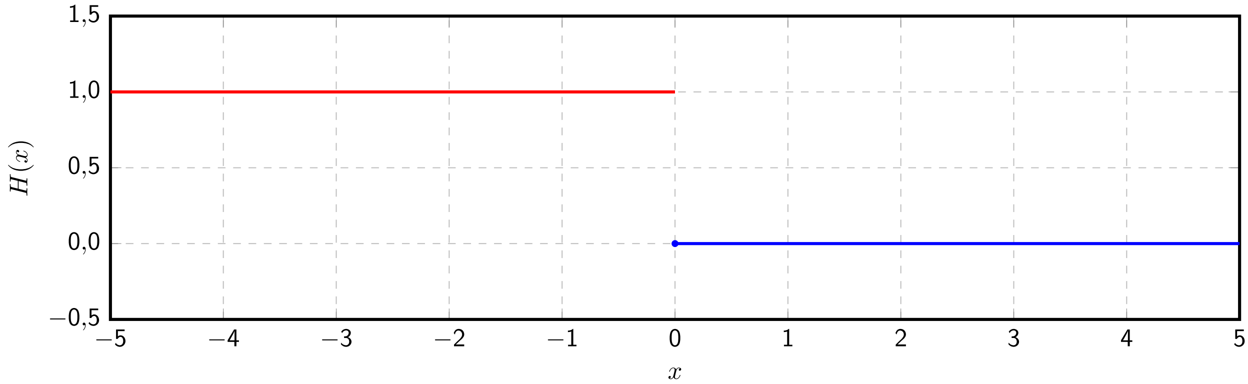


Abbildung 12: Die nicht stetige Funktion $H(x)$

Beispiel 4.8: Ein Beispiel für eine Funktion, die an *keiner* Stelle stetig ist, ist die sogenannte *Dirichlet-Funktion*:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Grund dafür ist, dass die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen.

Folgende Funktionsklassen sind aber stetig:

Korollar 4.9:

(a) Jedes Polynom

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$$

mit Koeffizienten $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0 \in \mathbb{C}$ definiert eine stetige Funktion $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Je zwei Polynome $p(z)$ und $q(z)$ definieren eine rationale Funktion

$$\frac{p}{q}\colon \left\{ z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0 \right\} \to \mathbb{C}.$$

Diese ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

⋆ ⋆ ⋆

Wir verschärfen den Begriff der Stetigkeit wie folgt:

Definition 4.10 – Gleichmäßig stetig:

Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\textit{Wenn } |y - x| < \delta,\ \textit{dann } \left|f(y) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Offensichtlich ist der Unterschied zur Stetigkeit der Quantorenwechsel. Eine Funktion ist *stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \quad \exists \delta > 0 \quad (\ldots)$$

gilt; sie ist sogar *gleichmäßig stetig*, wenn das δ gleichmäßig für alle x gewählt werden kann, also

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad (\ldots)$$

gilt.

Beispiel 4.11: So sind Funktionen mit einem linearen Anstieg, also *Geraden* in der reellen Ebene, gleichmäßig stetig. Aber schon die *Normalparabel* erfüllt diese Bedingung nicht mehr. Die Zuwächse/Anstiege wachsen immer weiter – es kann daher kein globales δ für alle x geben. Die *Wurzelfunktion* (auf den positiven reellen Zahlen) ist dagegen gleichmäßig stetig.

Beispiel 4.12: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Die Stetigkeit ist klar. Betreffs der gleichmäßigen Stetigkeit wähle etwa zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ die Folgen $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := \frac{1}{n+1}$, dann gilt

$$|y_n - x_n| < \frac{1}{n}, \qquad \textit{aber} \quad \left|f(y_n) - f(x_n)\right| = 1 > \varepsilon.$$

Auf kompakten Mengen sind stetige Funktionen allerdings stets gleichmäßig stetig, da der Zuwachs nicht ins Unendliche steigen kann.

Satz 4.13:

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge $[a,b]$ ist gleichmäßig stetig.

⋆ ⋆ ⋆

Ebenfalls stetig verhalten sich Potenzreihen auf geeigneten Kreisscheiben:

Satz 4.14:

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut für alle z mit $|z| < |z_0|$. Weiterhin ist die Funktion $f\colon \left\{z \;\middle|\; |z| < |z_0|\right\} \to \mathbb{C}$ mit der Definition

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig.

Daraus folgt dann sofort:

Korollar 4.15:

Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis von Satz 4.14: Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert, gibt es eine obere Schranke $M \in \mathbb{R}$ für die Glieder $a_n z_0^n$ der Folge:

$$|a_n z_0^n| < M$$

Sei $R = |z_0|$. Betrachte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Wähle r mit $|z| < r < R$. Dann gilt für y mit $|y| < r$ offenbar:

$$|a_n y^n| = \left| a_n z_0^n \frac{y^n}{z_0^n} \right| = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{r^n}{R^n} \right| < M \left(\frac{r}{R} \right)^n$$

Damit ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{R}\right)^n$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Nun konvergiert die geometrische Reihe (absolut) für $\frac{r}{R} < 1$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolut, insbesondere an der Stelle z.

Zum Nachweis der Stetigkeit an der Stelle z sei $\varepsilon > 0$ gewählt. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$M \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{n_0+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt insbesondere folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^n &= M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n - M \cdot \sum_{n=0}^{n_0} \left(\frac{r}{R} \right)^n \\
&= M \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{R}} - \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^{n_0+1} - 1}{\frac{r}{R} - 1} \right) = M \cdot \left(\frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{n_0+1} - 1}{1 - \frac{r}{R}} \right) \\
&= M \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{n_0+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} < \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Da das Polynom $\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n$ stetig in z ist, wähle $\delta > 0$, sodass $|z| + \delta < r$ und sodass für y mit $|y - z| < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für solche y auch:

$$|y| = |y - z + z| \leq |y - z| + |z| < |z| + \delta < r$$

und

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n y^n| < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also gilt für alle y mit $|y - z| < \delta$ die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
\left| f(y) - f(z) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

⊠(Satz 4.14)

Aus dem Satz über die Konvergenz von Potenzreihen ergibt sich auch der folgende

Satz 4.16:

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ divergiert für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann divergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |z_0|$.

Also ist die Menge

$$K = \left\{ |z| \;\middle|\; z \in \mathbb{C};\ \textit{Reihe} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \textit{konvergiert} \right\}$$

ein Anfangsstück der Menge der positiven (reellen) Zahlen. Dabei sind genau die folgenden Fälle möglich:

(a) $K = \{0\}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert nur für $z = 0$. Dann ist der *Konvergenzradius* der Reihe gleich 0.

(b) $K = [0, R) = \{x \mid 0 \leq x < R\}$. Dann ist der *Konvergenzradius* der Reihe gleich R.

(c) $K = [0, R] = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}$. Dann ist der *Konvergenzradius* der Reihe gleich R.

(d) $K = [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Dann ist der *Konvergenzradius* der Reihe gleich ∞.

Dieses maximale R spielt für Potenzreihen eine große Rolle. Es ist gewissermaßen die Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz – man spricht hier vom so genannten *Konvergenzradius*.

Definition 4.17 – Konvergenzradius:

Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nennt man das Supremum aller Radien $r \geq 0$, für welche die Reihe konvergiert, den **Konvergenzradius** R der Potenzreihe. Es gilt also:

$$R = \sup \left\{ |z| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ \textit{ist konvergent} \right\}$$

Lemma 4.18 – Formel von Cauchy-Hadamard:

Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ lässt sich der Konvergenzradius R wie folgt berechnen – es gilt:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Hierbei bezeichnen wir mit lim sup den *limes superior*, den größten Häufungspunkt einer Folge. (Dieser kann natürlich auch ∞ sein.)

Beispiel 4.19: Wir untersuchen nun den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Als a_n identifizieren wir damit $a_n = 1$ (für alle n).
Damit berechnet sich der Konvergenzradius wie folgt:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Abbildung 13: Der Konvergenzradius

Beispiel 4.20: Nun untersuchen wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Unser a_n ist demnach gegeben durch:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Damit ist der Konvergenzradius R gegeben durch:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \end{aligned}$$

Diese Reihe entspricht der Reihendarstellung für $\ln(x+1)$, auf dem Intervall $I = (-1, 1]$. Setzen wir nun $x = -1$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1+n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1\cdot(-1)^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1\cdot 1}{n} = -\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{=\infty} = -\infty \end{aligned}$$

Für $x = 1$ erhalten wir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} =: \ln(2)$$

Der letzte Schritt ist alles andere als trivial. Es ist eine nummerische Lösung, die jedoch klar ist, wenn man weiß, dass unsere Reihe auf I die Reihendarstellung von $\ln(x+1)$ ist.

⋆ ⋆ ⋆

Kommen wir zu einem klassischen und wichtigen Satz über stetige Funktionen.

Satz 4.21 – Zwischenwertsatz:

Seien a, b reelle Zahlen und sei

$$f\colon\ [a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \le x \le b\right\} \to \mathbb{R}$$

stetig mit $f(a) \le 0$ und $f(b) \ge 0$. Dann hat f auf $[a,b]$ eine Nullstelle.

Beweis: Wir werden zwei Folgen (a_n) und (b_n) konstruieren die gegen eine Nullstelle von f konvergieren werden. Wir setzten $a_0 = a$, $b_0 = b$ und $I_0 = [a,b]$. Rekursiv definieren wir die Folgenglieder und die Intervalle I_n wie folgt: Wenn $I_n = [a_n, b_n]$ schon definiert ist, setzen wir $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ und

$$I_{n+1} = \begin{cases} [c_n, b_n] & \text{falls } f(c_n) < 0 \\ [a_n, c_n] & \text{falls } f(c_n) \ge 0. \end{cases}$$

Es ist klar, dass (a_n) und (b_n) Cauchy-Folgen sind, die ferner gegen den selben Grenzwert konvergieren und dass $f(a_n) \le 0 \le f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $x := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann sofort $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ und deshalb $f(x) \le 0 \le f(x)$. Das beendet den Beweis. ⊠

Beispiel 4.22: Dieser Satz kann sehr gut angewendet werden. Besonders an Stellen, an denen man Nullstellen kaum oder nur schwer berechnen kann. Betrachten Sie etwa die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ ist. Dann ist ein direktes Ausrechnen der Nullstelle mit den üblichen Methoden nicht so einfach. Die Existenz dagegen bekommen wir rasch, denn es gilt:

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \qquad \textit{und} \qquad f(0) = \mathrm{e}^0 + 0 = 1 > 0$$

Damit muss es eine Nullstelle im Intervall $[-1, 0]$ geben.

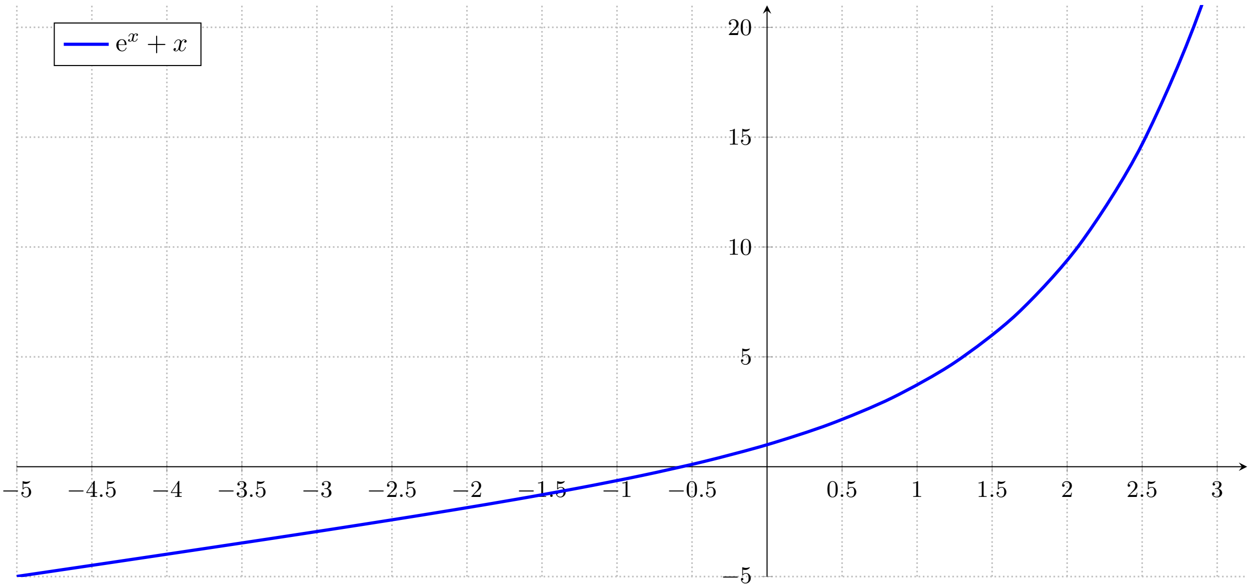


Abbildung 14: Anwendung des Zwischenwertsatzes am konkreten Beispiel $f(x) = \mathrm{e}^x + x$ zum Finden der Nullstelle

Beispiel 4.23: Ebenfalls mit dem Zwischenwertsatz lässt sich zeigen, dass jedes reelle Polynom mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Bemerkung 4.24: Durch eine geeignete Parallelverschiebung der x-Achse kann man nicht nur Nullstellen, sondern auch andere y-Werte erreichen, sofern die entsprechend veränderte Voraussetzung erfüllt ist.

⋆ ⋆ ⋆

Umkehrfunktionen. Um das Verhalten von Funktionen besser untersuchen zu können, wollen wir an dieser Stelle noch einige grundlegende Definition für Funktionen treffen. Die folgenden Begriffe sind so allgemein und immer wiederkehrend, dass wir sie allgemein für Mengen definieren werden.

Definition 4.25 – Injektiv/Surjektiv/Bijektiv:

Seien X, Y beliebige Mengen. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt

(a) injektiv, falls gilt: $x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$,
(b) surjektiv, falls es für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$, und
(c) bijektiv, falls sie surjektiv und injektiv ist.

Beispiel 4.26:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die *untere Gaußklammer* oder auch Abrundungsfunktion durch

$$\lfloor x \rfloor = \max \left\{ k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; k \leq x \right\}$$

Dann ist $\lfloor \cdot \rfloor \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ offenbar surjektiv.
(b) Die einbettende Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto n$ ist sicherlich injektiv.
(c) Die Funktion $[0,1] \to [0,2], \quad x \mapsto 2x$ ist bijektiv.
(d) Die Funktion $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad z \mapsto |z|$ ist weder injektiv noch surjektiv.

Das letzte Beispiel soll nochmal verdeutlichen, dass es bei der Definition von Injektivität und Surjektivität wirklich auf den Definitionsbereich und den Bildbereich ankommt.

Satz 4.27:

Seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a < b$ und $c < d$. Sei die Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und streng monoton wachsend, d.h.

$$a \leq u < v \leq b \Rightarrow f(u) < f(v)$$

mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

(a) f ist bijektiv;
(b) f besitzt eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$, sodass für alle $x \in [a,b]$: $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, und sodass für alle $y \in [c,d]$: $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$;
(c) f^{-1} ist bijektiv und streng monoton wachsend;
(d) f^{-1} ist stetig.

Beweis:

(a) Es ist f monoton wachsend und $f(u) < f(v)$ impliziert $f(u) \neq f(v)$. Daher ist f injektiv und aufgrund der Bemerkung nach dem Zwischenwertsatze ist f surjektiv.

(c) f^{-1} ist injektiv: Seien $y, y' \in [c,d]$ und $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Dann ist

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(y')\right) = y'.$$

f^{-1} ist surjektiv: Sei $x \in [a,b]$. Dann ist $f^{-1}(f(x)) = x$, das bedeutet, dass x im *Bild* von f^{-1} liegt.

f^{-1} wächst streng monoton: Seien $y, y' \in [c,d]$ mit $y < y'$. Angenommen $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. Wegen des strengen Wachstums von f ist dann

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) \geq f\left(f^{-1}(y')\right) = y',$$

Widerspruch.

(b) Definiere $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ dadurch, dass $f^{-1}(y)$ das nach (c) eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$ ist.

Sei $x \in [a,b]$. Nach der Definition von f^{-1} ist $f^{-1}(f(x))$ das eindeutige x' mit $f(x') = f(x)$. Wegen der Injektivität von f ist $x' = x$ und $f^{-1}(f(x)) = x$.

Sei nun $y \in [c,d]$. Dann ist $f^{-1}(y)$ das eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$. Dann ist $f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y$.

(d) Wir beschränken uns auf den Beweis der Stetigkeit an Stellen $y \in [c,d]$ mit $c < y < d$: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $x = f^{-1}(y) \in [a,b]$. Wegen der strengen Monotonie von f^{-1} ist $a < x < b$. Wähle $\varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' < \varepsilon$ und

$$a < x - \varepsilon' < x < x + \varepsilon' < b.$$

Wegen der strengen Monotonie von f ist

$$c = f(a) < f(x - \varepsilon') < f(x) = y < f(x + \varepsilon') < f(b) = d.$$

Wähle ein $\delta > 0$, sodass

$$f(x - \varepsilon') < y - \delta < y < y + \delta < f(x + \varepsilon').$$

Wenn nun $|y' - y| < \delta$, so ist $f(x - \varepsilon') < y' < f(x + \varepsilon')$ und es gilt:

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - \varepsilon < x - \varepsilon' &= f^{-1}\left(f(x - \varepsilon')\right) < f^{-1}(y') < f^{-1}\left(f(x + \varepsilon')\right) \\ &= x + \varepsilon' < f^{-1}(y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit gilt $\left|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right| < \varepsilon$. Also ist f^{-1} an der Stelle y stetig. ⊠

Bemerkung 4.28: Wie in Satz 4.27(b) kann man für jede bijektive Funktion von Mengen eine Umkehrfunktion angeben. Diese braucht dann aber im Allgemeinen weder stetig sein, noch sonst irgendwelche Eigenschaften erfüllen, welche die Ausgangsfunktion erfüllt.

⋆ ⋆ ⋆

Mehr zur Exponentialfunktion. Mithilfe des letzten Satzes können wir nun noch einige Aussagen über die Exponentialfunktion treffen.

Satz 4.29:

- **(a)** Die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 0\right\}$ ist streng monoton wachsend.
- **(b)** $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ ist surjektiv (und sowieso injektiv).
- **(c)** exp hat eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Diese Funktion heißt der natürliche Logarithmus.
- **(d)** $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend.
- **(e)** Es gilt $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ ist

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y).$$

Beweis:
(a) Für $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1$. Für $x < 0$ ist

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

Wegen $\exp(0) = 1$ bildet exp die reelle Achse $\mathbb{R}$ in die positive reelle Achse $\mathbb{R}^+$ ab.

Für die Monotonie betrachte reelle Zahlen $x < x'$. Weil $\exp\left(x' - x\right) > 1$, ist

$$\exp\left(x'\right) = \exp\Big(\left(x' - x\right) + x\Big) = \exp\left(x' - x\right) \cdot \exp(x) > \exp(x).$$

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^+$. Aus dem archimedischen Prinzip folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n, sodass $\mathrm{e}^{-n} < y < \mathrm{e}^n$. Da die Exponentialfunktion stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz ein $x \in [-n, n]$ mit $\exp(x) = y$. (c) und (d). Die Existenz einer eindeutig bestimmten, stetigen und streng monoton

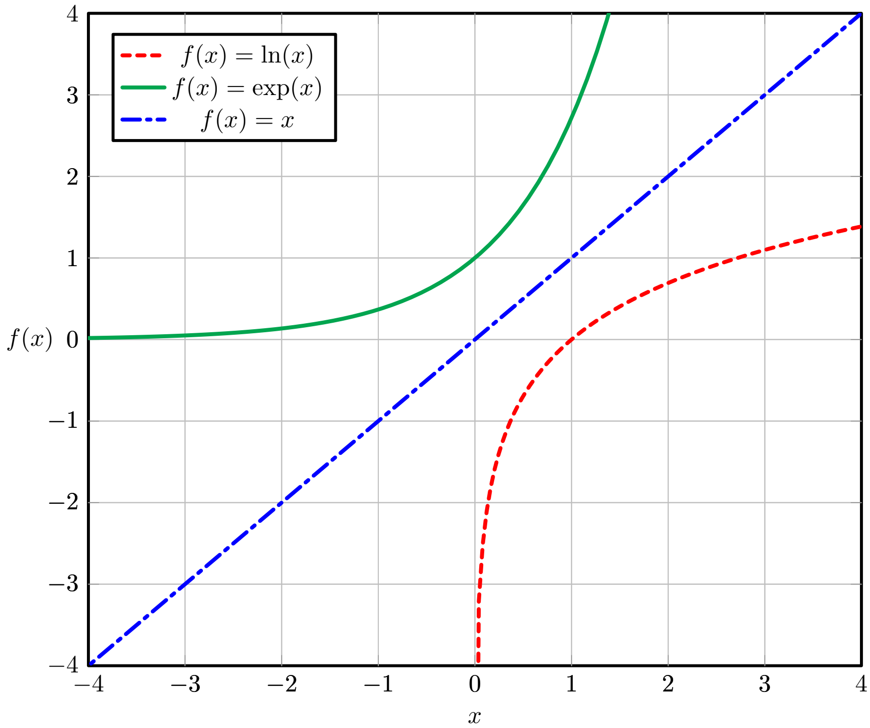


Abbildung 15: Exponentialfunktion und Logarithmus

wachsenden Umkehrfunktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ folgt aus dem vorangegangenem Satz.

(e) Aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ folgt sofort per Definition $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\exp\big(\log(x \cdot y)\big) = x \cdot y = \exp\big(\log(x)\big) \cdot \exp\big(\log(y)\big) = \exp\big(\log(x) + \log(y)\big)$$

Da exp eine injektive Funktion ist, ist

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)\,.$$

$\boxtimes$

Trigonometrische Funktionen. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe (und der dadurch möglichen beliebigen Umordnung der Reihe) ist

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} - \mathrm{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| &= \sqrt{\left(\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right)^2 + \left(\mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right)^2} &&= \sqrt{\left(\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) + \mathrm{i}\mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right)\left(\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right) - \mathrm{i}\mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\right)} \\ &= \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} &&= \sqrt{\mathrm{e}^0} \\ &= \sqrt{1} &&= 1 \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion bildet die imaginäre Achse $\mathrm{i}\mathbb{R}$ also in den komplexen Einheitskreis ab:

$$\exp\colon \mathrm{i}\mathbb{R} \to \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| = 1\big\}$$

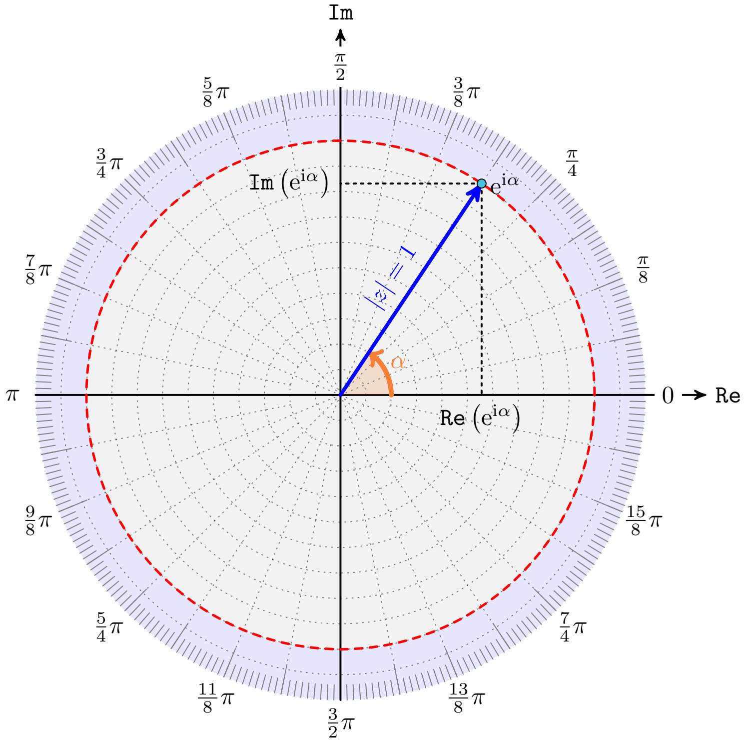


Abbildung 16: Exponentialfunktion auf den Einheitskreis

Mithilfe dieser Aussagen der Exponentialfunktion definieren wir nun die uns wohlbekannten trigonometrischen Grundfunktionen:

Definition 4.30 – Sinus- und Kosinusfunktion:

Wir definieren die Kosinusfunktion durch

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(\alpha) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \mp \ldots = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

und die Sinusfunktion durch

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(\alpha) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\alpha}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \mp \ldots = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Mit dieser Definition sieht man leicht:

Satz 4.31:

Die Kosinusfunktion $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, +1]$ ist stetig. Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$. Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist die Kosinusfunktion streng monoton fallend. Die Funktion cos hat in dem Intervall $[0, 2]$ eine eindeutig bestimmte Nullstelle $\frac{\pi}{2}$, mit $\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$.

Satz 4.32:

Die Sinusfunktion $\sin\colon \mathbb{R} \to [-1, +1]$ ist stetig. Es gilt $\sin(0) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Die Sinusfunktion hat die Periode 2π.

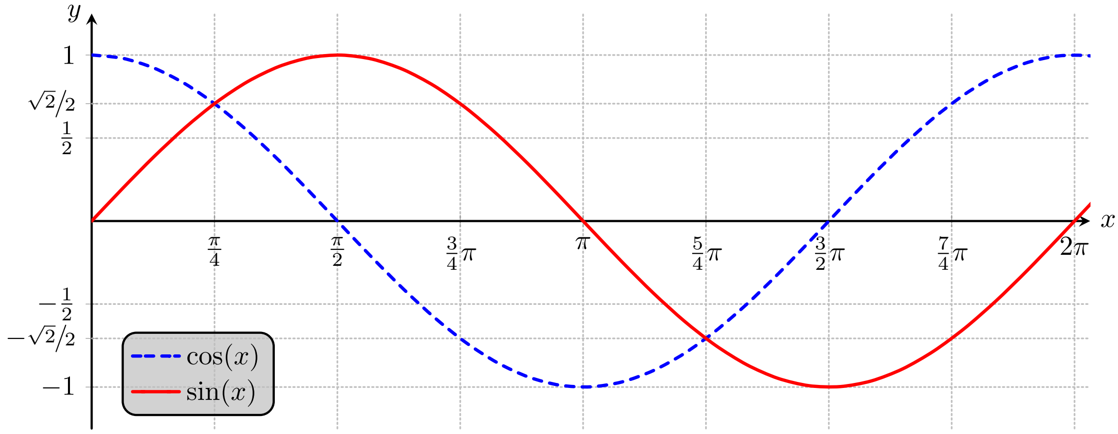


Abbildung 17: Sinus und Kosinus

⋆ ⋆ ⋆

Bogenmaß. Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Vektor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ werden wir zweckmäßig mit α bezeichnet. Damit wird der Winkel in *Bogenmaß* gemessen: Der Winkel α ist die Länge des Kreisbogens von 1 bis $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Das Bogenmaß ist zum *Gradmaß* proportional: $\frac{\pi}{2} \sim 90°$, d.h. $\alpha \sim \left(\frac{2\alpha}{\pi} \cdot 90°\right)$.

Die Bogenlänge eines Kreisbogens mit Radius 1 und Winkel α lässt sich approximieren, indem der Bogen in n gleiche Teilbögen zerlegt wird und die Längen $\left(2\sin\frac{\alpha}{2n}\right)$ der zugehörigen *Sehnen* oder *Sekanten* summiert werden.

Die Länge des Kreisbogens zum Radius 1 und Winkel $\alpha > 0$ ist dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{\alpha}{2n}\right), \text{ wobei } \left(2n\sin\frac{\alpha}{2n}\right) = 2n\left(\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha^3}{3!\,(2n)^3} + \frac{\alpha^5}{5!\,(2n)^5} \mp \ldots\right).$$

Für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ kann dies abgeschätzt werden als

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!\,(2n)^2} = 2n\left(\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha^3}{3!\,(2n)^3}\right) < 2n\sin\frac{\alpha}{2n} < 2n\frac{\alpha}{2n} = \alpha.$$

Also ist

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!\,(2n)^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{\alpha}{2n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\alpha = \alpha.$$

Damit hat ein Winkel α die Bogenlänge (= Bogenmaß) α.

Wir erhalten schließlich die bekannte Aussage über den Umfang eines Kreises:

Satz 4.33:

Ein Kreis vom Radius $r > 0$ hat den Umfang $2\pi r$.

Beweis: Für den Radius r haben die Sehnen in der obigen Abschätzung die Länge $r\sin\frac{\alpha}{2n}$. Der Kreisumfang ist dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(2nr\sin\frac{2\pi}{2n}\right) = r\lim_{n\to\infty}\left(2n\sin\frac{2\pi}{2n}\right) = r2\pi.$$

⊠

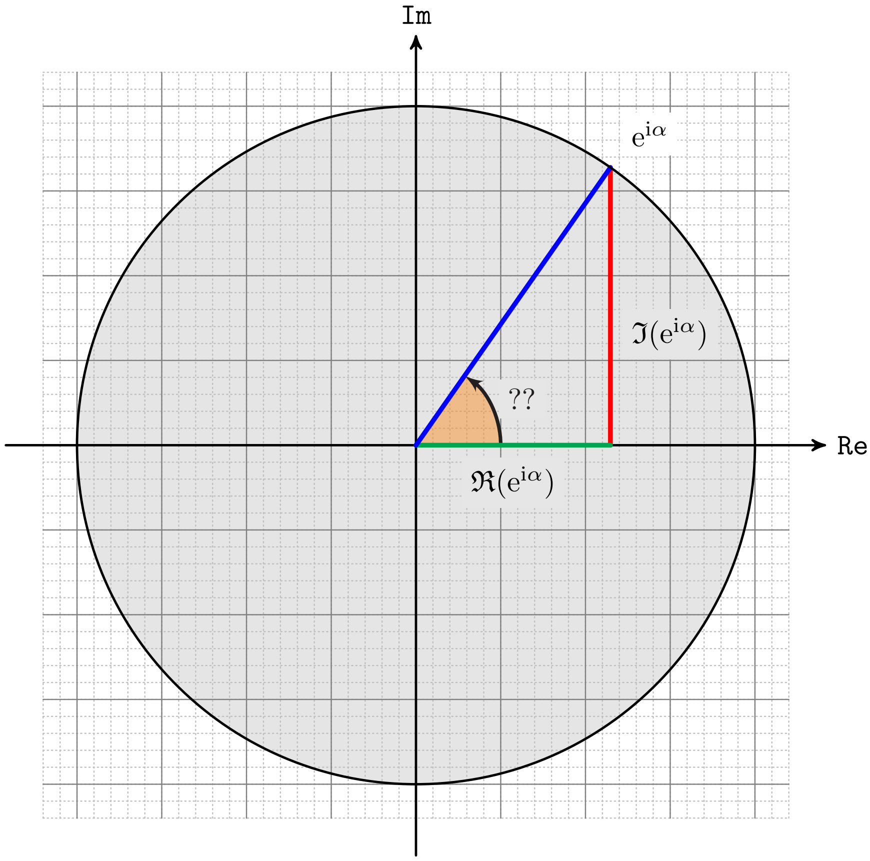


Abbildung 18: Komplexer Einheitskreis – Real-, Imaginärteil und Winkel

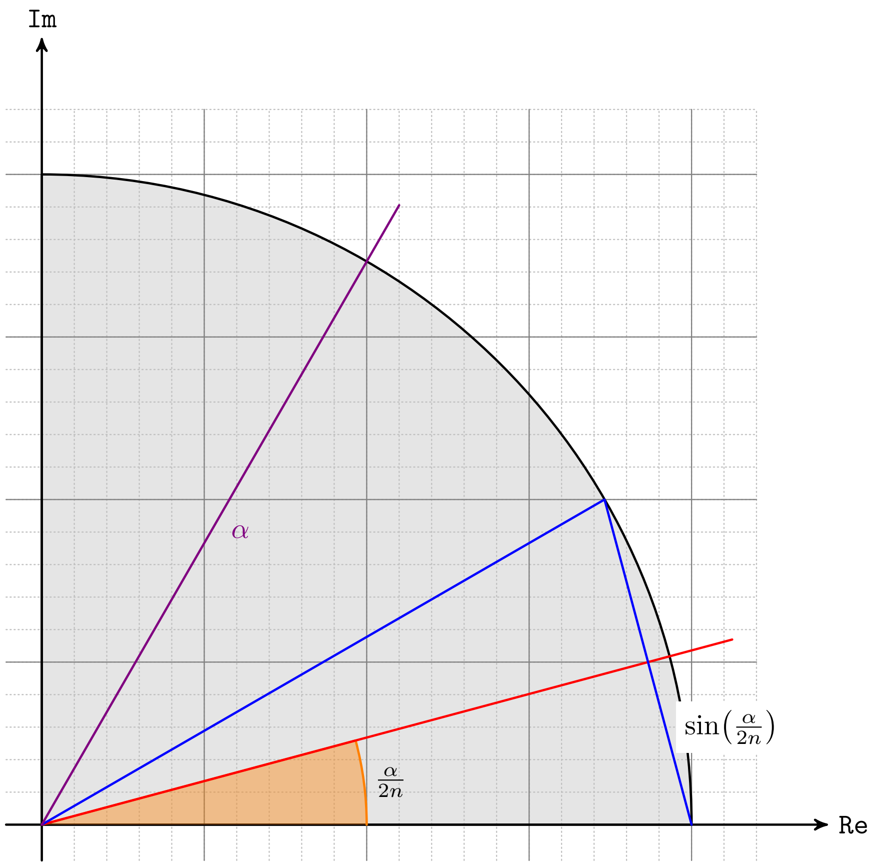


Abbildung 19: Bogenmaß

5. Differenzierbarkeit von Funktionen

Topologische Begriffe. In diesem Kapitel betrachten wir den zentralen Begriff der *Differenzierbarkeit* genauer. Dazu werden wir zunächst einige topologische Begriffe behandeln.

Definition 5.1 – Offene Menge:

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{K}$ heißt offen in $\mathbb{K}$, falls es für alle $x_0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass die Menge $B_\varepsilon(x_0) := \left\{x \in \mathbb{K} \;\middle|\; |x - x_0| < \varepsilon\right\} \subseteq M$, das heißt: M ist offen, wenn jedes seiner Elemente eine ε-Umgebung besitzt, die vollständig in M enthalten ist.

Beispiel 5.2: Beachten Sie, dass der Begriff der Offenheit von der Grundmenge $\mathbb{K}$ abhängt. So ist die Menge der reellen Zahlen in $\mathbb{R}$ selbst offen, aber als Teilmenge von $\mathbb{C}$ nicht! (Warum?) Genauer gesagt gilt:

(a) Offenbar ist $\mathbb{C}$ offen in $\mathbb{C}$. Die Mengen $B_r(0) := \left\{x \in \mathbb{C} : |x| < \varepsilon\right\}$ sind offen in $\mathbb{C}$. Die obere Halbebene $H = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathfrak{Im}(z) > 0\right\}$ ist ebenfalls offen in $\mathbb{C}$.

(b) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ ist offen. Die offenen Intervalle $(a, b) := \{a < x < b\}$ sind offen in $\mathbb{R}$. Die abgeschlossenen Intervalle $[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$ sind offenbar nicht offen in $\mathbb{R}$. Weder die abgeschlossenen noch die offenen Intervalle sind offen in $\mathbb{C}$.

(c) Die leere Menge $\emptyset$ ist offen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$, da sie keine Elemente enthält und damit jedes (potenzielle) Element eine gewünschte ε-Umgebung besitzt.

Man muss sich also offene Mengen als Mengen vorstellen, bei denen immer genügend Platz vorhanden ist – die Punkte liegen nicht am Rand der Menge. Um die obige Definition zu vervollständigen, sei hier noch der Gegenbegriff zu *offen* eingeführt.

Definition 5.3 – Abgeschlossene Menge:

Die Menge $M \subseteq \mathbb{K}$ ist abgeschlossen, falls $\mathbb{K} \setminus M$ offen in $\mathbb{K}$ ist.

Beispiel 5.4: Abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind:

(a) die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$,
(b) die leere Menge $\emptyset$,
(c) $\mathbb{R}$ selbst.

Achtung!

Offenheit und Abgeschlossenheit schließen sich weder gegenseitig aus, noch wird Abgeschlossenheit durch Nicht-Offenheit impliziert (oder andersherum).

Beispiel 5.5: Die leere Menge ist offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Die Menge $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ist weder offen, noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Lemma 5.6 – Abschlusseigenschaften offener Mengen:

Folgende Abschlusseigenschaften gelten:

(i) Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen.
(ii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Beweis: Zu (i). Seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei $x \in O_1 \cap O_2$. Dann gibt es für $i = 1, 2$ ein ε_i, sodass $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq O_i$. Dann haben wir für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, dass $B_\varepsilon(x) \subseteq O_1 \cap O_2$. Das beweist (i). Der Teil (ii) verläuft ähnlich. ⊠

Korollar 5.7 – Abschlusseigenschaften abgeschlossener Mengen:

In Analogie ist die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen und ebenso ein beliebiger Durchschnitt von abgeschlossen Mengen.

Lemma 5.8:

Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossen. Dann hat jede konvergente Folge die in A liegt ihren Grenzwert in A.

Beweis: Angenommen nicht. Sei dann (a_n) eine gegen x konvergente Folge mit $x \notin A$. Da $\mathbb{K} \setminus A$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{K} \setminus A$. Da $a_n \to x$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in B_\varepsilon(x)$ für alle $n > N$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass (a_n) eine Folge in A war. ⊠

Der letzte wichtige topologische Begriff, den wir hier einführen wollen, ist der Begriff der *Kompaktheit*.

Definition 5.9 – Kompaktheit:

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt **kompakt**, falls jede Folge in A einen Häufungspunkt in A besitzt.

Als einfache Folgerung aus den Satz 3.26 von Bolzano-Weierstraß (für komplexe Zahlen) und Satz 5.8 können wir notieren:

Satz 5.10 – Kompaktheit:

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Damit ergibt sich ebenfalls sehr leicht:

Lemma 5.11:

Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ kompakt und sei $f\colon A \to \mathbb{K}$ stetig. Dann ist $f[A]$ kompakt.

Das heißt, dass Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildung kompakt sind.

Beweis von Lemma 5.11: Wir werden zeigen, dass jede Folge in $f[A]$ einen Häufungspunkt in $f[A]$ besitzt. Da $f : A \to f[A]$ surjektiv ist, können wir jede Folge in $f[A]$ zu einer Folge (von Urbildern) in A zurückziehen.

Sei (x_n) eine solche Folge in A. Dann gibt es wegen der Kompaktheit von A einen Häufungspunkt $x^\star$ von x_n in A und damit auch eine zu diesem Häufungspunkt konvergierende Teilfolge (x_{n_k}), also

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^\star$. Wegen der Stetigkeit von f haben wir $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^\star) \in f(A)$. Fertig. ⊠(Lemma 5.11)

Beispiel 5.12:

- Die geschlossenen Intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sind kompakt.
- $\mathbb{R}$ selbst ist nicht kompakt, da $\mathbb{R}$ abgeschlossen, aber nicht beschränkt ist. Die Folge $a_n = n$ hat in $\mathbb{R}$ keinen Häufungspunkt.
- Auch die beschränkte, aber nicht abgeschlossene Menge $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt: Die Folge $b_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{falls n gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls n ungerade} \end{cases}$ hat die Häufungspunkte $0, 1 \notin (0, 1)$.

Betrachten wir beschränkte Mengen, wird die Frage nach der *schärfsten* Schranke relevant:

Definition 5.13 – Supremum, Infimum:

Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl K_s heißt Supremum von M, wenn sie die kleinste obere Schranke ist. Analog nennen wir die größte untere Schranke K_i das Infimum von M. Wir schreiben

$$\sup M = K_s \text{ und } \inf M = K_i$$

Falls M nicht nach oben (unten) beschränkt ist, schreiben wir $\sup M = \infty$ ($\inf M = -\infty$).

Beispiel 5.14: Supremum und Infimum müssen nicht innerhalb der Menge liegen. Für die Mengen $A = (0, 1)$ und $B = [0, 1]$ gilt $\sup A = \sup B = 1$ und $\inf A = \inf B = 0$. Bei der Menge $C = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ liegt das Infimum $\inf C = 0$ in der Menge, das Supremum $\sup C = 1$ jedoch nicht. Für die Menge $D = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}^+\}$ gilt $\sup D = \infty$ und $\inf D = 0$.

⋆ ⋆ ⋆

Differenzierbarkeit. Nun wenden wir uns dem Begriff der Differenzierbarkeit zu. Wir werden „Differenzierbarkeit“ von komplexen *und* reellen Funktionen parallel definieren und entwickeln. Dies geht bis zu einem bestimmten Punkt gut, dann werden wir aber feststellen müssen, dass die Welt der komplex-differenzierbaren Funktionen eine völlig andere Welt ist, als die Welt der reell-differenzierbaren Funktionen. Zunächst aber die grundlegende Definition:

Definition 5.15 – Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x_0:

Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei $f: U \to \mathbb{K}$. f heißt im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man nennt dann den Wert $f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0. Die Funktion f heißt differenzierbar, falls sie an jeder Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar ist.

Bemerkung 5.16: Eine weitere häufig verwendete Definition der Differenzierbarkeit verlangt, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Diese beiden Definitionen sind offenbar äquivalent, was man einsieht, wenn man $h = x - x_0$ setzt.

Bemerkung 5.17: Für die Ableitung von f wird statt $f'(x)$ häufig die Bezeichnung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ verwendet.

Die Ableitung soll das infinitesimale Verhalten einer Funktion beschreiben, also das Verhalten in einer beliebig kleinen Umgebung. Daher verlangen wir, dass eine offene Umgebung für den Punkt, an dem wir Ableiten wollen, existiert.

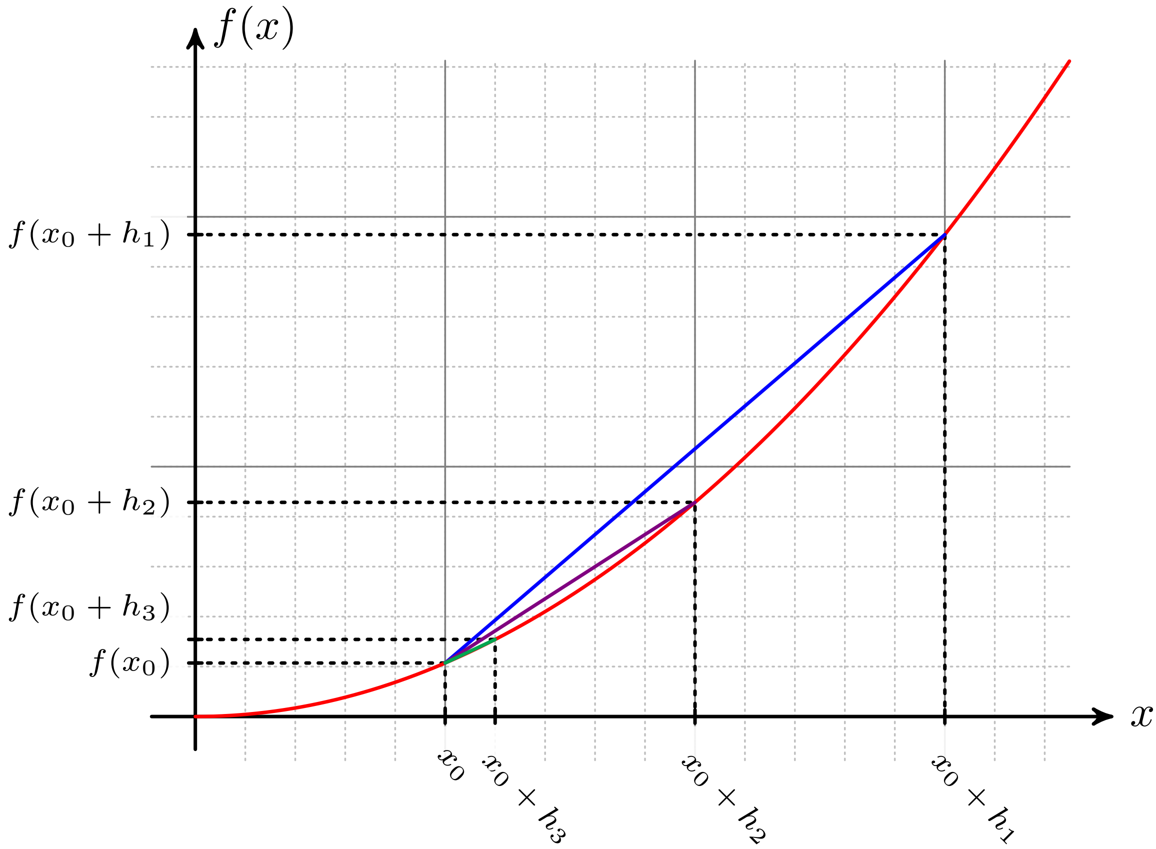


Abbildung 20: Annäherung an die Tangente durch die h-Methode

Die Motivation für den Ausdruck $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist sicherlich noch jedem Leser aus der Schule bekannt: Man möchte die Funktion im Kleinen „linearisieren“, also im Wesentlichen die Steigung einer Funktion in einem Punkt herausfinden. (Der Begriff „Steigung“ ist bei der Übertragung zu den komplexen Funktionen nicht mehr wie bei reellen Abbildungen anschaulich motivierbar.)

Kommen wir zu ersten Aussagen über differenzierbare Funktionen.

Lemma 5.18 – Differenzierbarkeit eines Monoms:

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^n$ differenzierbar und die Ableitung an jedem Punkt ist $n \cdot x^{n-1}$.

Beweis: Es ist

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i - x^n}{h} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^i}{h} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} h^{i-1}.$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ beendet dann den Beweis, denn in der Summe gehen alle Summanden für $i > 1$ mit h ebenfalls gegen 0. ⊠

Lemma 5.19 – Stetigkeit durch Differenzierbarkeit:

Sei $f\colon U \to \mathbb{K}$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar. Dann ist f in x stetig. (Differenzierbare Funktionen sind also stetig.)

Beweis: Angenommen nicht. Dann gibt es eine Folge $x_n \to x$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir also:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| \geq \frac{\varepsilon}{|x_n - x|} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Das ist ein Widerspruch. ⊠

Satz 5.20 – Arithmetische Verträglichkeiten:

Folgende arithmetische Verträglichkeiten gelten:

(a) Die konstanten Funktionen $\mathrm{const}_c\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto c$ sind differenzierbar mit Ableitung der Nullfunktion.

(b) Die identische Funktion $id\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto x$ ist differenzierbar mit Ableitung der Funktion const_1.

(c) (Summenregel) Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ offen. Seien $f, g\colon U \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x \in U$. Dann ist $f + g$ differenzierbar in x mit Ableitung $f'(x) + g'(x)$.

(d) (Produktregel) Für U, f, g, x wie oben ist die Funktion $f \cdot g$ differenzierbar in x mit Ableitung $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$.

(e) (Quotientenregel) Für U, f, g, x wie oben und für $g(x) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar mit Ableitung $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Beweis:

(a) Wir haben für alle $x, z \in \mathbb{K}$ stets $\frac{c-c}{z-x} = 0$. Der Grenzübergang zeigt die Behauptung.

(b) Klar mit Lemma 5.18.

(c) Diese Behauptung ergibt sich durch Ausklammern und der Linearität des Limesoperators.

(d) Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to x}\frac{(f\cdot g)(y) - (f\cdot g)(x)}{y-x} &= \lim_{y\to x}\frac{f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x}\frac{f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(y) + f(x)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x}\frac{f(y)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(y)}{y-x} + \lim_{y\to x}\frac{f(x)\cdot g(y) - f(x)\cdot g(x)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x}\frac{f(y) - f(x)}{y-x}\cdot\lim_{y\to x} g(y) + f(x)\cdot\lim_{y\to x}\frac{g(y)-g(x)}{y-x} \\
&= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

Von der zweiten Zeile auf die dritte Zeile haben wir eine Null addiert.

(e) Wir beweisen nur den Fall $f = \mathrm{const}_1$. Der allgemeine Fall folgt dann mithilfe der Produktregel. Es ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

☒

Bemerkung 5.21: Für Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{K}$, die auf ganz U differenzierbar sind, übertragen sich die obigen Eigenschaften auf ganz U.

Weiterhin ergibt sich sofort:

Korollar 5.22 – Differenzierbarkeit von Polynomen:

Polynome $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ sind auf ganz $\mathbb{K}$ differenzierbar und ihre Ableitungen sind jeweils wieder Polynome, nämlich $\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

Eine wichtige Ableitungsregel fehlt uns noch:

Satz 5.23 – Kettenregel:

Seien $U \subseteq \mathbb{K}$ offen, sei $g\colon U \to \mathbb{K}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar und sei $f\colon g[U] \to \mathbb{K}$ in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g\colon U \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und die Ableitung ist

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis: Betrachte die Funktion

$$D(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)} & \text{falls } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f in $g(x_0)$ differenzierbar ist, muss D in $g(x_0)$ stetig sein und es gilt:

$$D(g(x_0)) = f'(g(x_0)).$$

Weiterhin haben wir $D(y)(y-g(x_0)) = f(y)-f(g(x_0))$. Damit ergibt sich mittels der Identifizierung $y = g(x)$ leicht:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{D(g(x)) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} D(g(x)) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'\left(g(x_0)\right) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

☒

Die geometrische Interpretation der Kettenregel bei zusammengesetzten Funktionen ist die Multiplikation der jeweiligen Steigungen. Kommen wir zu einer weiteren wichtigen Regel für das Ableiten:

Satz 5.24 – Regel von l'Hospital:

Sind f und g zwei differenzierbare Funktionen im Intervall (a, b), sodass entweder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, dann gilt:

$$\text{Existiert } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ dann existiert auch } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 5.25: Man bestimme den Grenzwert für $x \to 0$ von $\frac{\sin(x)}{\tan(x)}$.
Weiß man, dass $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, kann man dies umformen zu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$$

Kennt man diese Identität jedoch nicht, dafür aber, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, findet man mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \cos^3(x) = 1$$

Wie man sieht, sind beide Grenzwerte identisch. Dies ist ein Beispiel, bei dem man den Grenzwert sowohl über l'Hospital, als auch auf klassischem Wege bestimmen kann.

Beispiel 5.26: Für $x \to \infty$ bestimme den Grenzwert von $\frac{2x^2-4x+1}{-3x^2+5x-9}$. Offensichtlich gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x+1}{-3x^2+5x-9} \to \frac{\infty}{-\infty}$. Anwenden von l'Hospital ergibt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x+1}{-3x^2+5x-9} &\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[2x^2-4x+1\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-3x^2+5x-9\right]} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-4}{-6x+5} \\
&\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x-4\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-6x+5\right]} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Die Funktion ist in Abbildung 21 dargestellt.

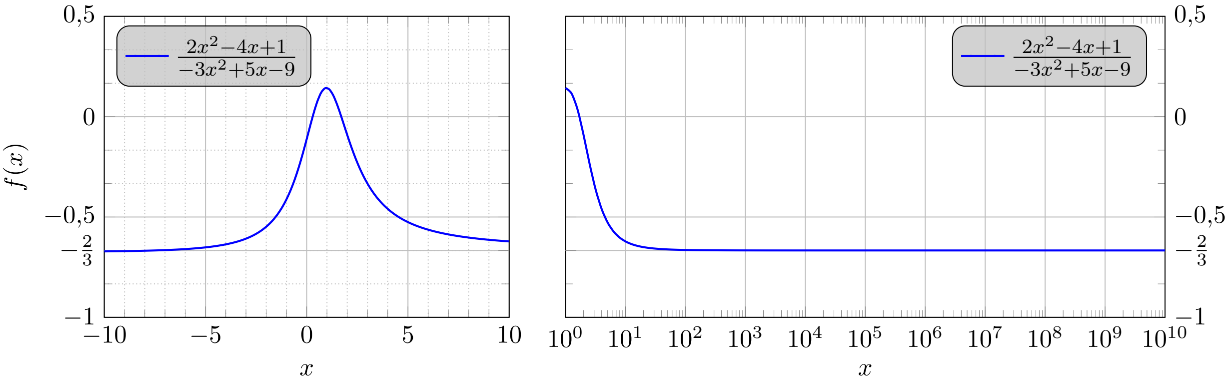


Abbildung 21: Grafische Darstellung von $\frac{2x^2-4x+1}{-3x^2+5x-9}$ um 0 und semi-logarithmisch für große Zahlen (jeweils mit gleicher y-Achse)

Achtung!

Die Regel von l'Hospital darf nur angewandt werden, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind. Anderenfalls kann es zu Fehlschlüssen über den Grenzwert kommen.

Beispiel 5.27: Sei $f(x) = \sin x + x$ und $g(x) = \cos x + 2x$. Offenbar gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\infty}{\infty}$. Die Regel von l'Hospital kann hier jedoch nicht angewandt werden: Es gilt $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x+1}{-\sin x+2}$; für $x \to \infty$ liegt aber keine Konvergenz vor, da dieser Wert periodisch schwankt. Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$ existiert trotzdem.

⋆ ⋆ ⋆

Definition 5.28 – Stetige Differenzierbarkeit:

Sei $U \subseteq \mathbb{K}$ und $f\colon U \to \mathbb{K}$ differenzierbar. Wir sagen f ist **stetig differenzierbar**, falls f' stetig ist. Ferner definieren wir die n-fache Ableitung rekursiv, durch $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$. Dann nennen wir f eine n-**fach stetig differenzierbare** Funktion, falls $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist und $f^{(n)}$ stetig ist.

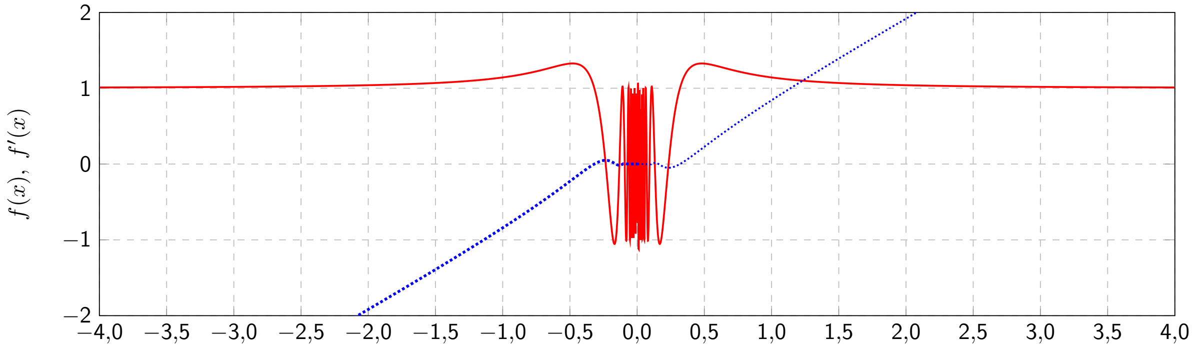
Beispiel 5.29: Stetigkeit ist für die Differenzierbarkeit einer Funktion eine notwendige Bedingung. Allerdings ist nicht jede stetige Funktion differenzierbar, wie die reelle Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ sofort zeigt. Des Weiteren ist nicht jede differenzierbare Funktion stetig differenzierbar: Es gibt also differenzierbare (und damit stetige) Funktionen, deren erste Ableitung nicht stetig (und damit auch nicht differenzierbar) ist – so erfüllt diese Eigenschaft folgende Abbildung:

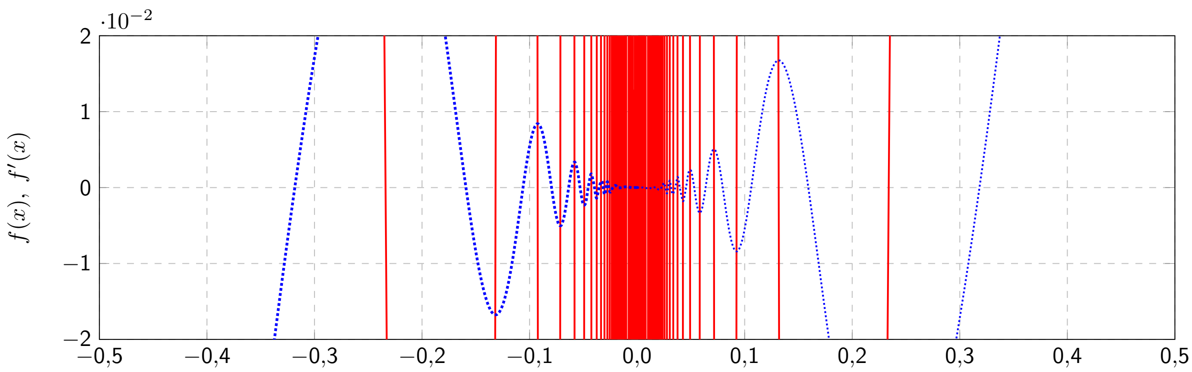
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Ableitung liest sich wie folgt:

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

die immer stärker oszillierend in der Nähe des Koordinatenursprungs wird, siehe Abbildung 22.





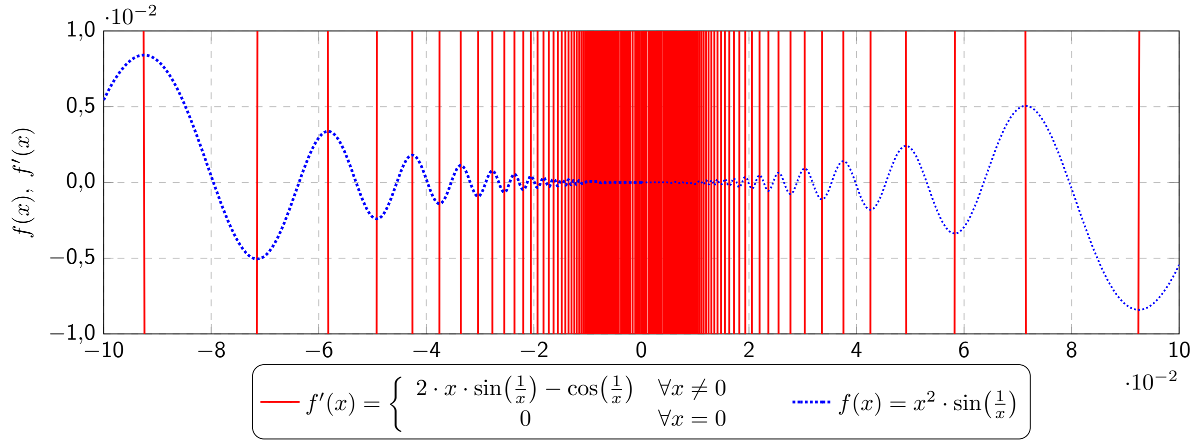


Abbildung 22: Die Funktion und ihre Ableitung, bei immer kleinerem Ausschnitt

⋆ ⋆ ⋆

Intermezzo: Eigenheiten komplex differenzierbarer Funktionen. Wir gehen nun darauf ein, warum das Verhalten von komplex differenzierbaren Funktionen sich stark von reell differenzierbaren Funktionen unterscheidet.

Differenzierbarkeit liefert eine lineare Approximation der zu untersuchenden Funktion. Nun ist bei einer komplex differenzierbaren Funktion f der Wert $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ immer eine komplexe Zahl, das heißt aufgefasst (via Multiplikation) als lineare Funktion von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ immer eine Drehstreckung – das bedeutet, dass komplex differenzierbare Funktionen sich lokal wie Drehstreckungen verhalten.

Das hat Konsequenzen! Zum Beispiel ist jede komplex differenzierbare Funktion sofort unendlich oft differenzierbar. Ein vielleicht gutes Beispiel ist die komplexe Konjugation: $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a+ib \mapsto a-ib$. Diese Funktion ist sogar reell linear, ist aber an der Stelle 0 nicht (komplex) differenzierbar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\frac{\mathrm{i}}{n})}{\frac{\mathrm{i}}{n}} = \frac{-\frac{\mathrm{i}}{n}}{\frac{\mathrm{i}}{n}} = -1 \neq 1 = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}.$$

Damit kann der gewünschte Grenzwert nicht existieren. Die komplexe Analysis nimmt in der reinen Mathematik neben der reellen Analysis einen eigenen großen Platz ein. Man nennt komplexe Analysis auch Funktionentheorie.

⋆ ⋆ ⋆

Verhalten reeller differenzierbarer Funktionen. Betrachten wir ein paar wichtige Sätze über reelle differenzierbare Funktionen.

Satz 5.30 – Maximumssatz:

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Ferner habe f in $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Beweis: Sei o.B.d.A $f(x) > 0$ (ansonsten verschieben wir das Koordinatensystem geeignet). Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(y) > 0$ für beliebige $y \in B_\varepsilon(x)$ gilt.

Sei $x_n \to x$ eine Folge mit $x_n < x$ für $n \in \mathbb{N}$, also $x_n - x < 0$, und sei $y_n \to x$ mit $y_n > x$ für $n \in \mathbb{N}$, also $y_n - x > 0$. Da x ein lokales Maximum ist, haben wir $f(x_n) - f(x) < 0$ und $f(y_n) - f(x) < 0$ für hinreichend großes n. Damit gilt aber die Ungleichung:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \leq 0$$

und es muss $f'(x) = 0$ gelten. ⊠

Bemerkung 5.31: Für Minima gilt natürlich der analoge Satz.

Satz 5.32 – Satz von Rolle:

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b) = 0$ und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\zeta \in (a,b)$, sodass $f'(\zeta) = 0$ gilt.

Beweis: Wenn f konstant ist, so ist der Beweis trivial. Daher können wir annehmen, dass f nicht konstant ist. Dann sei ohne Einschränkung ein Punkt $x \in (a,b)$ gegeben, sodass $f(x) > 0$.

Da f stetig ist, ist $f\big[\,[a,b]\,\big]$ kompakt. Also gibt es einen Punkt x_0, sodass $f(x_0)$ gerade das Maximum in der Menge $f[A]$ ist. Dieser Punkt ist offenbar ein lokales Maximum der Funktion und daher können wir Satz 5.30 anwenden und erhalten $f'(x_0) = 0$. ⊠

Und schließlich:

Korollar 5.33 – Mittelwertsatz:

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\zeta \in (a,b)$, sodass

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Betrachte die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Dann erfüllt h die Bedingungen für den Satz von Rolle und es muss ein ζ geben, sodass $h'(\zeta) = 0$ ist. Und es gilt wie gewünscht: $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ⊠

Beispiel 5.34: Der Mittelwertsatz findet zahlreiche Anwendungen in der Differenzialrechnung. Anschaulich bedeutet er, dass es im Intervall $[a,b]$ einen Punkt auf dem Graphen gibt, dessen Tangente die gleiche Steigung hat wie die Sekante durch a und b (siehe Abbildung 23).
Außerdem ist der Mittelwertsatz ein praktischen Hilfsmittel, um Ungleichungen wie $1 - \frac{1}{x} < \ln(x)$ zu beweisen: Diese Abschätzung ergibt sich schnell, wenn man den Mittelwertsatz auf die Funktion $f(x) = \ln(x)$ mit den Grenzen $a = 1$ und $b = x$ anwendet.

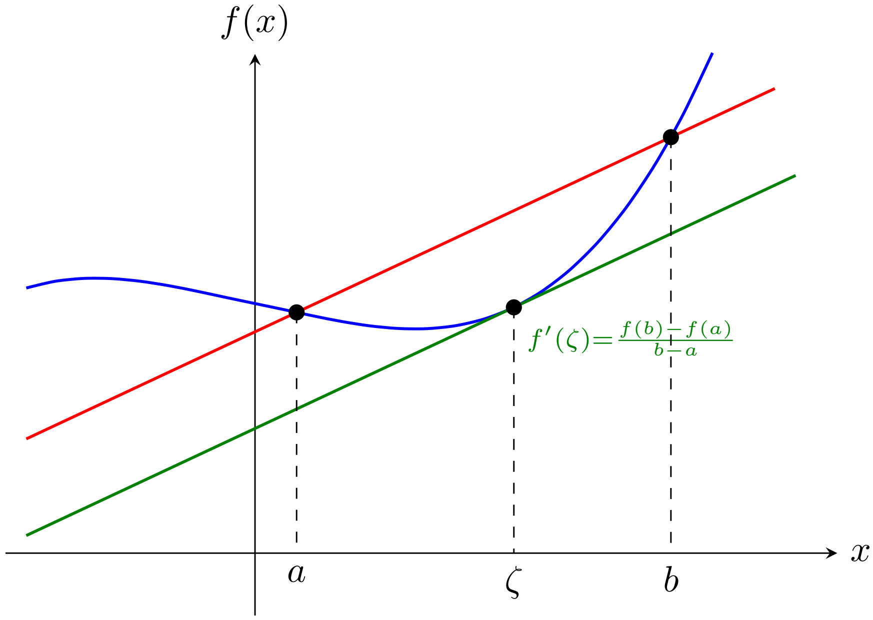


Abbildung 23: Veranschaulichung des Mittelwertsatzes

⋆ ⋆ ⋆

Ausblick: Differenzialgleichungen. Wenn man physikalische Phänomene mathematisch modellieren möchte, treten auf ganz natürliche Weise so genannte Differenzialgleichungen auf. Das sind Gleichungen, bei denen wir bestimmte Ableitungen einer Funktion kennen, aber die Funktion selbst nicht. Die Sprechweise „eine Differenzialgleichungen lösen" bedeutet dann „eine Funktion suchen, sodass eine bestimmte Differenzialgleichung erfüllt ist". Formaler:

Definition 5.35 – Implizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung:

Eine **implizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung** ist ein Ausdruck der Form

$$F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist eine Lösung der Differenzialgleichung, wenn f eine n-fach differenzierbare Funktion ist und für alle $z \in M$ gilt

$$F(z, f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z)) = 0.$$

Ein Ausdruck der Form

$$y^{(n)} = F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist eine explizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung.

Viele physikalischen Gesetze lassen sich mithilfe von Differenzialgleichungen formulieren.

Das zweite Newtonsche Gesetz, Kraft = Masse×Beschleunigung, liest sich wie folgt:

$$F = mf''.$$

Im (homogenen) Schwerefeld der Erde ist die Trägheitskraft F der Schwerkraft mg_{Erde} entgegengesetzt:

$$F = -mg_{\text{Erde}}.$$

Der (eindimensionale) freie Fall eines Massepunktes im Schwerefeld wird beschrieben durch die explizite gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$f'' = -g_{\text{Erde}}.$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch einen Polynomansatz zu lösen:

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_n t^n + \ldots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \\
f'(t) &= n c_n t^{n-1} + \ldots + 2c_2 t + c_1 \\
f''(t) &= (n-1) n c_n t^{n-2} + \ldots + 2c_2 \quad = \quad -g_{\text{Erde}}
\end{aligned}$$

Dann ist $c_n = c_{n-1} = \ldots = c_3 = 0$ und $c_2 = -\frac{1}{2} g_{\text{Erde}}$. Der Koeffizienten c_1 und c_0 können frei gewählt werden. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$f(t) = -\frac{1}{2} g_{\text{Erde}} t^2 + c_1 t + c_0,$$

wobei $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.

Der „Anfangsort“ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist mit $f(0) = c_0$ gegeben. Die „Anfangsgeschwindigkeit“ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$f'(0) = \left(-g_{\text{Erde}} t + c_1\right)(0) = c_1.$$

Die Menge der Lösungen bildet einen durch c_0 und c_1 parametrisierten, zwei-dimensionalen reellen Vektorraum. Durch Vorgaben von Anfangswerten c_0 und c_1 ist die Bewegungsgleichung des Massepunktes eindeutig bestimmt.

⋆ ⋆ ⋆

Ableitung von Potenzreihen. Wir wenden uns nun wieder den Potenzreihen zu. Unser Ziel ist es, erneut einen starken Satz zu bekommen, um unsere bekannten Potenzreihen gut in den Griff zu bekommen.

Satz 5.36 – Ableitung einer Potenzreihe:

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere absolut für $|z| < R$. Dann ist die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig differenzierbar für alle z mit $|z| < R$. Die Ableitung ist durch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

gegeben, die für $|z| < R$ absolut konvergiert.

Beweis: Wir zeigen zunächst die absolute Konvergenz innerhalb des Kreises mit dem Radius R: Seien dazu für ein festes z mit $|z| < R$ zwei Zahlen r und s gegeben, sodass $|z| < r < s < R$ gilt. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ absolut konvergiert, gibt es eine obere Schranke $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n s^n| < M.$$

Dann ist

$$\left|(n+1)a_{n+1}z^n\right| = \left|(n+1)a_{n+1}s^{n+1}\frac{z^n}{s^{n+1}}\right| \leq (n+1)M\frac{r^n}{s^{n+1}}.$$

Damit majorisiert $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)M\frac{r^n}{s^{n+1}}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)M\frac{r^n}{s^{n+1}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium absolut, denn für hinreichend großes n ist

$$\frac{(n+2)M\frac{r^{n+1}}{s^{n+2}}}{(n+1)M\frac{r^n}{s^{n+1}}} = \frac{(n+2)r}{(n+1)s} < \frac{r}{s} + \varepsilon < 1.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ ebenfalls absolut.

Sei nun $|z_0| < R$. Wähle r mit $|z_0| < r < R$. Zur Bestimmung der Ableitung sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gerade gezeigten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}r^n$ wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n a_n r^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weil $\sum_{n=0}^{n_0-1}(n+1)a_{n+1}z_0^n$ die Ableitung des Polynoms $\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n$ an der Stelle z_0 ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $|z_0| + \delta < r$, und sodass für alle $z \neq z_0$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$\left|\frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{n_0-1}(n+1)a_{n+1}z_0^n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt für alle $z \neq z_0$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\right| \\
\leq\quad & \left|\frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{n_0-1}(n+1)a_{n+1}z_0^n\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{a_n z^n - a_n z_0^n}{z - z_0}\right| \\
& + \left|\sum_{n=n_0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n\right| \\
<\quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + z_0^{n-1})\right| \\
\leq\quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n(r^{n-1} + r^{n-2}r + \ldots + r^{n-1})\right| \\
=\quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n a_n r^{n-1}\right| \\
<\quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad = \quad \varepsilon
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Durch Iteration dieses Satzes ergibt sich:

Satz 5.37 – k-te Ableitung einer Potenzreihe:

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere absolut für $|z| < R$. Dann ist die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ beliebig oft stetig differenzierbar für alle z mit $|z| < R$, das heißt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(z)$ sogar k-fach stetig differenzierbar für beliebige $|z| < R$ ist. Dabei gilt:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}.$$

Beweis: (Vollständige Induktion über k) Trivial für $k = 0$.

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) = \left(f^{(k)}\right)'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n z^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n z^{n-k-1} \end{aligned}$$

⊠

Satz 5.38 – Stetige Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion:

Die Exponentialfunktion exp ist auf $\mathbb{C}$ stetig differenzierbar, wobei

$$\exp'(z) = \exp(z).$$

Bemerkung 5.39: Andere Formulierungen lesen sich wie folgt:

(a) Die Exponentialfunktion ist eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = y$.
(b) Sie ist ein *Fixpunkt* des Ableitungsoperators.

Beweis von Satz 5.38: Wir leiten die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

einfach gleicherweise ab und kommen damit leicht zum Ziel:

$$\exp'(z) = (\mathrm{e}^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z = \exp(z).$$

⊠(Satz 5.38)

⋆ ⋆ ⋆

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen. Als erste Anwendung der Ableitungen von Potenzreihen schauen wir uns die trigonometrischen Funktionen an.

Satz 5.40 – Ableitungen der trigonometrischen Funktionen:

Für die bekannten trigonometrischen Funktionen gilt:

(a) $\sin'(x) = \cos(x)$

(b) $\cos'(x) = -\sin(x)$

(c) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(d) $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

Beweis:

Zu (a). Durch gliedweises Ableiten der Potenzreihe folgt:

$$\sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z)$$

Analog dazu verläuft die Ableitung durch die Anwendung der Definition durch die Exponentialfunktion:

$$\sin'(z) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \right)' = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - (-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \cos(z)$$

Zu (b). Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z). \end{aligned}$$

Ebenso wie für $\sin'(z)$ kann man auch hier die Definition über die Exponentialfunktion anwenden:

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \right)' = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \mathrm{i}^2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \\ &= -\sin(z) \end{aligned}$$

Zu (c). Nach der Quotientenregel gilt:

$$\tan'(z) = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(z) = \frac{\cos(z) \cdot \cos(z) + \sin(z) \cdot \sin(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)}$$

Zu (d). Es gilt:

$$\cot'(z) = \left(\frac{\cos}{\sin} \right)'(z) = \frac{-\sin(z) \cdot \sin(z) - \cos(z) \cdot \cos(z)}{\sin^2(z)} = \frac{-1}{\sin^2(z)}$$

⊠

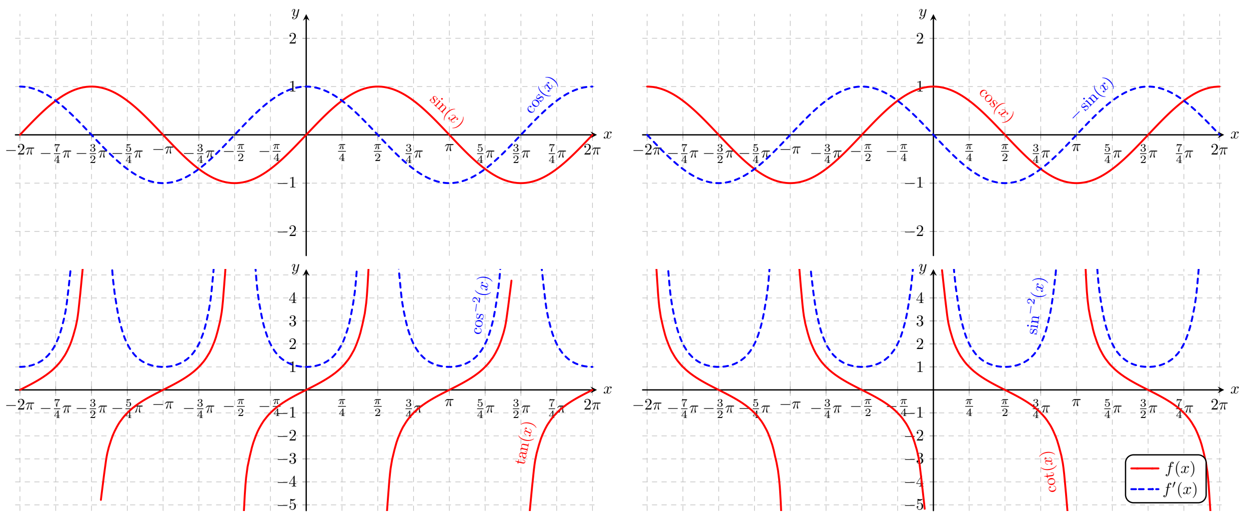


Abbildung 24: Sinus, Kosinus, Tangens und Cotangens mit ihren Ableitungen

⋆ ⋆ ⋆

Ableitungen von Umkehrfunktionen.

Satz 5.41 – Ableitungen von Umkehrfunktionen:

Seien $[a, b], [c, d] \subseteq R$, und sei $f\colon [a, b] \to [c, d]$ streng monoton, stetig und bijektiv mit der Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c, d] \to [a, b]$. Sei $f(x^\star) = y^\star$ und sei f in $x^\star$ differenzierbar.

Dann ist f^{-1} in $y^\star$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(f^{-1}\right)'(y^\star) = \frac{1}{f'(x^\star)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y^\star)\right)}.$$

Beweis: Zur Erinnerung an die Definition: Es ist $g'(y^\star) = c$ genau dann, wenn für jede Folge (y_n) mit $y_n \neq y^\star$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y^\star$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y^\star)}{y_n - y^\star} = c.$$

Sei $(y_n) \to y^\star$ eine solche Folge. Da f^{-1} stetig und bijektiv ist, gilt für die Folge $(x_n) = \left(f^{-1}(y_n)\right)$:

$$x_n \neq x^\star \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = x^\star.$$

Also haben wir schließlich:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y^\star} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x^\star)} &&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x^\star)}{x_n - x^\star}} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x^\star)}{x_n - x^\star}} &&= \frac{1}{f'(x^\star)}
\end{aligned}$$

⊠

Mit dem vorangegangenen Satz folgt die Anwendung auf die bekannten Funktionen, deren Umkehrungen nicht weniger kompliziert sind als die Ausgangsfunktionen selbst:

Satz 5.42 – Ableitungen des $\log(x)$, sowie der Arkusfunktionen:

Für die Umkehrabbildungen der Exponentialfunktion und der drei trigonometrischen Funkionen gilt:

(a) $\log'(y) = \frac{1}{y}$

(b) $\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

(c) $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(d) $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$

Beweis: Zu (a). Der Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Für $y > 0$ gilt daher:

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{\exp\big(\log(y)\big)} = \frac{1}{y}$$

Auf der negativen reellen Achse ist aus Gründen der Symmetrie für $y < 0$:

$$\big(\log|y|\big)' = \big(\log(-y)\big)' = -\log'(-y) = -\frac{1}{-y} = \frac{1}{y}$$

Daher fassen wir oft $\log(y)$ als die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion $\log\big(|y|\big)$ auf. Beachten Sie hierbei, dass wir mit log stets den natürlichen Logarithmus bezeichnen.

Zu (b).

$$\begin{aligned} \arccos'(y) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} &&= \frac{-1}{\sin\big(\arccos(y)\big)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}} &&= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

Zu (c).

$$\begin{aligned} \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} &&= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} &&= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

Zu (d). Es ist

$$\tan^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1-\cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1.$$

Damit haben wir

$$\cos^2(y) = \frac{1}{1+\tan^2(y)}.$$

. Also folgt wie gewünscht:

$$\begin{aligned} \arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} &&= \cos^2(\arctan(y)) \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} &&= \frac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

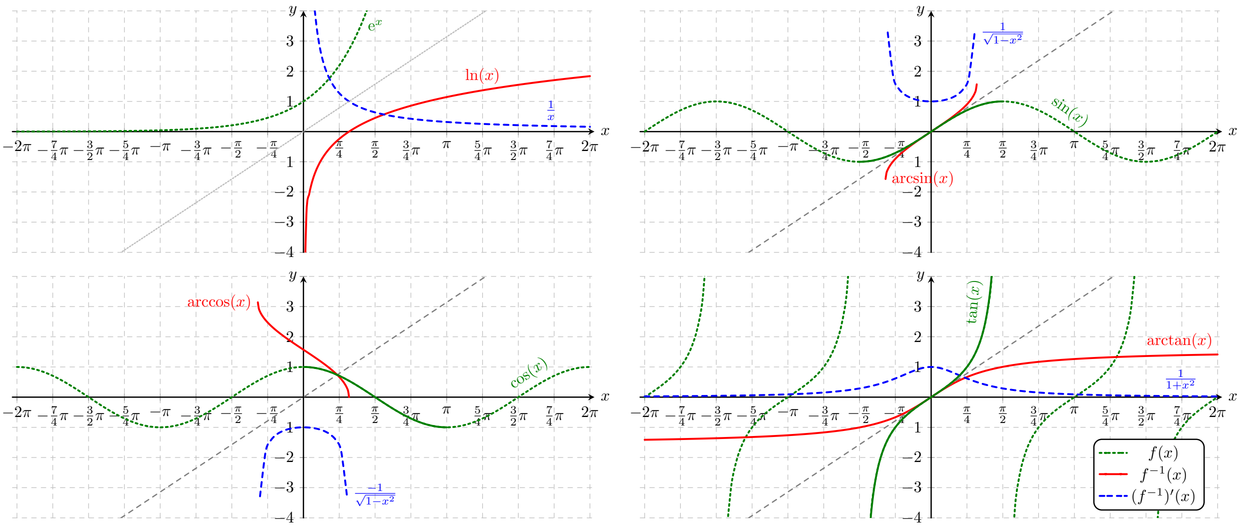


Abbildung 25: Logarithmus und Arkusfunktionen mit ihren Ableitungen

Der gerade gesehene Logarithmus, als Umkehrfunktion der (reellen) Exponentialfunktion, lässt sich auch als komplexe Funktion auffassen. Beachten Sie nochmals, dass wir auch weiterhin mit log stets den natürlichen Logarithmus bezeichnen. Man definiert nun wie folgt:

Definition 5.43 – Komplexer Logarithmus:

Für eine komplexe Zahl $z = x+\mathrm{i}y$, wobei für $y = 0$ stets $x > 0$ gelte, sei der Logarithmus $\log(z)$ die eindeutig bestimmte komplexe Zahl mit $\exp\big(\log(z)\big) = z$ und $-\frac{\pi}{2} < \mathfrak{Im}(\log(z)) < \frac{\pi}{2}$.

Insbesondere wurden also die Punkte $(x, 0)$ für $x < 0$ ausgeschlossen. Dass diese Definition wohldefiniert ist, muss man sich überlegen. Ebenfalls überlegt man sich, dass der so definierte Logarithmus auf der entlang der negativen reellen Achse geschlitzten Gaußschen Zahlenebene stetig ist. Auf dieses Aufschlitzen kann in der Tat nicht verzichtet werden – es gibt also keine Möglichkeit, einen stetigen Logarithmus für von null verschiedene komplexe Zahlen zu definieren.

Der komplexe Logarithmus hat interessante Eigenschaften, insbesondere bezüglich der Umkehrfunktionen der beiden grundlegenden trigonometrischen Funktionen, die bekanntlich über die Exponentialfunktion definiert sind:

$$\arcsin(x) = -\mathrm{i}\cdot\log\Big(\mathrm{i}x + \sqrt{1-x^2}\Big) \quad \text{und} \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\cdot\log\Big(\mathrm{i}x + \sqrt{1-x^2}\Big)$$

Dabei fällt bei aufmerksamen Beobachten auf, dass folgender Zusammenhang besteht

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x),$$

wodurch sich folgendes Additionstheorem der Arkusfunktionen ergibt:

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Kommen wir zu einer ganz anderen Anwendung, die zunächst verblüffen wird:

Beispiel 5.44: Schauen wir uns einen Term an, den wir später als Funktion interpretieren werden, und leiten diesen ab. Dann gilt nun für $r \neq 0$ und $r^2 \neq x^2$ das Folgende:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)' &= \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}-\frac{x}{2}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}+\frac{r^2}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{1}{2}\frac{r^2-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} \\
&= \sqrt{r^2-x^2}
\end{aligned}
$$

Die Ableitung erinnert nun offenbar an eine Kreisgleichung. Es werden in einem gewissen Bereich demnach Punkte des Kreises abgeschritten. Umgekehrt bedeutet dies, dass die Stammfunktion dieser Kreisgleichung unseren Ausgangsterm darstellt. Wir können also diese Kreisgleichung integrieren und erhalten den Flächeninhalt des beschriebenen Kreisabschnitts.

An der Stelle $x = r$ nimmt die Funktion

$$f(x) := \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$$

den folgenden Wert an:

$$\frac{r^2}{2}\arcsin(1) = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Wenn wir nun den Bereich von 0 bis r auf der x-Achse abschreiten, dann durchläuft die Ableitung unserer Funktion den Viertelkreis. Somit beschreibt die Stammfunktion der Ableitung unserer Funktion gerade den Flächeninhalt des Viertelkreises mit dem Radius r, der natürlich auch wirklich dem berechneten Wert $\frac{1}{4}\pi r^2$ entspricht.

⋆ ⋆ ⋆

Mehr über trigonometrische Funktionen: Hyperbelfunktionen. Im Folgenden sammeln wir weiteres Wissen über trigonometrische Funktionen. Bedenken Sie, dass wir bereits einiges gelernt haben: Wir haben aus der (komplexen) Exponentialfunktion die klassischen Sinus- und Kosinusfunktion definiert. Anschließend, nachdem wir gelernt hatten, wie man differenziert, konnten wir uns die Ableitungen dieser Funktionen anschauen. Und schließlich, nachdem die Umkehrfunktionen klarer wurden, konnten wir auch diese ableiten. In diesem Abschnitt sammeln wir noch weitere Fakten, die hilfreich für das Verständnis sind.

Bemerkung 5.45: Die beiden Funktionen Tangens $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und Kotangens $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sind durch die Gleichung $\tan(x)\cdot\cot(x) = 1$ verknüpft und haben jeweils die Periode π.
Weiterhin gilt:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\cdot\tan(y)} \quad \text{und} \quad \cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}.$$

Die Funktion tan bildet das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf die reelle Achse $\mathbb{R}$ ab. Außerdem gilt der folgende Zusammenhang zur komplexen Logarithmusfunktion:

$$\arctan(x) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\log\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)$$

Für das Inverse, dem Kotangens cot gilt:

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \log\left(\frac{x-\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \log\left(\frac{1-\frac{\mathrm{i}}{x}}{x+\frac{\mathrm{i}}{x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Gerade in der Integrationstheorie trifft man bei Substitutionen auf die so genannten *Hyperbelfunktionen*, denen wir uns jetzt widmen werden.

Definition 5.46 – Hyperbelfunktionen:

Die Hyperbelfunktionen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\
\cosh(x) &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \\
\tanh(x) &= \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} &&= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
\coth(x) &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(x) - \exp(-x)} &&= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}
\end{aligned}$$

Betrachten Sie die Graphen dieser Funktionen in Abbildung 26.

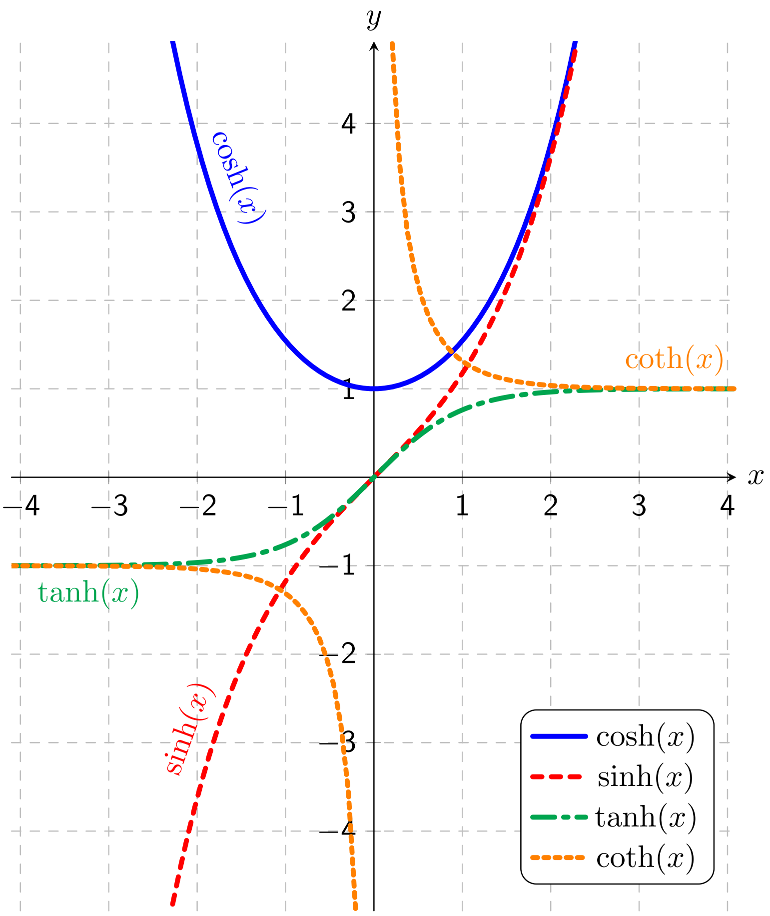


Abbildung 26: Die Graphen von sinh, cosh und tanh

Geometrisch können diese Funktionen zur Parametrisierung der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ verwendet werden, siehe dazu Abbildung 27 – ganz analog zum Sinus und Kosinus am Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

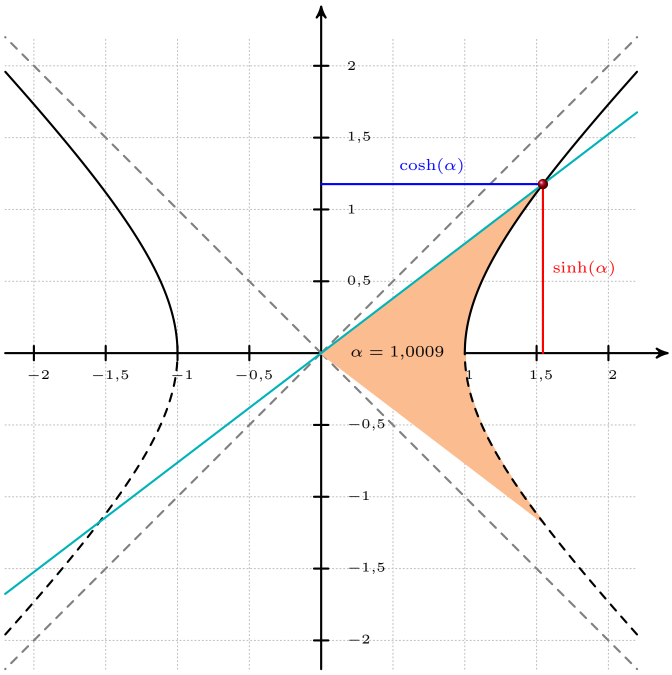


Abbildung 27: Die Funktionen sinh und cosh an der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$

Wir wollen einige nützliche Aussagen über die hyperbolischen Funktionen zusammentragen:

Lemma 5.47 – Hyperbolische Additionstheoreme:

Für die hyperbolischen Funktionen gilt:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\
\sinh(x \pm y) &= \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) \\
\tanh(x \pm y) &= \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)} \\
\coth(x \pm y) &= \frac{1 \pm \coth(x)\coth(y)}{\coth(x) \pm \coth(y)}
\end{aligned}$$

Beweis: Die hyperbolischen Additionstheoreme lassen sich jeweils direkt über die Definition über die Exponentialfunktion beweisen. Beispielhaft für den hyperbolischen Pythagoras:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\exp(2x) + 2\exp(x-x) + \exp(-2x)}{4} - \frac{\exp(2x) - 2\exp(x-x) + \exp(-2x)}{4} \\
&= \frac{4\exp(0)}{4} = 1
\end{aligned}$$

⊠

Lemma 5.48 – Hyperbolische Ableitungen:

Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
\sinh'(x) &= \cosh(x)\\
\cosh'(x) &= \sinh(x)\\
\tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)\\
\coth'(x) &= -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1-\coth^2(x)
\end{aligned}$$

Beweis: Auch die hyperbolischen Ableitungen erhält man schnell durch Einsetzen der Definition. Beispielhaft erhalten wir für sinh:

$$\sinh'(x) = \left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right)' = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \cosh(x)$$

⊠

Lemma 5.49 – Hyperbolische Umkehrfunktionen:

Die Umkehrfunktionen können wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(x) &= \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \\
\operatorname{arcosh}(x) &= \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) && \text{für } x \geq 1\\
\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) && \text{für } |x| < 1\\
\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) && \text{für } |x| > 1
\end{aligned}$$

Beweis: Wir benutzen erneut die Definition der Hyperbolischen Funktionen. Beispielhaft erhalten wir für sinh:

$$\begin{aligned}
&& x &= \frac{\exp(y)-\exp(-y)}{2}\\
\Longrightarrow && \exp(y)-\exp(-y)-2x &= 0 \quad \Big| \text{ Substituiere } z=\exp(y)\\
\Longrightarrow && z-z^{-1}-2x &= 0\\
\Longrightarrow && z^2-1-2\cdot x\cdot z &= 0\\
\Longrightarrow && z &= x \pm \sqrt{1+x^2}\\
\Longrightarrow && \exp(y) &= x \pm \sqrt{1+x^2}\\
\Longrightarrow && y &= \log\left(x \pm \sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

Da $x-\sqrt{1+x^2} < 0$ gilt, kommt nur das Pluszeichen in Frage. Somit ergibt sich als Umkehrfunktion für sinh also

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

⊠

Lemma 5.50 – Ableitungen der hyperbolischen Umkehrfunktionen:

Die Ableitungen dieser Umkehrfunktionen sind:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\operatorname{arcosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\operatorname{artanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{für } |x|<1 \\
\operatorname{arcoth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{für } |x|>1
\end{aligned}$$

Beweis: Mit dem vorangegangenen Lemma 5.49 erhalten wir die Ableitungen sofort, zum Beispiel für arsinh:

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

⊠

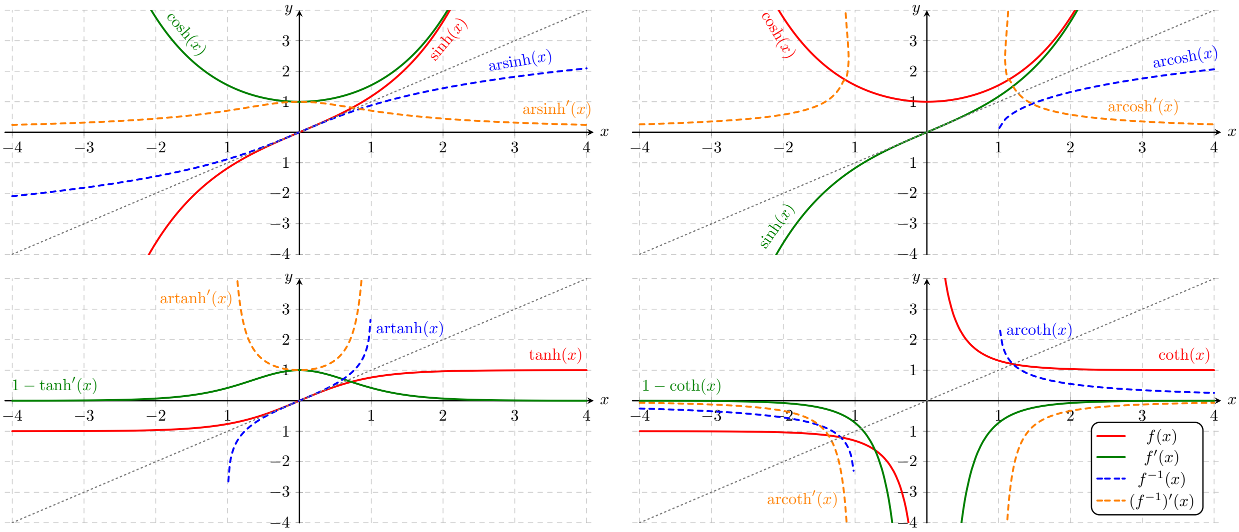


Abbildung 28: Hyperbolische Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen und Ableitungen

⋆ ⋆ ⋆

Taylorpolynome und Taylorreihe. Eine häufig nützliche Möglichkeit zur Approximation von differenzierbaren Funktionen durch einfachere Funktionen, ist die der so genannten Taylorpolynome. Hier wird eine (schwierigere) Funktion in einer Umgebung lokal durch (einfachere) Polynome approximiert.

Definition 5.51 – Taylorpolynom n-ter Ordnung:

Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ mindestens n-mal differenzierbar. Dann definieren wir das Taylorpolynom n-ter Ordnung von f in x_0 durch:

$$T_{f,n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Beispiel 5.52:

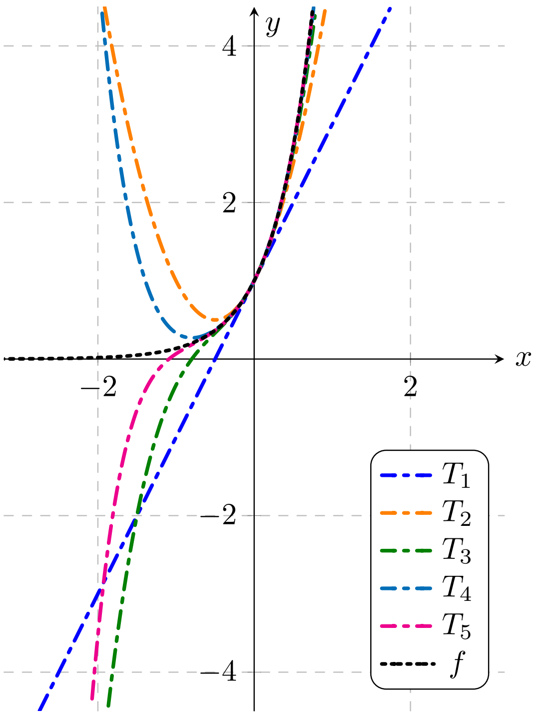


Abbildung 29: Taylorentwicklung von $f(x) = \exp(2x)$ an der Stelle $x_0 = 0$

Wir wollen die Funktion $f(x) = \exp(2x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Polynom approximieren. Wir überlegen uns, dass die k-te Ableitung folgende ist:

$$f^{(k)}(x) = 2^k \cdot \exp(2x)$$

Damit erhalten wir das n-te Taylorpolynom:

$$T_{f,n,0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}x^k$$

Die ersten fünf Taylorpolynome sind in Abbildung 29 dargestellt. Die Approximation durch die Polynome wird bei der Wahl von größerem n immer besser. Jedoch wird die Funktion offenbar nur an der gewählten Stelle $x_0 = 0$ approximiert.

Eine Abschätzung zur Qualität der Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome liefert der folgende Satz:

Satz 5.53:

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es für alle $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ ein $y \in \begin{cases} (x_0, x) & \text{falls } x_0 < x \\ (x, x_0) & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$, sodass gilt:

$$f(x) = T_{f,n-1,x_0}(x) + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Bemerkung 5.54: Der obige Satz besagt also genau unsere Beobachtung aus Beispiel 5.52 - dass für x nahe des Entwicklungspunkts x_0 der Fehler für große n sehr klein wird, da die Fakultät sehr schnell wächst. Je weiter wir uns vom Entwicklungspunkt entfernen, desto kleiner kann der Einfluss der schnell wachsenden Fakultät werden, wie das Beispiel 5.57 zeigt.

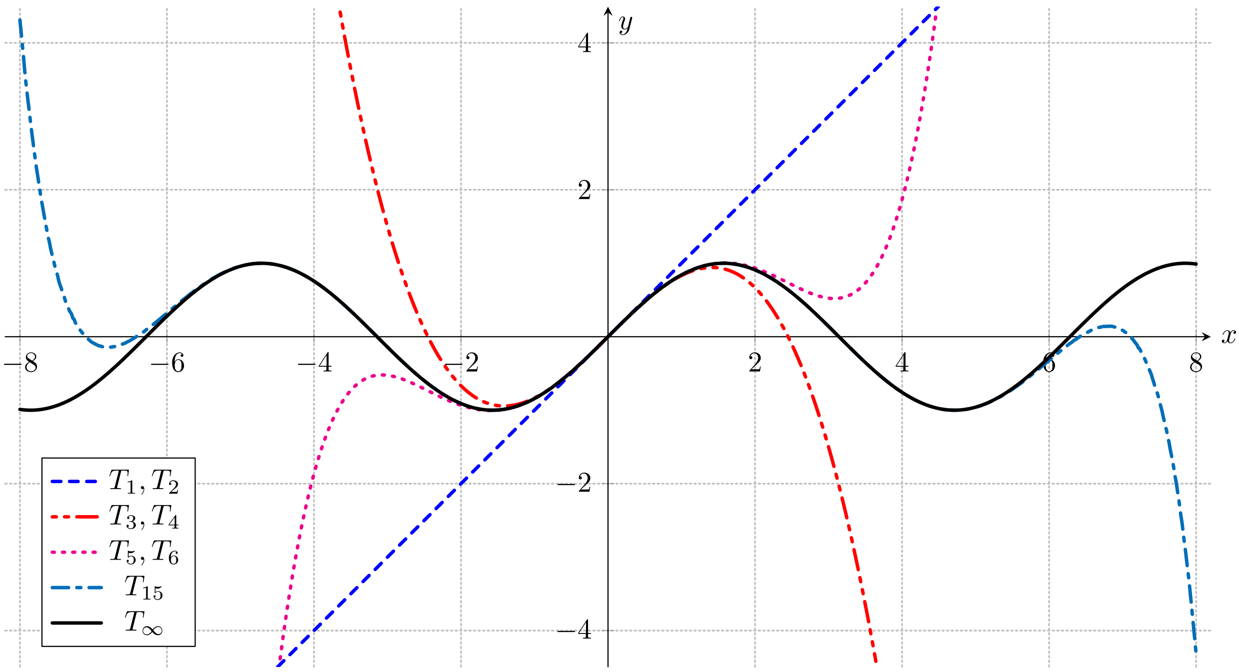


Abbildung 30: Approximation des Sinus durch Taylorpolynome

Für den letzten Satz werden wir an dieser Stelle keinen Beweis liefern. Dieser kann aber leicht in der Standardliteratur zur Analysis nachgelesen werden.

Wird die Abweichung der Taylorpolynome mit wachsendem Entwicklungsgrad gegenüber der Ausgangsfunktion immer kleiner, so ist beim Übergang zur entsprechenden Reihe (als Grenzübergang der Polynome vom Grade n zur Reihe) die Ausgangsfunktion als Potenzreihe dargestellt. Diese Entwicklung einer Funktion nennt man Taylorreihe.

Definition 5.55 – (Vollständiges) Taylorpolynom:

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und sei $x_0 \in (a,b)$. Dann definieren wir die Taylorreihe von f in x_0 durch

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Offenbar sind Taylorreihen spezielle Potenzreihen, aber auch umgekehrt gibt es, für den Bereich der Konvergenz, eine Gemeinsamkeit: Potenzreihen sind in ihrer Darstellung ihre eigenen Taylorreihen:

Satz 5.56:

Wenn die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut für $|z| < R$ konvergiert, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Taylorreihe von f um den Punkt $x_0 = 0$, das heißt, es gilt:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Beweis:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k} = k! \cdot a_k + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

Damit ist $f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$ und $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. ☒

Der Zusammenhang in Satz 5.56 kann auch algebraisch gedeutet werden. Wir wissen bereits, dass zwei Polynome genau dann (als Funktionen in ihren Funktionswerten) gleich sind, wenn sie die gleichen Koeffizienten besitzen – deswegen reicht es auch, einen Koeffizientenvergleich durchzuführen. Algebraisch steckt dahinter, dass im Vektorraum der Polynome bis zu einem hinreichend großen Grad die entsprechenden Monome eine Basis bilden und so die Koeffizienten in einem Polynom nichts anderes als der entsprechende Koordinatenvektor bezüglich der Monombasis ist. Eine solche Basisdarstellung ist bekanntermaßen eindeutig. Betrachten wir nun den Vektorraum aller Polynome mit der Basis aller Monome, dann haben wir hier ebenfalls eine Basis vorliegen und der oben genannte Satz drückt gerade die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit aus.

Beispiel 5.57: Vorsicht! Nicht jede Funktion wird lokal durch ihre Taylorreihe beschrieben. Beispielsweise ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

(vgl. Abb. 31) zwar überall beliebig oft differenzierbar, aber ihre Taylorreihe im Punkt $x_0 = 0$ ist einfach nur konst_0. (Warum?)

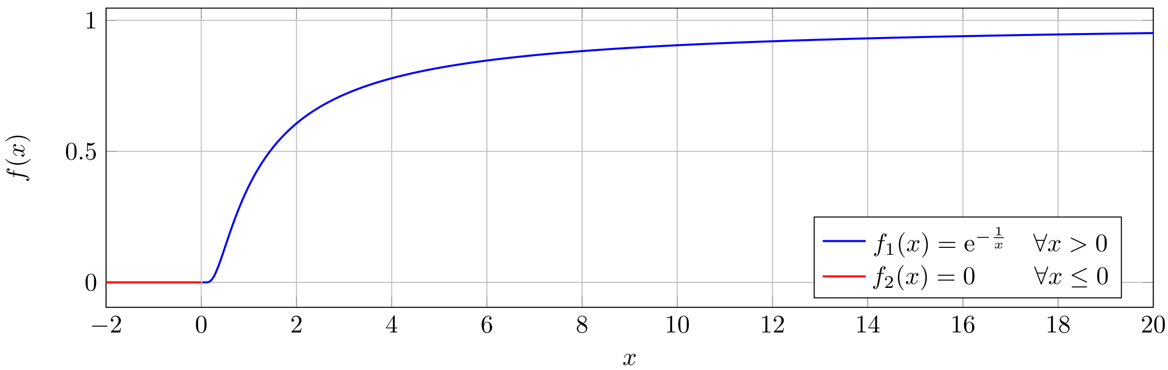


Abbildung 31: Funktionsplot der zuvor genannten Funktion

Sie sehen also, auch wenn die Taylorreihe existiert, muss Sie im Allgemeinen die Ausgangsfunktion (außerhalb des Entwicklungspunktes) nicht gut approximieren. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass die Reihe in ihren (Funktions-)Werten gleich der Ausgangsfunktionen ist, wird durch die Betrachtung des *Restgliedes* deutlich, welches indirekt schon seinen Auftritt in Satz 5.53 hatte:

Satz 5.58:

Konvergiert das Restglied $R(x) = \frac{f^{(n)}(y)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ (für ein geeignet gewähltes y) gegen Null, so konvergiert auch die Taylorreihe gegen die Ausgangsfunktion.

Übrigens, in der Mathematik nennt man Funktionen, die überall lokal durch ihre Taylorreihe beschrieben werden können, *analytisch*.

Beispiel 5.59: Die Funktion $f(x) = \exp(2x)$, deren Taylorapproximation wir bereits in Beispiel 5.52 betrachtet haben, ist eine analytische Funktion. Sei y geeignet gewählt, sodass $R(x) = \frac{2^n \exp(2y)}{n!} \cdot x^n$ das Restglied beschreibt. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \exp(2y)}{n!} \cdot x^n = \lim_{n\to\infty} \exp(2y) \frac{(2x)^n}{n!} = \exp(2y) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \exp(2y) \cdot 0 = 0$$

Dass diese Funktion analytisch sein muss, war uns aber schon vorher klar, denn wir kennen die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion: $\exp(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$.

Satz 5.60:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar.

(a) Die Taylorreihe von f ist im Allgemeinen nicht konvergent.

(b) Ist die Taylorreihe konvergent, so konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.

(c) Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, so nennt man f (reell-)analytisch.

⋆ ⋆ ⋆

Funktionenfolgen. Wir werden nun unsere Folgen von Zahlen auf Funktionen erweitern. Hierzu motivieren uns auch die Taylorpolynome im Vergleich zur Taylorreihe. Dazu starten wir mit einem ersten und naheliegenden Konvergenzbegriff, den wir später geeignet erweitern werden.

Definition 5.61 – Punktweiser Limes:

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n \colon A \to \mathbb{C}$. Eine Funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ ist der punktweise Limes der Folge (f_n), falls für beliebige $x \in A$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Beispiel 5.62: Offenbar ist die Taylorreihe der Grenzwert der dazugehörigen Taylorpolynome. Es gilt die folgende punktweise Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} T_{f,n,x_0}(x) = T_{f,x_0}(x).$$

Wegen der Eindeutigkeit des Limes von Punktfolgen, ist der punktweise Limes einer Folge von Funktionen auch eindeutig. Ein punktweiser Limes einer Folge stetiger oder sogar differenzierbarer Funktionen ist im Allgemeinen nicht stetig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.63: Setze $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. Dann ist der punktweise Limes der Folge (f_n) die folgende Funktion :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

Diese ist nicht stetig.

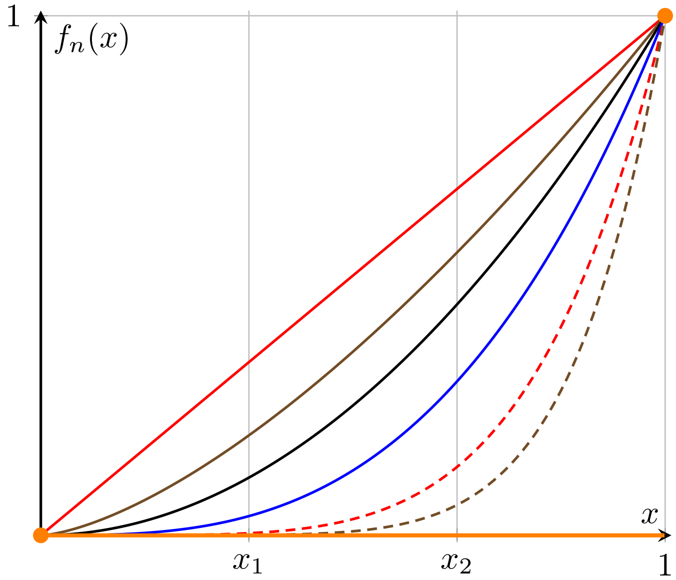


Abbildung 32: Die Funktion $f(x)$ mit verschiedenen n

Somit ist der Begriff der punktweisen Konvergenz von Funktionenfolgen zwar sehr einfach, aber eben auch nicht sehr stark: Eine natürliche Eigenschaft wie Stetigkeit überträgt sich nicht automatisch.

Aus diesem Grunde betrachten wir einen stärkeren Konvergenzbegriff:

Definition 5.64 – Gleichmäßige Konvergenz:

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon A \to \mathbb{C}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m > N$ und $x \in A$ gilt:

$$\left| f(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass die ε, N-Abschätzung „gleichmäßig“ für alle $x \in A$ gilt.

Bei gleichmäßiger Konvergenz liegt der Graph von f_n also im ε- Schlauch um den Graph von f:

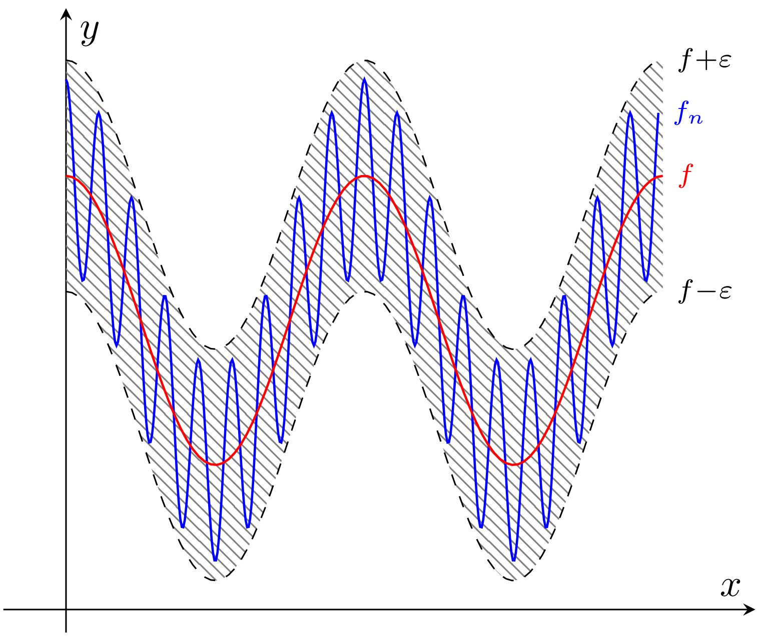


Abbildung 33: Die Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

Offenbar ist ein gleichmäßiger Limes auch ein punktweiser Limes. Bei gleichmäßiger Konvergenz übertragen sich nun allerdings auch verschiedene Eigenschaften der f_n auf den (punktweisen) Limes.

Satz 5.65:

Die Folge (f_n) von stetigen Funktionen $f_n\colon A \to \mathbb{C}$ konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$. Dann ist f stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in A$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass für $x \in A$ und $m \geq N$ gilt:

$$\left|f(x) - f_m(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_n (an der Stelle x_0) stetig ist, wähle ein $\delta > 0$, sodass für $x \in A$ gilt:

$$\text{Wenn } |x - x_0| < \delta, \ \text{ dann } \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für $|x - x_0| < \delta$, $x \in A$ und alle $m \geq N$ wie gewünscht:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - f(x_0)\right| &= \left|f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)\right| \\ &\leq \left|f(x) - f_m(x)\right| + \left|f_m(x) - f_m(x_0)\right| + \left|f_m(x_0) - f(x_0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

⊠

Beispiel 5.66: Die stetige Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die stetige Grenzfunktion $f(x) = 0$, denn für $n \to \infty$ schwankt $\sin(nx)$ für alle x zwischen -1 und 1, $\sqrt{n}$ hingegen geht für jedes x gegen ∞. Die Ableitung $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ divergiert jedoch für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Die gleichmäßige Konvergenz kann mithilfe einer *Norm* erfasst werden:

Definition 5.67 – (Supremums-)Norm:

Für eine Menge A und eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ definiere die (Supremums-)Norm

$$\|f\|_A := \sup\left\{\left|f(x)\right| \;\middle|\; x \in A\right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Die Funktion f heißt beschränkt auf A, wenn $\|f\|_A < \infty$.

Die Supremumsnorm fragt also nach Schranken der (Beträge der) Bilder einer Funktion über dem Definitionsbereich.

Beispiel 5.68: Die Funktionen $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ haben jeweils die Supremumsnorm $\|f\|_{(0,1)} = \|g\|_{\mathbb{R}} = 1$.

Die Supremumsnorm hat viele nützliche Eigenschaften, wie Sie noch sehen werden.

Satz 5.69:

$\|f\|_A$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen auf A, das heißt, sie hat folgende Eigenschaften:

(a) $\|f\|_A \geq 0$;
(b) $\|f\|_A = 0$ genau dann, wenn $f = 0$, das heißt: $f(x) = 0$ für alle $x \in A$;
(c) $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\, \|f\|_A$;
(d) (Dreiecksungleichung) $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.

Beweis: Wir zeigen nur (d).

$$\begin{aligned}\|f+g\|_A &= \sup\left\{\left|f(x)+g(x)\right| \mid x\in A\right\}\\ &\le \sup\left\{\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right| \mid x\in A\right\}\\ &\le \sup\left\{\left|f(x)\right| \mid x\in A\right\}+\sup\left\{\left|g(x)\right| \mid x\in A\right\}\\ &= \|f\|_A+\|g\|_A\end{aligned}$$

⊠

Schließlich lässt sich nun der Konvergenzbegriff leicht mit dieser Norm ausdrücken:

Satz 5.70:

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon A\to\mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f\colon A\to\mathbb{C}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_A=0.$$

Beweis: Angenommen, (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f. Sei $\varepsilon>0$. Wähle $N\in\mathbb{N}$, sodass für $m\ge N$ und $x\in A$ gilt:

$$|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für $m\ge N$ offenbar auch:

$$\|f-f_m\|_A=\sup\left\{\left|f(x)-f_m(x)\right| \mid x\in A\right\}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Umgekehrt gelte:

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_A=0.$$

Sei $\varepsilon>0$. Wähle $N\in\mathbb{N}$, sodass $\|f-f_m\|_A<\varepsilon$ für $m\ge N$.

Dann gilt für $m\ge N$ und $x\in A$ wie gewünscht auch:

$$\left|f(x)-f_m(x)\right|\le\sup\left\{\left|f(x)-f_m(x)\right| \mid x\in A\right\}=\|f-f_m\|_A<\varepsilon.$$

⊠

Und schließlich noch einmal direkter die Verbindung zur Linearen Algebra:

Satz 5.71:

Sei $M\subseteq\mathbb{C}$ und sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon M\to\mathbb{C}$, die bezüglich der Supremums-Norm eine Cauchy-Folge bildet — das bedeutet, dass für alle $\varepsilon>0$ es ein $n_0\in\mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $m,n\ge n_0$ gilt:

$$\|f_n-f_m\|_A<\varepsilon.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f\colon M\to\mathbb{C}$. Das heißt, dass der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf der Menge M zusammen mit der Supremums-Norm vollständig ist.

Beweis: Für $x\in A$ gilt stets die Ungleichung:

$$\left|f_n(x)-f_m(x)\right|\le\|f_n-f_m\|_A\,.$$

Daher ist $\big(f_n(x)\big)_n$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen, die einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ besitzt. Definiere $f\colon M \to \mathbb{C}$ punktweise durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Es genügt zu zeigen, dass $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in M$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_A < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $m, n \geq n_0$ auch die Ungleichung:

$$\big\|f_n(x) - f_m(x)\big\|_A < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $m \geq n_0$ und unter Benutzung eines hinreichend großen n ist dann schließlich:

$$\big\|f(x) - f_m(x)\big\|_A \leq \big\|f(x) - f_n(x)\big\|_A + \big\|f_n(x) - f_m(x)\big\|_A < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxtimes$

6. Integration reeller Funktionen

Das Riemann-Integral: Idee und Definition. Eine Motivation zur Einführung des Integrals kommt von der Berechnung der Fläche, die von der reellen Achse und einer Funktion f eingeschlossen wird. Eine Möglichkeit, diese Fläche zu approximieren, ist die Annäherung dieser Fläche durch *Treppenfunktionen*. Die Umsetzung dieser Idee führt uns zum *Riemann-Integral*.

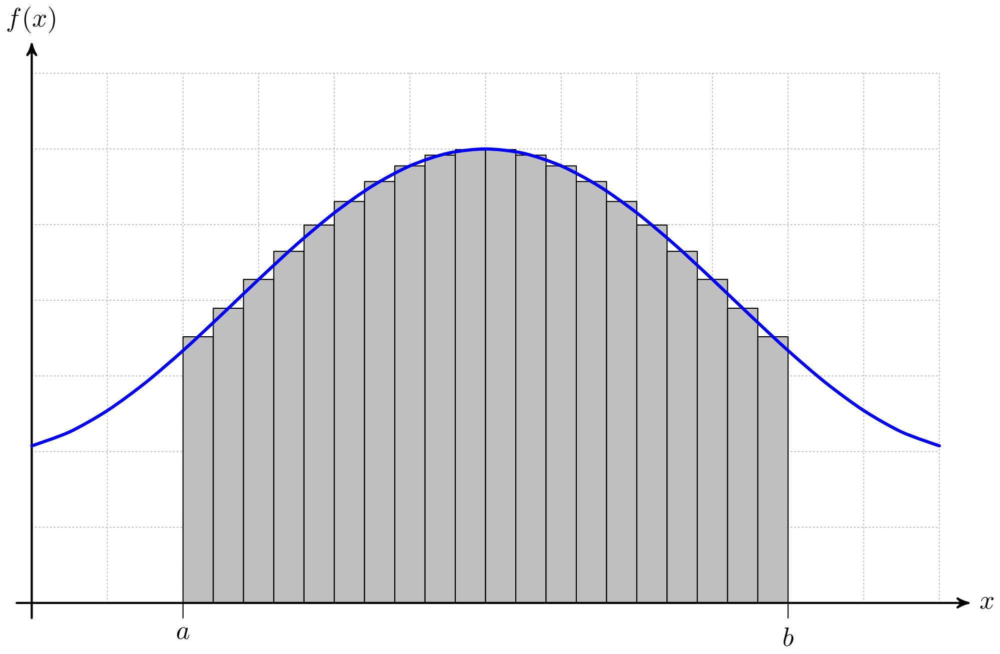


Abbildung 34: Approximation der Fläche durch Treppenfunktionen

Definition 6.1 – Treppenfunktion:

Seien $a < b$ reelle Zahlen. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktionen, falls sie stückweise konstant ist, das heißt, es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, sodass gilt $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in [t_i, t_{i+1})$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Die Menge der Treppenfunktionen auf einem Intervall $[a,b]$ bezeichnen wir mit $T[a,b]$.

Man verifiziert nun leicht:

Lemma 6.2:

Für alle $a < b \in \mathbb{R}$ ist $T[a,b]$ ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Beweis: Klar mit dem Unterraumkriterium aus der Linearen Algebra. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Für die Klasse von Treppenfunktionen lässt sich sofort das Integral definieren — das ist ihr großer Vorteil:

Definition 6.3 – Integral als Treppenfunktion:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ und sei $c_i = f(t_i)$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Dann definieren wir das Integral für Treppenfunktionen:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \sum_{i=0}^{k-1} c_i(t_{i+1} - t_i)$$

Beispiel 6.4: Für die abgebildete Treppenfunktion lässt sich das Integral schnell berechnen:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := 1 \cdot (2-1) + (-2) \cdot (3-2) + 4 \cdot (5-3) = 7.$$

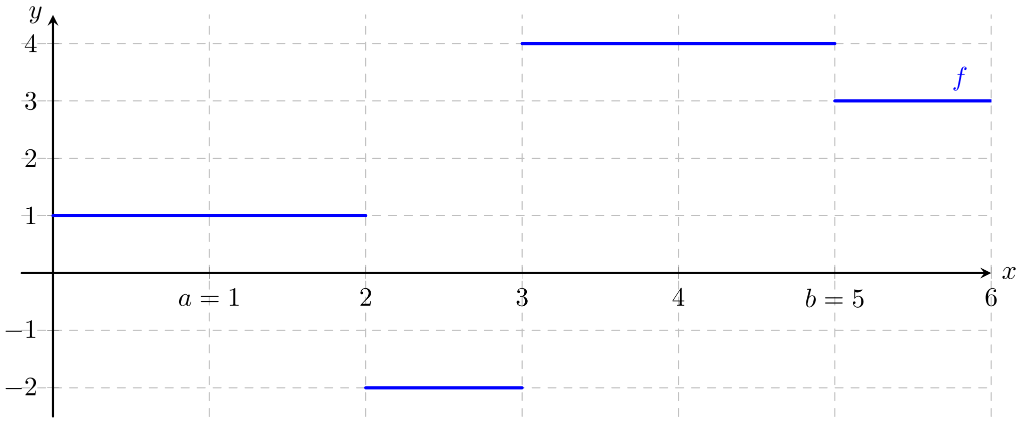


Abbildung 35: Integral einer Treppenfunktion

Dieses (einfache) Integral besitzt bereits die gewünschten Eigenschaften:

Lemma 6.5 – Linearität und Monotonie des Integrals:

Das Integral $\int\colon T[a,b] \to \mathbb{R}$ ist linear und monoton. Das heißt:

(a) Für alle $\varphi, \psi \in T[a,b]$, $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \eta\psi)(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \eta \int_a^b \psi(x)\, \mathrm{d}x.$$

(b) Für $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $\varphi \leq \psi$ (d.h. $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$) gilt:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \psi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beweis: Dies folgt beides aus der Definition, wenn man eine Zerlegung $t_1, \ldots, t_m$ findet, sodass sowohl φ als auch ψ bezüglich dieser Zerlegung Treppenfunktionen sind. Eine solche Zerlegung findet man stets für zwei Treppenfunktionen. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Wir wollen nun das Integral für Treppenfunktion schrittweise auf eine größere Klasse von Funktionen erweitern.

Definition 6.6 – Ober- und Unterintegral:

Für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir das Oberintegral

$$\int_a^{\star b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \geq f\right\}$$

und das Unterintegral

$$\int_{\star a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f\right\}.$$

Nun können wir die Klasse der (Riemann-)integrierbaren Funktionen definieren:

Definition 6.7 – Riemann-Integrierbarkeit:

Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls

$$\int_a^{\star b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ast a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir schreiben dann

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{\ast b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\star a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Den Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ bezeichnen wir mit $R[a,b]$.

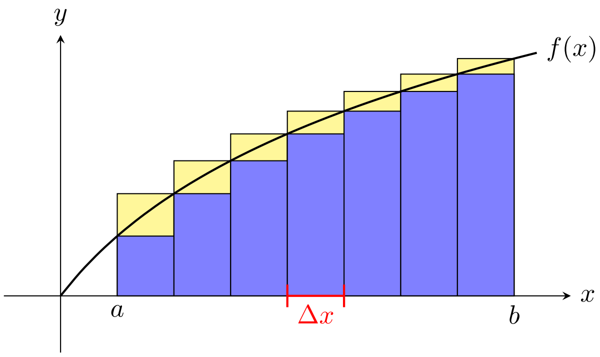


Abbildung 36: Annäherung des Integrals durch Ober- und Untersummen

⋆ ⋆ ⋆

Riemann-integrierbare Funktionen. Nun haben wir einen Begriff der (Flächen-)Messbarkeit definiert. Um zu erkennen, wie sinnvoll dieser ist, untersuchen wir geeignete Eigenschaften. Gibt es beispielsweise überhaupt Riemann-integrierbare Funktionen? Das folgende Lemma beantwortet diese Frage positiv:

Lemma 6.8:

Treppenfunktionen sind Riemann-integrierbar.

Dies folgt leicht aus der Definition. Ferner überlegt man sich (mit der Hilfe von Lemma 6.2) rasch das Folgende:

Lemma 6.9:

Der Raum $R[a, b]$ ist ein ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen der Gestalt $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Außerdem ist der Integraloperator, also $\int\colon R[a, b] \to \mathbb{R}$, linear und monoton.

⋆ ⋆ ⋆

Wir können noch weitere Funktionen als Riemann-integrierbar enttarnen:

Satz 6.10 – Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen:

Jede stetige reelle Funktion auf $[a, b]$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis:
(1) Wir zeigen zunächst, dass das Unterintegral von f eine reelle Zahl ist: Hierfür genügt es wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu zeigen, dass die Menge

$$X_\star = \left\{ \int_a^b T(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; T\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } T \le f \right\}$$

eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

$X_\star$ **ist nicht-leer:** Da f auf $[a, b]$ stetig ist, gibt es Schranken $m, M \in \mathbb{R}$, sodass für $x \in [a, b]$ gilt:

$$m \le f(x) \le M.$$

Dann ist $T_0\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $T_0(x) = m$ eine Treppenfunktion und $T_0 \le f$, wobei

$$\int_a^b T_0\,\mathrm{d}x \;=\; m(b-a) \;\in X_\star.$$

$X_\star$ **ist nach oben beschränkt:** Andererseits gilt für jede Treppenfunktion $T\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $T \le f$ stets die Ungleichung $T(x) \le f(x) \le M$ und

$$\int_a^b T\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

(2) Im zweiten Schritt zeigen wir für die Betrachtung des Oberintegrals von f, dass die Menge

$$X^\star = \left\{ \int_a^b T(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; T\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } f \le T \right\}$$

folgende Eigenschaft erfüllt: Für alle $z_\star \in X_\star$ und alle $z^\star \in X^\star$ gilt stets: $z_\star \le z^\star$.

Sei dazu $T_\star\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $T_\star \le f$ und sei $T^\star\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $f \le T^\star$. Dann ist $T_\star \le T^\star$ und es gilt wie gewünscht:

$$\int_a^b T_\star\,\mathrm{d}x \le \int_a^b T^\star\,\mathrm{d}x.$$

(3) Und schließlich zeigen wir, dass das Ober- und das Unterintegral von f gleich sind und somit f (Riemann-)integrierbar ist:

Sei dafür $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, dass es Treppenfunktionen $T_\star, T^\star \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $T_\star \leq f \leq T^\star$ gibt, sodass

$$\left| \int_a^b T^\star \,\mathrm{d}x - \int_a^b T_\star \,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f wähle ein $\delta > 0$, sodass

$$\text{für } x, y \in [a,b] \text{ mit } |x-y| < \delta \text{ folgt } \left| f(x) - f(y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Wähle eine Zerlegung $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n = b$ des Intervalls $[a,b]$, die hinreichend fein ist, konkret soll jeweils gelten:

$$a_{i+1} - a_i < \delta.$$

Sei $m_i = \min \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [a_i, a_{i+1}] \right\}$ und $M_i = \max \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [a_i, a_{i+1}] \right\}$.

Definiere nun Treppenfunktionen $T_\star, T^\star \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass für $a_i \leq x < a_{i+1}$ gilt:

$$T_\star(x) = m_i, T^\star(x) = M_i, T_\star(b) = m_{n-1} \text{ und } T^\star(b) = M_{n-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b T^\star \,\mathrm{d}x - \int_a^b T_\star \,\mathrm{d}x \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i (a_{i+1} - a_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i (a_{i+1} - a_i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(a_{i+1} - a_i) \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} (a_{i+1} - a_i) \right| \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) \;=\; \varepsilon
\end{aligned}$$

⊠

Es gilt ebenfalls der folgende

Satz 6.11 – Riemann-Integrierbarkeit monotoner Funktionen:

Jede monotone reelle Funktion auf $[a,b]$ ist Riemann-integrierbar.

⋆ ⋆ ⋆

Der Vollständigkeit halber führen wir für spätere Belange den folgenden Begriff ein:

Definition 6.12 – Vertauschungseigenschaften der Integralgrenzen:

Sei $a < b$ und $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Wir definieren:

$$\int_b^a f(t) \,\mathrm{d}t := - \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t.$$

⋆ ⋆ ⋆

Limes und Integral. Soll ein Integral einer Funktion berechnet werden, die selbst ein Grenzwert von integrierbaren Funktionen ist, müssen wir genau hinschauen. Limes und Integration können unter bestimmten Voraussetzungen vertauscht werden, aber eben nicht immer!

Beispiel 6.13: Für Funktionenfolgen sind Limesbildung und Integration im Allgemeinen nicht vertauschbar, wie das folgende Beispiel zeigt: $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n > 0$ sei die Folge von Treppenfunktionen, welche gegeben ist durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(siehe Abbildung 37).

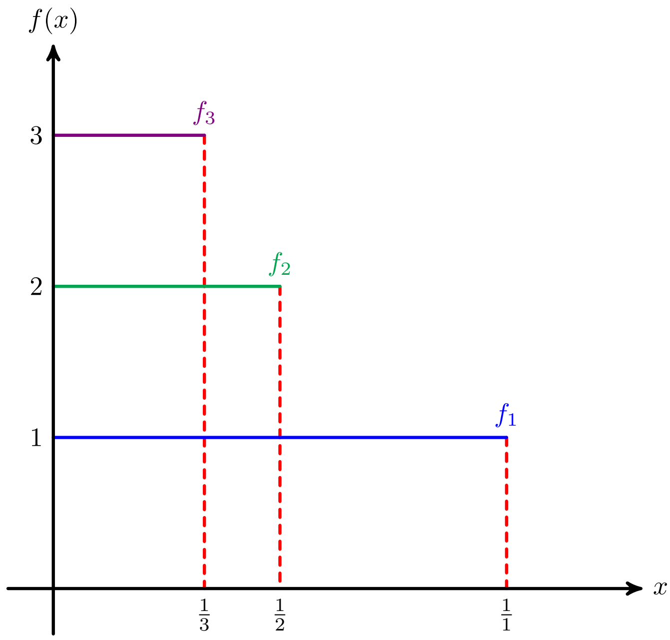


Abbildung 37: Konvergenz einer Funktionenfolge

Diese Folge konvergiert zwar punktweise gegen die konstante Nullfunktion; es gilt also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Aber das Vertauschen von Grenzwertbildung und Integral ist nicht möglich:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n \, \mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 0 \, \mathrm{d}x \right) &&= \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1}{n} - 0 \right) + 0 \\
&= 1 &&\neq 0 \\
&= \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x &&= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Da punktweise Konvergenz bei Funktionenfolgen nicht ausreicht, um Grenzwert- und Limesbildung zu vertauschen, hilft uns auch hier der stärkere Begriff der gleichmäßigen Konvergenz:

Satz 6.14:

Sei $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist auch f integrierbar und es gilt stets:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

Beispiel 6.15: Für die Funktionenfolge aus Beispiel 5.66 gilt für beliebige $a < b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\, \mathrm{d}x = \int_a^b 0\, \mathrm{d}x = 0.$$

Würden wir diesen Satz nicht anwenden, müssten wir uns auf mehr Arbeit einstellen und die Stammfunktion $\int \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\, \mathrm{d}x = -\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n^3}}$ bestimmen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

⋆ ⋆ ⋆

Hauptsatz der Integralrechnung und Integrationsmethoden. Wir wenden uns nun dem Zusammenhang von Integration und Differentiation zu.

Satz 6.16 – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 1:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und in $x^\star \in [a,b]$ stetig. Sei $x_0 \in [a,b]$ und sei $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

definierte Funktion. Dann ist F in $x^\star$ differenzierbar und $F'(x^\star) = f(x^\star)$. Falls f auf ganz $[a,b]$ stetig ist, so ist F auf $[a,b]$ differenzierbar.

Beweis: Wir betrachten für $x \in [a,b] \setminus \{x^\star\}$ den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x) - F(x^\star)}{x - x^\star} = \frac{1}{x - x^\star}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x^\star} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x - x^\star}\int_{x^\star}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $t \in B_\delta(x^\star)$ gilt:

$$f(x^\star) - \varepsilon \ \le\ f(t)\ \le\ f(x^\star) + \varepsilon.$$

Betrachte $f(x^\star)$ als konstante Funktion. Damit ergibt sich für alle $x \in [x^\star, x^\star + \delta]$ wegen der Monotonie des Integrals:

$$(x - x^\star)\left(f(x^\star) - \varepsilon\right) \le \int_{x^\star}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \le (x - x^\star)\left(f(x^\star) + \varepsilon\right).$$

Analog gilt für $x \in [x^\star - \delta, x^\star]$:

$$(x^\star - x)\left(f(x^\star) - \varepsilon\right) \le \int_{x^\star}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \le (x^\star - x)\left(f(x^\star) + \varepsilon\right).$$

Daher ergibt sich für alle $x \in B_\delta(x^\star) \cap [a,b] \setminus \{x^\star\}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{F(x) - F(x^\star)}{x - x^\star} - f(x^\star)\right| = \left|\frac{1}{x - x^\star}\int_{x^\star}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - f(x^\star)\right| \le \varepsilon$$

und damit auch wie gewünscht für den Differenzenquotienten

$$\lim_{x\to x^\star} \frac{F(x) - F(x^\star)}{x - x^\star} = f(x^\star).$$

⊠

Der letzte Satz motiviert folgende Definition:

Definition 6.17 – Stammfunktion:

Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $F, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ wobei f stetig und F differenzierbar seien. Die Funktion F heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$. Eine allgemeine, nicht bestimmte Stammfunktion wird mit dem Symbol $\int f$ bezeichnet.

Beispiel 6.18: Folgende Stammfunktionen können wir mit unserem Wissen aus Kapitel 5 schnell berechnen, wobei wir hier auf die Addition der Konstanten verzichten:

(a) $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)$ und $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)$
(b) $\int ax^2 + bx + c\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$
(c) $\int \exp(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\exp(kx)$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dank des letzten Satzes wissen wir, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Eine Stammfunktion ist allerdings nicht eindeutig. Sie ist nur eindeutig bis auf die Addition eines Skalars!

Achtung!

Ist F eine Stammfunktion für f, so ist $F + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f.

Schließlich bekommen wir noch die folgende weitere Version des Hauptsatzes:

Satz 6.19 – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 2:

Sei f auf $[a,b]$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis: Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. Dann ist G differenzierbar und $G' = f = F'$. Damit ist $(G-F)' = G' - F' = 0$ und somit ist $G - F$ konstant, sodass gilt:

$$(G-F)(b) = (G-F)(a)\,.$$

Wegen $G(a) = 0$, ist $G(b) = F(b) - F(a)$. ⊠

⋆ ⋆ ⋆

Wesentlich ist ebenfalls der folgende Satz:

Satz 6.20 – Mittelwertsatz der Integralrechnung:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\zeta \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(\zeta)(b-a).$$

Beweis: Sei m das Minimum sowie M das Maximum von f auf $[a,b]$.

Dann ist $m \le f(x) \le M$ für $x \in [a,b]$ und es ist

$$m(b-a) = \int_a^b m\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f\,\mathrm{d}x \le \int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a).$$

Also gibt es ein w mit $m \leq w \leq M$, sodass

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = w(b-a).$$

Nach dem Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f gibt es ein $\zeta \in [a,b]$ mit $f(\zeta) = w$. Dann ist

$$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta)(b-a).$$

☒

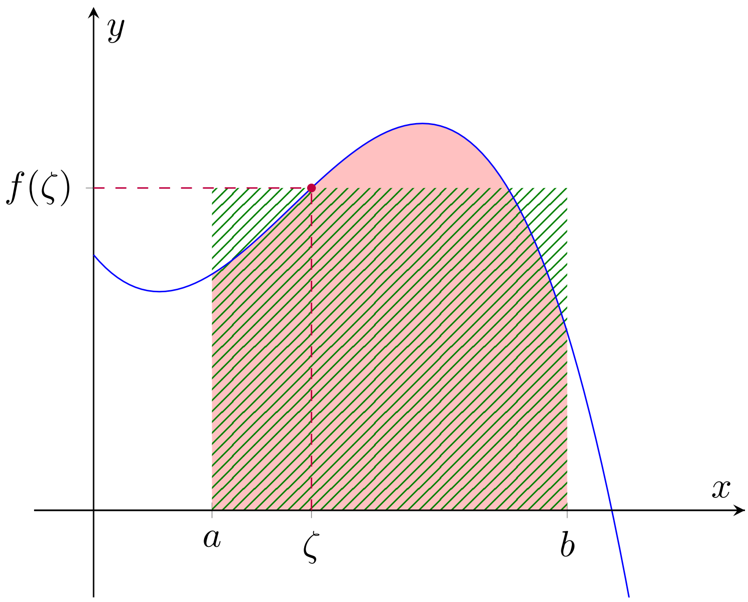


Abbildung 38: Geometrische Anschauung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

⋆ ⋆ ⋆

Kommen wir zu den hilfreichen Integrationsmethoden.

Lemma 6.21 – Integration durch Substitution:

Sei g auf $[a,b]$ differenzierbar und f auf $[a,b]$ stetig. Dann gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion für f. Dann haben wir mit der Kettenregel:

$$(F \circ g)'\,(x) = (f \circ g)\,(x) \cdot g'\,(x)\,.$$

Mit eingesetzten Grenzen ergibt sich sofort die Behauptung. (Klar?) ☒

Beispiel 6.22: Das Verschieben der Integralgrenzen darf beim Integrieren mittels Substitution nicht vernachlässigt werden. So ergeben sich zum Beispiel folgende einfache Substitutionen:

$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ für } c \neq 0.$$

Beispiel 6.23: Wir wollen das folgende Integral lösen (und formal mathematisch sauber vorgehen!):

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren und setzen an $x = \sin(t)$.

Sei also in der Terminologie des Satzes $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sowie $g\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ mit $g(t) = \sin(t)$. Dann gilt:

$$\int_{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(t)\;\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\;\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t &&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t &&= \frac{t}{2} + \left.\frac{\sin(2t)}{4}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

Hierbei sind die folgenden Additionstheoreme hilfreich:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \qquad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t), \qquad \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t).$$

(Diese erleichtern uns hier die Arbeit. Man kann aber auch auf ihren Einsatz verzichten und beispielsweise $\int \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ direkt durch partielle Integration erhalten. Wie das geht lernen wir noch in Beispiel 6.31.)

Haben Sie es bemerkt – wir haben damit noch einmal nachgerechnet, dass der halbe Einheitskreis (oberhalb der x-Achse) den Flächeninhalt $\frac{\pi}{2}$ besitzt.

Beispiel 6.24: Wir wollen das folgende Integral lösen (formal unsauber, wie es einem aber im Alltag häufiger begegnet):

$$\int x\cos\left(x^2+42\right)\,\mathrm{d}x$$

Die Argumente in der Kosinusfunktion wirken störend, außerdem kann man in dem Integral bereits die Kettenregel erkennen, also versuchen wir eine Substitution mit $t = x^2 + 42$.

Nun gehen wir mathematisch unsauber vor und tun so, als wäre das Differential ein Bruch (machen Sie sich an Lemma 6.21 klar, warum das hier zu einer korrekten Lösung führt!):

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$$

Einsetzen liefert

$$\int x\cos(t)\frac{\mathrm{d}t}{2x} = \frac{1}{2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(t)}{2}.$$

Rücksubstituieren ergibt

$$\int x\cos\left(x^2+42\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\left(x^2+42\right)}{2}.$$

Beispiel 6.25: Anwenden einer (trigonometrischen) Substitution ist leider nicht immer zielführend. Wir betrachten das folgende Integral:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Wir erinnern und wieder an den trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

was eine Substitution von $x = \sin(t)$ nahelegt, denn dadurch haben wir im Nenner keine Differenz mehr. Nun gehen wir wieder formal unsauber vor:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sin'(t) = \cos(t) \implies \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Setzen wir dies in unser ursprüngliches Integral ein erhalten wir:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

Nun haben wir aber ein Integral, dessen Lösung wir nicht sofort bestimmen können (und die auch tatsächlich überhaupt nicht trivial ist!). Wir könnten versuchen, den Bruch geschickt zu erweitern und erneut zu substituieren, aber dies muss nicht erfolgreich sein; möglicherweise verschlimmern wir unsere Ausgangssituation sogar.

Substitution scheint hier nicht der Ansatz zu sein, der uns zur Lösung bringt. Hier ist ein anderes Verfahren gefragt: Die *Partialbruchzerlegung*, die wir am Ende dieses Kapitels noch kennenlernen werden. (Oder Sie erinnern sich an das Kapitel über Hyperbelfunktionen, genauer an deren Umkehrfunktionen und wissen direkt, dass $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Tatsächlich gibt es einige „Standardintegrale”, die einem beim Versuch der Integration so häufig begegnen, dass sich ein Überblick lohnt.)

⋆ ⋆ ⋆

Das Herausfordernde an der Integration sind nicht die mathematischen Verfahren an sich, sondern die Kunst, die richtigen Verfahren auszuwählen, um näher an das Ziel zu kommen. Wir lernen ein weiteres kennen:

Satz 6.26 – Partielle Integration:

Seien f, g differenzierbare Funktionen und sei $\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion von $f'g$. Dann ist

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Stammfunktion von fg'.

Beweis: Nach der Summen- und Produktregel der Differentiation gilt sofort:

$$\begin{aligned}\left(f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) - f'(x)\,g(x)\\ &= f(x)\,g'(x)\,.\end{aligned}$$

⊠

Bemerkung 6.27: Der Einfachheit halber haben wir den Beweis ohne Grenzen geführt. Will man mit dieser Methode tatsächlich integrieren, so muss man natürlich auf die Definitionsgebiete der Funktionen f und g achten!

Beispiel 6.28: Mit der Methode der partiellen Integration für $f = \log$ und $g' = 1$ folgt nun leicht die Bestimmung einer Stammfunktion des Logarithmus wie folgt:

$$\begin{aligned} \int \log(x)\,\mathrm{d}x &= \int \log(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x &&= x\log(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - \int 1\,\mathrm{d}x &&= x\log(x) - x \end{aligned}$$

Beispiel 6.29: Wir bestimmen eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sqrt{x}\log(x)$.

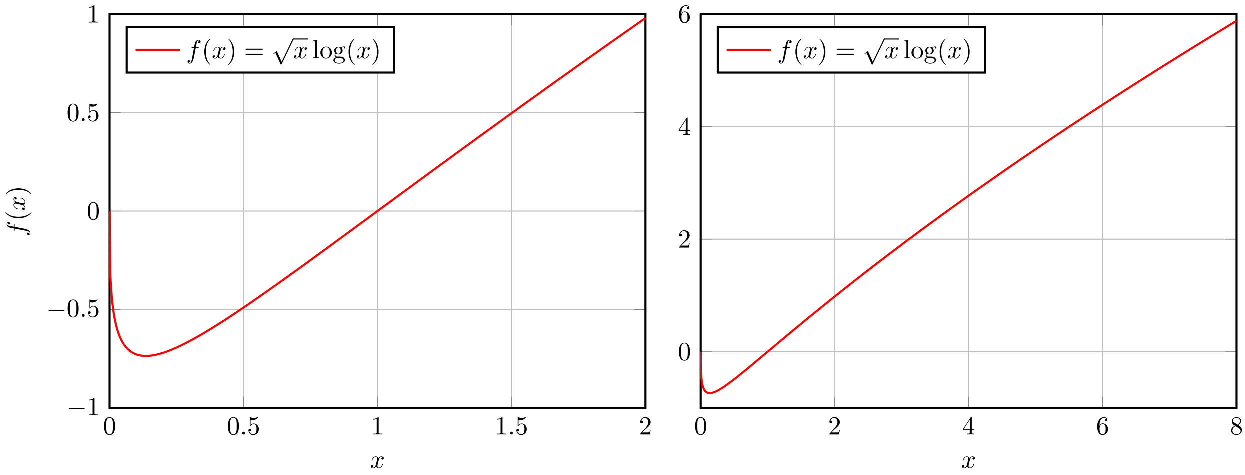


Abbildung 39: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}\log(x)$

Sei dazu $u(x) = \log(x)$ und dementsprechend $v'(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $u'(x) = \frac{1}{x}$. Eine Stammfunktion für v' kennen wir auch; es gilt: $v(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Damit erhalten wir schließlich mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x}\log(x)\,\mathrm{d}x &= \log(x) \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \log(x) - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \cdot \left(\log(x) - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Beispiel 6.30: Wir suchen eine Stammfunktion von $f(x) = \mathrm{e}^x\sin(x)$ und versuchen uns an partieller Integration:

$$\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \cos(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Das sieht auf den ersten Blick nicht zielführend aus. Doch wenn wir erneut partiell integrieren erhalten wir

$$\int \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \int \cos(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) - \int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun sind wir wieder bei unserer Ausgangslage angekommen. Was zunächst wie ein Kreisschluss wirken mag, ist tatsächlich genau was wir wollen, denn bringen wir das Integral auf die andere Seite erhalten wir

$$2\int \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin(x) - \mathrm{e}^x\cos(x) \implies \int \mathrm{e}^x\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}.$$

Beispiel 6.31: Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(x) = \sin^2(x)$ mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
& \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &=& -\sin(x)\cos(x) - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
& &=& -\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
& &=& -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x + \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \quad & 2\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &=& -\sin(x)\cos(x) + x \\
\Longrightarrow \quad & \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x &=& \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2}
\end{aligned}$$

⋆ ⋆ ⋆

Partialbruchzerlegung. Integrale rationaler Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q kann man mithilfe von *Bruchrechnung für Polynome* erhalten. Die so genannte *Polynomdivision* ergibt stets eine Zerlegung:

$$\frac{p\,(x)}{q\,(x)} = a\,(x) + \frac{r\,(x)}{q\,(x)}$$

wobei $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(q) = n$.

Um das Prinzip der Partialbruchzerlegung nutzen zu können, nehmen wir nun an, dass das Polynom $q\,(x)$ über $\mathbb{R}$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfalle – es gelte also:

$$q\,(x) = c(x - a_1)\ldots.(x - a_n) \text{ mit } c \neq 0 \text{ und paarweise verschiedene } a_i.$$

Die Polynome

$$\frac{q\,(x)}{x - a_1}\,,\ \ldots\ ,\ \frac{q\,(x)}{x - a_n}$$

sind im n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grade jeweils echt kleiner n und linear unabhängig. Sie bilden daher eine Basis.

Das Polynom r lässt sich als Linearkombination dieser Basis schreiben, das heißt, es gibt $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$r\,(x) = A_1 \frac{q\,(x)}{x - a_1} + A_2 \frac{q\,(x)}{x - a_2} + \ldots + A_n \frac{q\,(x)}{x - a_n}$$

und damit auch:

$$\frac{r\,(x)}{q\,(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Damit gilt für $x \neq a_1, \ldots, a_n$ hilfreicherweise:

$$\begin{aligned}
\int \frac{p\,(x)}{q\,(x)}\,\mathrm{d}x &= \int a\,(x)\ \mathrm{d}x + \int \frac{r\,(x)}{q\,(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int a\,(x)\ \mathrm{d}x + \int \frac{A_1}{x - a_1}\,\mathrm{d}x + \ldots + \int \frac{A_n}{x - a_n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int a\,(x)\ \mathrm{d}x + A_1 \log|x - a_1| + \ldots + A_n \log|x - a_n|.
\end{aligned}$$

Dies löst in vielen Beispielen komplizierte Integrale rationaler Funktionen.

Beispiel 6.32: Wir berechnen die Stammfunktion $\int \frac{5}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Methode der Partialbruchzerlegung wie folgt: Es gilt $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$. Damit haben wir den Ansatz:

$$\frac{5}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

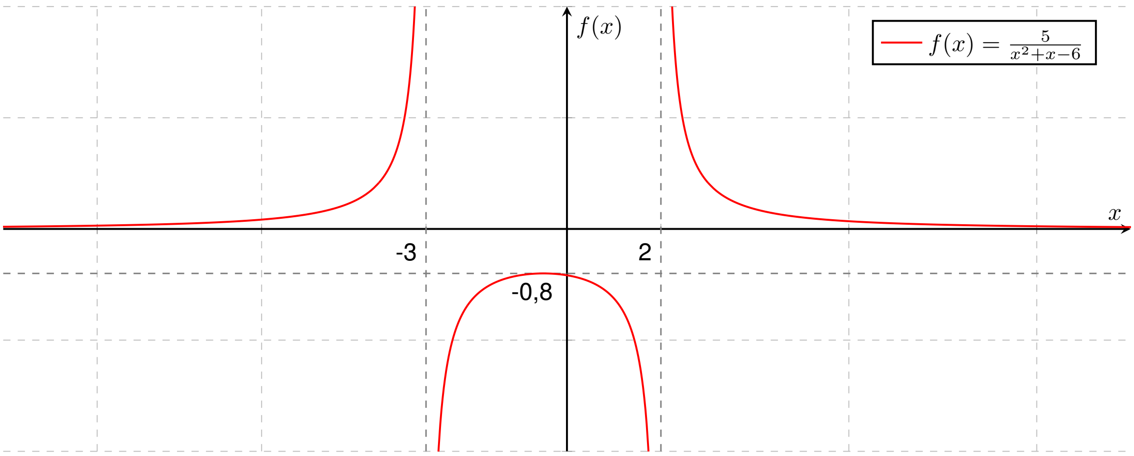


Abbildung 40: $f(x)=\frac{5}{x^2+x-6}$

Nun gilt es A und B zu bestimmen. Dazu multiplizieren wir aus und erhalten:

$$5=A(x+3)+B(x-2),$$

Diese Gleichung muss für **alle** Argumente x gelten, sodass wir insbesondere auch die Nullstellen der Linearfaktoren einsetzen können (also $x=2$ und $x=-3$).
(Alternativ führt man einen *Koeffizientenvergleich* durch. Aus $5=A(x+3)+B(x-2)$ folgt $0\cdot x+5=(A+B)\cdot x+3A-2B$. Das Gleichsetzen der Koeffizienten auf beiden Seiten bringt uns zum linearen Gleichungssystem $A+B=0$ und $3A-2B=5$.)

Dann erhalten wir $A=1$ und $B=-1$. Somit folgt wie gewünscht die Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x+\int \frac{-1}{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \log|x-2|-\log|x+3|\ (+\text{Konstante})\\ &= \log\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\ (+\text{Konstante})\end{aligned}$$

Beispiel 6.33: Wir berechnen das folgende Integral:

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x.$$

Das Polynom x^3-x hat die Nullstellen $-1,0,+1$, sodass gilt

$$x^3-x=(x+1)\,x\,(x-1)\,.$$

Damit erhalten wir die folgende Darstellung mittels einer Linearkombination:

$$1=\frac{1}{2}x\,(x-1)-1\,(x+1)\,(x-1)+\frac{1}{2}\,(x+1)\,x$$

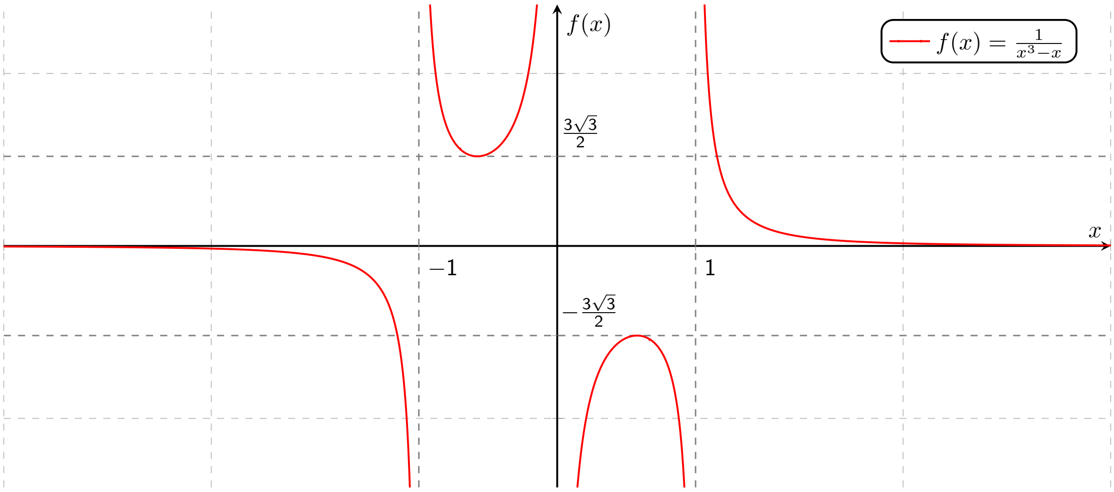


Abbildung 41: $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$

Nach Division durch $x^3 - x$ folgt daher:

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - 1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Und so bekommen wir die gewünschte Lösung:

$$\int \frac{1}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \log|x+1| - \log|x| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2} \right|$$

⋆ ⋆ ⋆

Bemerkung 6.34: Liegt eine (reelle) Nullstelle a_n des Nennerpolynoms $q(x)$ mehrfach vor, so wird im angegeben Ansatz nicht nur der eine Summand $\frac{A_n}{x-a_n}$ genutzt, sondern allein für diese eine m-fache Nullstelle die Teilsumme:

$$\frac{A_{n,1}}{x - a_n}, \quad \frac{A_{n,2}}{(x - a_n)^2}, \quad \ldots \quad , \quad \frac{A_{n,m}}{(x - a_n)^m}$$

Beispiel 6.35: Hier soll das die Stammfunktion von $\frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2}$ bestimmt werden. Offensichtlich liegt eine einfache Nullstelle bei $x = -1/3$ und eine doppelte bei $x = 5$ vor. Damit wird folgende Partialbruchzerlegung gefunden:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2} &= \frac{A}{3x+1} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} \\ \Longrightarrow \quad x+1 &= A(x-5)^2 + B(3x+1)(x-5) + C(3x+1) \\ &= A\left(x^2 - 10x + 25\right) + B\left(3x^2 - 14x - 5\right) + C(3x+1) \end{aligned}$$

$$x + 1 = x^2(A + 3B) + x(-10A - 14B + 3C) + 25A - 5B - C$$

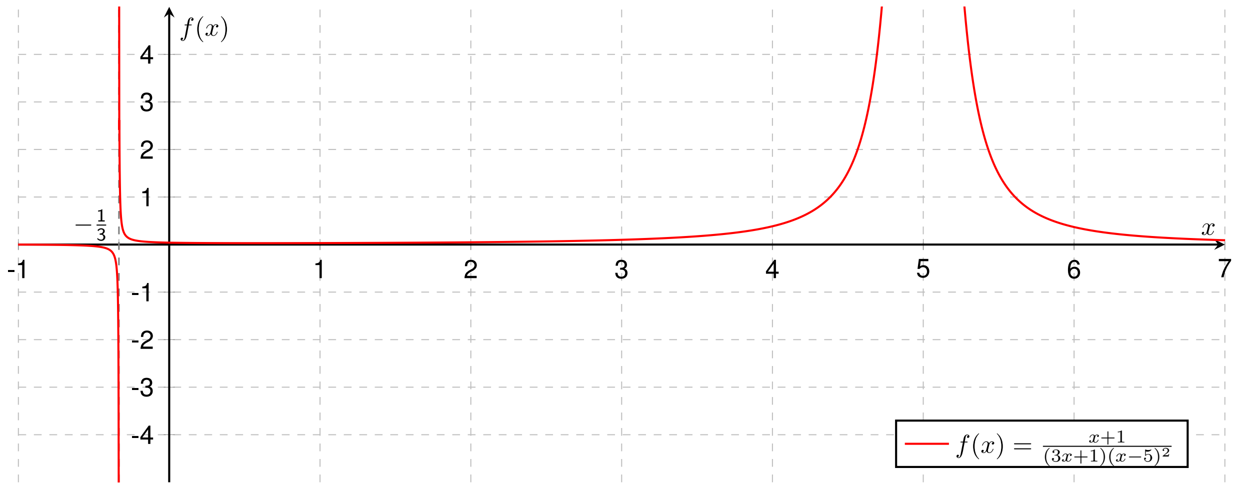


Abbildung 42: $f(x) = \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2}$

$$\begin{array}{rclclcrcl}
0 & = & A + 3B & & & \longrightarrow & A & = & -3B \\
0 & = & -10A - 14B + 3C - 1 & = & 16B + 3C - 1 & \longrightarrow & C & = & 1/3 - 16/3 B \\
0 & = & 25A - 5B - C - 1 & = & -256/3 B - 2/3 & \longrightarrow & B & = & -1/128
\end{array}$$

Daraus folgt, dass $A = 3/128$, $B = -1/128$ und $C = 3/8$. Somit lässt sich der Bruch schreiben als:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2} &= \frac{3}{128}\frac{1}{3x+1} - \frac{1}{128}\frac{1}{x-5} + \frac{3}{8}\frac{1}{(x-5)^2} \\
\int \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{128}\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{128}\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int \frac{1}{(x-5)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{128}\frac{1}{3}\log|3x+1| - \frac{1}{128}\log|x-5| - \frac{3}{8}\frac{1}{x-5} + C \\
&= \frac{1}{128}\log|3x+1| - \frac{1}{128}\log|x-5| - \frac{3}{8}\frac{1}{x-5} + C
\end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich durch Anwendung der Logarithmus-Gesetzte $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$ und $n\log(a) = \log(a^n)$, folgende Stammfunktion finden:

$$\int \frac{x+1}{(3x+1)(x-5)^2} = \frac{1}{128}\log\left|\frac{3x+1}{x-5}\right| - \frac{3}{8}\frac{1}{x-5} + C$$

Bemerkung 6.36: Liegt eine einfache komplexe, nicht reelle Nullstelle z_n des Nennerpolynoms $q(x)$ vor, so wird im angegeben Ansatz nicht der Summand $\frac{A_n}{x-z_n}$ genutzt, sondern:

$$\frac{A_n \cdot x + B_n}{(x-z_n)(x-\overline{z}_n)}$$

Entsprechend wird für eine m-fache komplexe, nicht reelle Nullstelle z_n die folgende Teilsumme genommen:

$$\frac{A_{n,1} \cdot x + B_{n,1}}{(x-z_n)(x-\overline{z}_n)}, \quad \frac{A_{n,2} \cdot x + B_{n,2}}{\left((x-z_n)(x-\overline{z}_n)\right)^2}, \quad \ldots \quad , \quad \frac{A_{n,m} \cdot x + B_{n,m}}{\left((x-z_n)(x-\overline{z}_n)\right)^m}$$

Beachten Sie dabei, dass der Nenner jeweils reelle quadratische Polynome sind!

Beispiel 6.37: Man betrachte $\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$. Die Nullstellen sind $x_1 = -1$ und $x_{2,3} = \pm\mathrm{i}$. Damit lässt sich der Nenner schreiben als $(x+1)(x^2+1) = (x+1)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})$. Daraus folgt der Partialbruch:

$$\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax+B}{(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} + \frac{C}{x+1}$$

$$\begin{aligned} x-1 &= (Ax+B)(x+1) + C\left(x^2+1\right) = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2 + C \\ &= x^2(A+C) + x(A+B) + B + C \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll} 0 = A + C & & & A = -C & \\ 0 = A + B - 1 & & & B = 1 - A & = 1 + C \\ 0 = B + C + 1 & = 2C + 2 & & C = -1 & \end{array}$$

Daraus folgt, dass $A = 1$, $B = 0$ und $C = -1$ und somit

$$\frac{x-1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x}{(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) - \log(x+1) + C \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

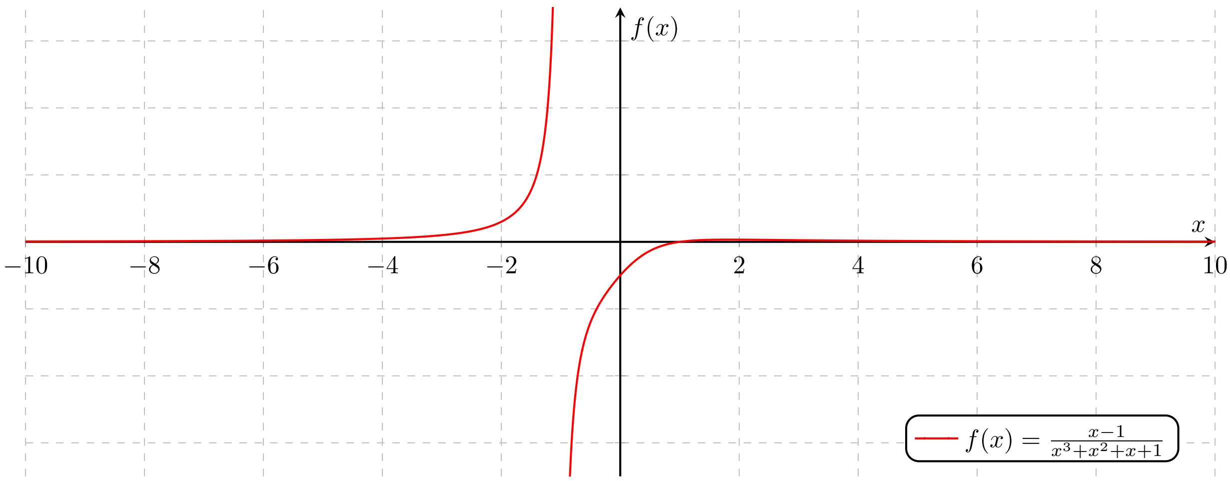


Abbildung 43: $f(x) = \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$

Beispiel 6.38: Betrachten Sie $\frac{x^3-x+5}{x^2(x^2+1)}$. Der Nenner hat offenbar die Nullstellen $x_{1,2} = 0$, $x_3 = i$ und $x_4 = -i$, was uns zu folgendem Ansatz führt:

$$\frac{x^3-x+5}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2+1)}$$

Lösen wir das lineare Gleichungssystem des Koeffizientenvergleichs, so erhalten wir

$$A = -1, \quad B = 5, \quad C = 2 \text{ und } D = -5.$$

Zusammen mit unserem Wissen aus der Trigonometrie löst sich das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-x+5}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= -\log|x| - \frac{5}{x} + \log\left(x^2+1\right) - 5\arctan(x)\end{aligned}$$

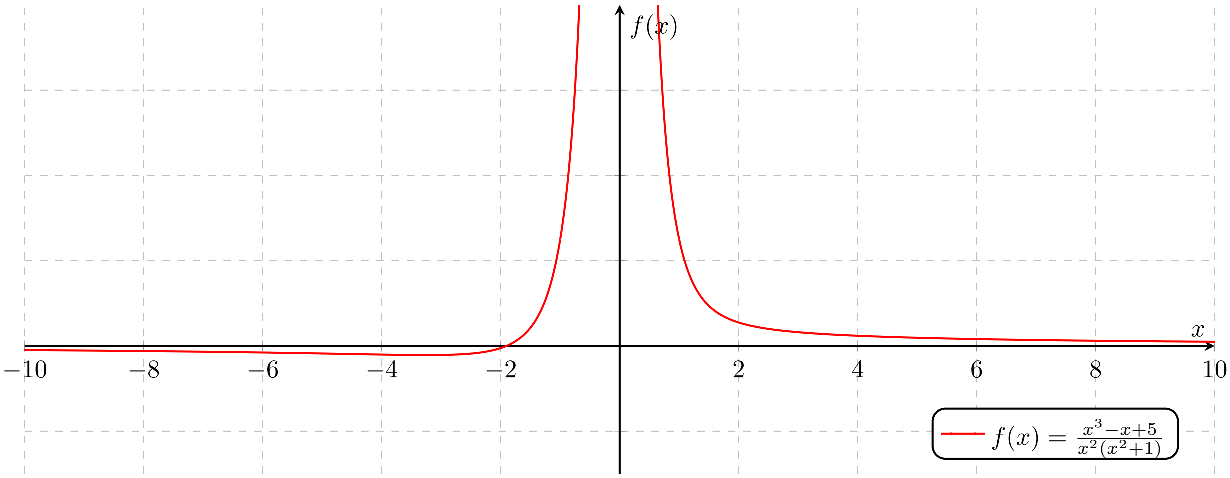


Abbildung 44: $f(x) = \frac{x^3-x+5}{x^2(x^2+1)}$

Beispiel 6.39: Nun ein Beispiel der Partialbruchzerlegung mit mehrfachen komplexen Nullstellen: Wir betrachten $\frac{2x^3-x^2+4x+2}{(x^2-2x+2)^2}$. Der Nenner hat dabei die komplexen Nullstellen $x_1 = 1+i$ und $x_2 = 1-i$, welche jeweils doppelt auftauchen. Wir verwenden also den Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-x^2+4x+2}{(x^2-2x+2)^2} &= \frac{Ax+B}{(x^2-2x+2)} + \frac{Cx+D}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{x^3\cdot A + x^2\cdot(-2A+B) + x\cdot(2A+2B+C) + (2B+D)}{(x^2-2x+2)^2}\end{aligned}$$

Dies liefert uns das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrcr} A & & & & = & 2 \\ -2A & +B & & & = & -1 \\ 2A & +2B & +C & & = & 4 \\ & 2B & & +D & = & 2 \end{array} \quad \xRightarrow[\text{Verfahren}]{\text{Gauß-}} \quad \begin{array}{rcr} A & = & 2 \\ B & = & 3 \\ C & = & -6 \\ D & = & -4 \end{array}$$

Damit ergibt sich mit der Linearität des Integrals:

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x+2}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{3x-2}{(x^2-2x+2)^2}$$

Leider müssen wir jetzt noch etwas für die Lösung arbeiten. Wir starten mit dem ersten Integral. Es fällt auf, dass für die Ableitung des Nenners $(x^2-2x+2)' = 2x-2$ ist. Wir teilen den Bruch also so in eine Summe von zwei Brüchen auf, dass im Zähler des einen Summanden die Ableitung des Nenners steht:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$

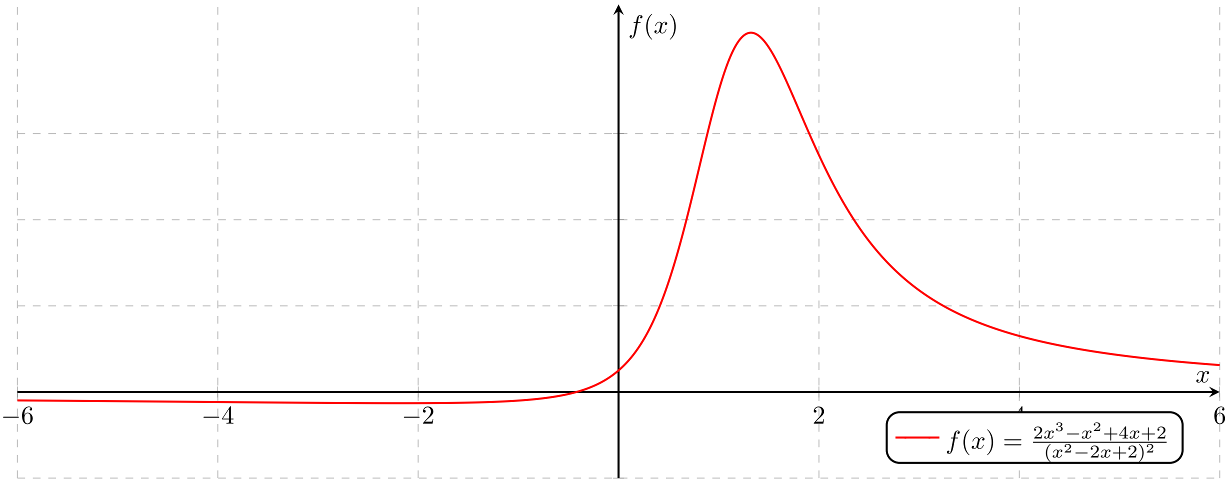


Abbildung 45: $f(x) = \frac{2x^3-x^2+4x+2}{(x^2-2x+2)^2}$

Das erste Integral haben wir gerade so konstruiert, dass man eine Kettenregel erkennt - Substitution von $u = x^2 - 2x + 2$ liefert uns die Lösung

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \log|x^2-2x+2|.$$

Für das zweite Integral formen wir zunächst um $\int \frac{5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x$. Jetzt haben wir aber fast die Ableitung von $\arctan(x)$ erhalten und substituieren daher $u = x - 1$. Damit erhalten wir

$$5\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = 5\arctan(x-1).$$

Damit ist der erste Teil geschafft:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \log|x^2-2x+2| + 5\arctan(x-1).$$

Für den nächsten Teil müssen wir den Zähler wieder geschickt aufsplitten (und zwar so, dass wir gut $x^2 - 2x + 2 = u$ substituieren können, also wieder die Ableitung davon im Nenner steht):

$$\int \frac{3x-2}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2} + \int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Für die Lösung des ersten Integrals führen unsere geplante Substitution $u = x^2 - 2x + 2$ durch und erhalten

$$\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2(x^2-2x+2)}.$$

Das letzte Integral ist mit den uns bekannten Methoden schwer zu lösen. Es gibt aber noch weitere Integriertechniken, und eine davon – die sogenannten *Reduktionsformeln*[5] – kann uns hier weiterhelfen. Damit lösen wir mit der Substitution $u = x - 1$:

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u = \frac{u}{2u^2+1} + \frac{\arctan(u)}{2}.$$

Rücksubstitution liefert uns nun die Lösung des letzten Teilintegrals

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{2(x-1)^2+1} + \frac{\arctan(x-1)}{2}$$

[5] Wir benutzen hier $\int \frac{1}{(ax^2+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2n-3}{2b(n-1)}\int \frac{1}{(ax^2+b)^{n-1}}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{2b(n-1)(ax^2+b)^{n-1}}$.

und damit schlussendlich das Integral unserer ursprünglichen Funktion:

$$\int \frac{2x^3 - x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}\,\mathrm{d}x = \log|x^2 - 2x + 2| - \frac{3}{x^2 - 2x + 2} + \frac{x-1}{(x-1)^2 + 1} + 6\arctan(x-1)$$

Bemerkung 6.40: Sie können sich nun erneut an der Integration der Funktion $\frac{1}{1-x^2}$ versuchen, an der wir in Beispiel 6.25 mit Substitution gescheitert sind. Mit Partialbruchzerlegung erhalten Sie hier

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log|x+1| - \log|1-x|}{2}.$$

Sie wissen aber auch, dass $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{artanh}(x)$. Sie haben also eine alternative Darstellung des artanh durch die Partialbruchzerlegung gefunden!

7. Differenzialgleichungen

Wir hatten im fünften Kapitel bereits die Definitionen von expliziten und impliziten Differenzialgleichungen kennengelernt. Zur Erinnerung seien diese hier noch einmal aufgeführt:

Definition 7.1 – Implizite und explizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung:

Eine **implizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung** ist ein Ausdruck der Form

$$F\left(z, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ ist eine Lösung der Differenzialgleichung, wenn f n-fach differenzierbar ist und für alle $z \in M$ gilt

$$F\left(z, f(z), f'(z), f''(z), \ldots, f^{(n)}(z)\right) = 0.$$

Ein Ausdruck der Form

$$y^{(n)} = F\left(z, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

ist eine **explizite gewöhnliche Differenzialgleichung n-ter Ordnung**.

Nun hatten wir zu diesem Zeitpunkt noch relativ wenig Lösungsansätze für ein solches Problem gehabt. Seit dem letzten Kapitel kennen wir aber eine allgemeine Lösung einer (zugegebenermaßen sehr einfachen) Differenzialgleichung, nämlich der Gleichung

$$y' = f(x).$$

Die Lösung ist jetzt offensichtlich: Wir setzen einfach

$$y = \int f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Diese Beobachtung legt nahe, dass Integration viel mit dem Lösen von Differenzialgleichungen zu tun hat. Es wird sich herausstellen, dass diese Vermutung wahr ist und dass wir mit unserem Wissen um Integration nun schon einige Differenzialgleichungen lösen können.

⋆ ⋆ ⋆

Satz 7.2 – Existenz und Eindeutigkeit, Picard-Lindelöf:

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitzbedingung genügt. Dann existiert für alle $(a, c) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, sodass $F\colon [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$ mit $F(a) = c$ ist.

Bemerkung 7.3: Die *Lipschitzbedingung* ist eine Verschärfung der Stetigkeit: Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **Lipschitzstetig**, wenn eine Konstante L existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

.

Was genau ein sogenanntes *Anfangswertproblem* ist, werden wir später noch lernen, nämlich in Definition 7.8.

Dieser Satz ist grundlegend für die Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen, denn er liefert uns die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösungen (unter den gegebenen Bedingungen).

Achtung!

Der Existenz- und Eindeutigkeissatz liefert uns keine Lösung auf ganz G, sondern nur eine Lösung in einer hinreichend kleinen Umgebung um a.

⋆ ⋆ ⋆

Zunächst werden wir sehen, wie man *lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung* lösen kann.

Definition 7.4 – (in)homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung:

Eine inhomogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung ist eine Gleichung der Gestalt

$$y' = a(x)\,y + b(x) \tag{1}$$

Dabei sind a, b auf einem Intervall I definierte stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y' = a(x) \cdot y$$

heißt die zu (1) gehörige homogene lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung.

Differenzialgleichungen des obigen Typs heißen *lineare Differenzialgleichungen*, weil die Variable y lediglich in der ersten Potenz vorkommt, eben wie bei einer linearen Gleichung. Und sie heißen natürlich *von 1. Ordnung*, weil nur die erste Ableitung von y hier eine Rolle spielt.

Für Differenzialgleichungen wie in (1) gibt es immer eine Lösung.

Satz 7.5:

Sei A eine Stammfunktion zu a und B eine Stammfunktion zu $b \cdot \exp(-A)$. Dann ist

$$y = (B + c)\mathrm{e}^A, \quad c \in \mathbb{C}$$

eine Lösung für (1).

Beweis: Wir leiten ab:

$$\begin{aligned} \left((B+c)\,\mathrm{e}^A\right)' &= \left(B\mathrm{e}^A + c\mathrm{e}^A\right)' &= B'\mathrm{e}^A + A'\mathrm{e}^A B + cA'\mathrm{e}^A \\ &= b\mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^A + a\mathrm{e}^A B + ca\mathrm{e}^A &= b + a\,(B+c)\,\mathrm{e}^A. \end{aligned}$$

⊠

Beachten Sie hier, dass die Funktionen a und b und damit auch A und B natürlich in Abhängigkeit von z sind und daher mit Vorsicht abgeleitet werden müssen.

Wenn man die angegebene Lösung genauer betrachtet, dann setzt sie sich aus der allgemeinen Lösung für die homogene Version der gegebenen Gleichung und einer speziellen Lösung für den inhomogenen Fall zusammen. Dieser Ansatz des Ratens der speziellen Lösung für die inhomogene Gleichung ist in der Literatur auch als **Variation der Konstanten** bekannt. Die Idee ist wie folgt:

Betrachtet man für die Differenzialgleichung $y' = a(x)\,y + b(x)$ die homogene Variante $y' = a(x)\,y$. Dann löst die Funktion $y_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$ die homogene Gleichung. Nun variieren wir die Konstante $c = c(x)$ und setzen die partikuläre Lösung als $y_p(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$ an. Die Idee ist, dass man ein $c(x)$ so finden kann, dass ein solches $y_p(x)$ in der Tat die Ausgangsgleichung löst.

Ableiten ergibt: $y_h'(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} + c(x) \cdot a(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}$. Nach dem Einsetzen von $y'(x)$ und $y(x)$ in die Ausgangsgleichung erhält man die Gleichung:

$$c'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x)$$

und somit $c'(x) = b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$, sodass sich mittels Integration schließlich ergibt:

$$c(x) = \int b(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Ergebnis entspricht der Aussage im Satz 7.5.

⋆ ⋆ ⋆

Dies ist eine einfache Lösung für eine schon nicht mehr ganz so einfache Differenzialgleichung. Hier sieht man nun wieder wie wichtig es ist, dass wir Stammfunktionen ausrechnen können.

Beispiel 7.6: Wir lösen die Differenzialgleichung $y' = 2xy + x$ wie folgt: Es handelt sich offenbar um eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Es ist $A = x^2$ und $B = \int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$ eine Stammfunktion für $x\mathrm{e}^{-x^2}$. Also haben wir etwa folgende Lösung:

$$y = -\frac{1}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{x^2}$$

Bemerkung 7.7: Beachten Sie: Natürlich ist dies Beispiel so gemacht, dass man die Funktion B gut raten kann. Im Allgemeinen ist dies natürlich nicht so leicht möglich.

⋆ ⋆ ⋆

Anfangswertprobleme. Häufig hat man nicht nur eine Differenzialgleichung zu lösen, sondern man hat auch noch Rücksicht auf einen bestimmten *Anfangswert* zu nehmen, also einen Wert, bei dem wir erwarten, dass die Lösung unserer Differenzialgleichung diesen auch an einem bestimmten Punkt annimmt. Im Wesentlichen bedeutet dies, dass wir aus der möglichen Lösungsschar von (Lösungs-)Funktionen eine spezielle Lösung herausfiltern.

Definition 7.8 – Anfangswertproblem (AWP):

Eine Differenzialgleichung $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ mit zusätzlich vorgegebenen Anfangswerten $y(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Anfangswertproblem (AWP).

Dank des obigen Satzes können wir schon mal notieren:

Korollar 7.9 – Lösbarkeit von Anfangswertproblemen:

Jedes Anfangswertproblem $y' = ay + b,\ y(x_0) = y_0$ hat eine Lösung.

Beweis: Klar, denn mit genau einer Konstante $c \in \mathbb{C}$ erfüllt $(B+c)\mathrm{e}^A$ die zusätzliche Forderung $y(x_0) = y_0$. ☒

Beispiel 7.10: Greifen wir das Ergebnis von Beispiel 7.6 wieder auf und geben folgende Anfangsbedingung:

$$y(1) = 41{,}5.$$

Als nächstes setzen wir die Werte ein und berechnen c:

$$41{,}5 = -\frac{1}{2} + c \cdot \mathrm{e}^{1^2} \quad \leftrightarrow \quad 42 = c \cdot \mathrm{e}^1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{42}{\mathrm{e}} = c$$

Damit definieren wir c als:

$$c = 42 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Damit können wir y definieren als:

$$y(x) = -\frac{1}{2} + 42 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \mathrm{e}^{x^2} = -\frac{1}{2} + 42 \cdot \mathrm{e}^{x^2-1}$$

⋆ ⋆ ⋆

Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung. Die linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung sind nur ein Spezialfall von *linearen Differenzialgleichungen*, den wir aber schon mit einfachen Methoden lösen konnten. Wir besprechen nun Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen n-ter Ordnung – zumindest für eine große Teilmenge. Die Differenzialgleichung erster Ordnung dagegen konnten wir sogar allgemein lösen.

Definition 7.11 – (homogene) lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung:

Eine lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b. \tag{L}$$

Dabei sind $a_{n-1}, \ldots, a_0, b \colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen. Die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{H}$$

heißt die zu (L) gehörende homogene lineare Differenzialgleichung.

Beim Untersuchen von linearen Differenzialgleichungen sehen wir, dass lineare Algebra in der Analysis ein unersetzliches Hilfsmittel ist. Wie bei Lösungen von linearen Gleichungssystemen gilt nämlich:

Lemma 7.12:

(i) Sind y_1, y_2 Lösungen einer linearen inhomogenen Differenzialgleichung, so ist $y_1 - y_2$ eine Lösung der dazugehörigen homogenen linearen Differenzialgleichung.

(ii) Ist y_0 eine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung, so entsteht jede weitere Lösung durch Addition einer Lösung y_h der dazugehörigen homogenen Gleichung, also: $y_1 = y_0 + y_h$.

Beweis: Da das Differenzieren linear ist, ergeben sich beide Aussagen sofort. ☒

⋆ ⋆ ⋆

Im Folgenden wollen wir die Lösungsmenge der homogenen Differenzialgleichung (H) mit $\mathfrak{L}$ bezeichnen. Wegen des obigen Lemmas ist die Lösungsmenge der inhomogenen Differenzialgleichung (L), die Menge $y_0 + \mathfrak{L}$ für eine einzige Lösung y_0 von (L). Das heißt, wir können uns die Funktion y_0 als eine Art Stützvektor für den affin liegenden Lösungsraum von (L) vorstellen. Diese Vorstellung aus der Linearen Algebra ist gar nicht verkehrt. Es gilt nämlich:

Lemma 7.13:

$\mathfrak{L}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis: $\mathfrak{L}$ ist eine Teilmenge aller C^n Funktionen $I \to \mathbb{R}$ und diese bilden einen Vektorraum. Wir müssen also nachprüfen, dass $\mathfrak{L}$ ein Untervektorraum ist[6]: Nun ist die konstante 0-Funktion eine Lösung von (H), das heißt, es gilt: $0 \in \mathfrak{L}$. Sind $y_1, y_2 \in \mathfrak{L}$ und $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ so gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left(\lambda y_1 + \eta y_2\right)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\lambda y_1^{(i)} + \eta y_2^{(i)}\right) = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i y_1^{(i)} + \eta \sum_{i=0}^{n} a_i y_2^{(i)} = 0 + 0 = 0.$$

Also ist auch $\lambda y_1 + \eta y_2$ eine Lösung von (H) und damit ist $\mathfrak{L}$ ein Vektorraum. ⊠

Wir können uns die dazugehörige Dimension anschauen:

Satz 7.14:

Es ist $\dim(\mathfrak{L}) = n$.

Diesen Satz werden wir jetzt nicht beweisen, aber bis zum Ende des Kapitels vollständig argumentiert haben.

Wie wir wissen hat jeder Vektorraum eine Basis. In unseren Fall besteht also eine Basis aus n verschiedenen Funktionen $y_1, \dots, y_n$.

Definition 7.15 – Fundamentalsystem:

Eine Basis von $\mathfrak{L}$ heißt Fundamentalsystem für (H).

Man kann anhand des folgenden Kriteriums feststellen, ob man schon n linear unabhängige Lösungen gefunden hat.

Lemma 7.16:

Es seien $y_1, \dots, y_n$ insgesamt n verschiedene Funktionen auf I. Wenn es ein $x_0 \in I$ gibt, sodass die Wronski-Determinante

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

an der Stelle $x = x_0$ ungleich 0 ist, so sind die $y_1, \dots, y_n$ linear unabhängig.

[6] Zur Erinnerung: Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{L}$ nicht leer ist und außerdem abgeschlossen bezüglich Addition und Skalarmultiplikation ist.

Beweis: Das sieht man leicht: Angenommen, die Vektoren wären nicht linear unabhängig – es gäbe also eine nicht-triviale Linearkombination der Null wie folgt: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i = 0$. Damit gilt wegen der Linearität des Ableitungsoperators ebenfalls: $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i^{(k)} = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$. Diese Gleichungen gelten unabhängig vom konkreten x und somit auch für das spezielle x_0. Insbesondere gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \left(y_i (x_0), \ldots, y_i^{(n-1)} (x_0) \right)^t = 0.$$

Das heißt aber, dass die Spaltenvektoren der Matrix in der Wronski-Determinante, nämlich

$$\left(y_1 (x_0), \ldots, y_1^{(n-1)} (x_0) \right)^t, \quad \ldots \quad , \left(y_n (x_0), \ldots, y_n^{(n-1)} (x_0) \right)^t$$

linear abhängig sind, aber dann ist auch $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = 0$. Ein Widerspruch. Also sind die Funktionen $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig. ⊠

Beispiel 7.17: Wir betrachten die Gleichungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x},$$

Da wir $n = 3$ haben, müssen wir die erste und zweite Ableitung dieser Funktionen bestimmen:

$$\begin{array}{lll} y_1'(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & y_2'(x) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & y_3'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \\ y_1''(x) = -\mathrm{e}^{ix} & y_2''(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & y_3''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

Fügen wir die nun als Matrix zusammen, erhalten wir:

$$W = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(s) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & 2\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} & 4\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$$

Als nächstes bestimmen wir die Determinante der Matrix:

$$\begin{aligned} &\det(W) \\ &= -\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}4\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}4\mathrm{e}^{2x} \\ &= -4\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} - \cancel{2\mathrm{e}^{2x}} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} + \cancel{2\mathrm{e}^{2x}} - 4\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} \quad = \quad -10\mathrm{i}\mathrm{e}^{2x} \quad \neq \quad 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Damit sind y_1, y_2 und y_3 für alle $x \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

Beispiel 7.18: Betrachten wir folgende Gleichungen:

$$\tilde{y}_1(x) = \cos(x) \quad \tilde{y}_2(x) = \sin(x) \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

Berechnen wir erneut die Ableitungen bis zum zweiten Grad:

$$\begin{array}{lll} \tilde{y}_1'(x) = -\sin(x) & \tilde{y}_2'(x) = \cos(x) & y_3'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \\ \tilde{y}_1''(x) = -\cos(x) & \tilde{y}_2''(x) = -\sin(x) & y_3''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

Fügen wir die nun als Matrix zusammen, erhalten wir:

$$W = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) & \mathrm{e}^{2x} \\ -\sin(x) & \cos(x) & 2\mathrm{e}^{2x} \\ -\cos(x) & -\sin(x) & 4\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ergibt sich somit durch:

$$\det(W) \quad = \quad \cos^2(x)4\mathrm{e}^{2x} \quad + \quad \sin^2(x)\mathrm{e}^{2x} \quad - \quad \sin(x)\cos(x)2\mathrm{e}^{2x}$$

$$\begin{array}{rccccccccc} & +\sin^2(x)4\mathrm{e}^{2x} & + & \cos^2(x)\mathrm{e}^{2x} & + & \sin(x)\cos(x)2\mathrm{e}^{2x} & & & & \\ = & 4\mathrm{e}^{2x} & + & \mathrm{e}^{2x} & + & 0 & = & 5\mathrm{e}^{2x} & \neq & 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Damit sind y_1, y_2 und y_3 für alle $x \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.
Gehen wir nun einen Schritt zurück und betrachten wir Beispiel 7.17. Da wir unsere $\tilde{y}_1$ und $\tilde{y}_2$ als Linearkombination von y_1 und y_2 (von Beispiel 7.17) darstellen können, wäre es hier nicht erneut notwendig gewesen, dies nachzurechnen, da wir das Ergebnis aus Beispiel 7.17 bereits kannten.
Die Determinanten unterscheiden sind, da $\tilde{y}_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$ und $\tilde{y}_2 = \frac{y_1+y_2}{2\mathrm{i}}$ und somit der Faktor 2 bzw. 2i zwischen den beiden Funktionen vorliegt. Diese treten dann auch in den Determinanten auf.
Sowohl $y_{1,2,3}$, als auch $\tilde{y}_{1,2}, y_3$, werden uns später als Lösungen von Beispiel 7.22 wieder begegnen.

⋆ ⋆ ⋆

Homogene lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie der Name schon sagt, ist eine homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten nichts anderes als eine lineare Differenzialgleichung, bei der die Koeffizientenfunktionen *konstant* sind. Solche Differenzialgleichungen sind leicht zu lösen, was wir nun besprechen wollen:

Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{K}$$

wobei hier $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Zur Lösung dieser Gleichung machen wir den folgenden Ansatz:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Wir erinnern uns, dass $\left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ gilt, das heißt, eingesetzt in der Gleichung (K) ergibt sich:

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Wir müssen also Nullstellen des eingehenden Polynoms betrachten:

Definition 7.19 – Charakteristisches Polynom:

Das Polynom

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

nennt man das charakteristische Polynom von (K).

Es ist $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, das heißt, $\mathrm{e}^{\lambda x}$ ist genau dann eine Lösung für (K), wenn λ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, dass ein Polynom n-ten Grades genau n (komplexe) Nullstellen (eventuell mit Vielfachheiten) besitzt. Falls diese paarweise verschieden sind, haben wir schon ein vollständiges Fundamentalsystem gefunden:

Satz 7.20:

Es habe das charakteristische Polynom von (K) genau n paarweise verschiedene, möglicherweise komplexwertige Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ ein Fundamentalsystem von (K).

Beweis: Es ist klar, dass die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda_k x}$ für $k = 1, \ldots, n$ Lösungen von (K) sind. Wir müssen also nur noch zeigen, dass diese Funktionen linear unabhängig sind. Wir bilden die Wronski-Determinante an der Stelle $x = 0$ und betrachten:

$$W\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\right)(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das ist aber die aus der Linearen Algebra bekannte **Vandermonde-Determinante** und für diese gilt:

$$W\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}\right)(0) = \prod_{j>k} \left(\lambda_j - \lambda_k\right) \neq 0.$$

Der letzte Ausdruck ist ungleich Null, da die λ_i paarweise verschieden sind. Damit sind die e^{λ_i} linear unabhängig. ⊠

Damit ist nun auch der Satz 7.14 über die Dimension des Lösungsraums im homogenen Fall vollständig bewiesen.

Beispiel 7.21: Wir lösen die Gleichung

$$y'' + y = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist $P(x) = x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$. Damit haben wir die Lösungen

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}.$$

Aus diesen Lösungen erhalten wir auch „reelle“ Lösungen, indem wir ansetzen:

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \sin(x).$$

Beispiel 7.22: Wir betrachten die Gleichung

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Dieses zerfällt in $p(x) = (x^2 + 1)(x - 2) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})(x - 2)$. Damit haben wir die gesuchten Lösungen mit:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x},$$

oder – wie eben auch mit dem obigen Trick – die Folgenden:

$$\tilde{y}_1(x) = \cos(x), \quad \tilde{y}_2(x) = \sin(x), \quad y_3(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Nun wenden wir uns dem allgemeineren Fall von Nullstellen mit Vielfachheit größer als 1 zu.

Satz 7.23:

Es zerfalle das charakteristische Polynom von (K) wie folgt in Linearfaktoren:

$$p(x) = (x-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{k_r}.$$

Dann ist ein Fundamentalsystem von (K) gegeben durch:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & x \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{k_1-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, & x \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, & \ldots, & x^{k_2-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ & & \vdots & \\ \mathrm{e}^{\lambda_r x}, & x \cdot \mathrm{e}^{\lambda_r x}, & \ldots, & x^{k_r-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_r x} \end{array}$$

Diesen Satz werden wir nicht beweisen.

Beispiel 7.24: Wir lösen die Gleichung

$$y'''' - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Dann ist $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$ das charakteristische Polynom dieser Gleichung und wir haben die Lösungen:

$$y_1(x) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad y_2(x) = \mathrm{e}^x, \quad y_3(x) = x\mathrm{e}^x, \quad y_4(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

⋆ ⋆ ⋆

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Hauptarbeit haben wir bereits getan: Wir wissen bereits, dass sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und einer geeigneten Lösung der homogener Gleichung zusammensetzt. Somit ist der Raum der Lösungen der inhomogenen Gleichung gleich der Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und des Gesamtlösungsraums der homogenen Gleichung. Letzteren Lösungsraum haben wir im früheren Abschnitt bereits bestimmt. Es verbleibt nun, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu *raten*. Das hier hilfreiche Verfahren haben wir bereits im Abschnitt über die Differenzialgleichungen erster Ordnung angewendet: Variation der Konstanten! Sie nehmen sich die allgemeine Lösung des homogenen Systems und lassen die Konstanten variieren.

Betrachten wir eine (inhomogene) Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

Dann habe die bereits besprochene homogene Variante folgende Lösung

$$y_h(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x)$$

für ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_n$. Nun setzen wir die Methode der Variation der Konstanten an und suchen eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung der Form:

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + \cdots + c_n(x) \cdot y_n(x)$$

Also lösen Sie das mit Nebenbedingungen gespickte folgende Gleichungssystem in den Unbekannten(-funktionen) $c_1', \ldots, c_n'$:

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 \cdot c_1' & + & y_2 \cdot c_2' & + & \ldots & + & y_n \cdot c_n' & = & 0 \\ y_1' \cdot c_1' & + & y_2' \cdot c_2' & + & \ldots & + & y_n' \cdot c_n' & = & 0 \\ & & & & \ldots & & & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} \cdot c_1' & + & y_2^{(n-2)} \cdot c_2' & + & \ldots & + & y_n^{(n-2)} \cdot c_n' & = & 0 \\ y_1^{(n-1)} \cdot c_1' & + & y_2^{(n-1)} \cdot c_2' & + & \ldots & + & y_n^{(n-1)} \cdot c_n' & = & b \end{array}$$

Anschließend bestimmen Sie aus den Lösungen $c_1', \ldots, c_n'$ durch jeweiliges Bilden der Stammfunktion die gesuchten Funktionen $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ und haben auf diese Art die fehlenden Koeffizientenfunktionen für die gewünschte partikuläre Lösung gefunden.

Beispiel 7.25: Betrachten Sie die Gleichung $y'' - 4y' + 4y = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$. Die homogene Gleichung hat als allgemeine Lösung die Form $y_h(x) = c_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{2x}$. Nun lassen Sie die Koeffizienten variieren und betrachten den oben angegebenen Ansatz $y_p(x) = c_1(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + c_2(x) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{2x}$.

Das zu lösende Gleichungssystem liest sich wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} c_1'(x) \cdot \mathrm{e}^{2x} & + & c_2'(x) \cdot x\mathrm{e}^{2x} & = & 0 \\ c_1(x) \cdot 2\mathrm{e}^{2x} & + & c_2'(x) \cdot \left(\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}\right) & = & -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2} \end{array}$$

Wenn Sie nun jeweils vereinfachen, indem Sie schrittweise die Exponentialfunktion eliminieren, erhalten Sie:

$$\begin{array}{ccccc} c_1'(x) & + & c_2'(x) \cdot x & = & 0 \\ 2c_1(x) & + & c_2'(x) \cdot (1+2x) & = & -\frac{1}{x^2} \end{array}$$

Schließlich ergibt sich $c_2'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und damit $c_1'(x) = \frac{1}{x}$. Integration führt uns zum Ziel: $c_1(x) = \ln|x|$ sowie $c_2(x) = \frac{1}{x}$. Die so erhaltene Lösung der Differenzialgleichung ist damit:

$$y(x) = \ln|x| \cdot \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Differenzialgleichungen mit getrennten Veränderlichen. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

für stetige Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ und mit $x_0 \in I$, $y_0 \in J$. Wir versuchen, beide Variablen x und y auf verschiedene Seiten der Gleichung zu bekommen — wir *trennen* sie. Dazu überlegen wir uns folgende Strategie:

(a) Wir nehmen die formale Umbenennung $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ vor und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y).$$

(b) Wir trennen die Variable, also ziehen sie auf jeweils eine Seite:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Wir integrieren beide Seiten:
$$\int \frac{1}{g\,(y)}\,\mathrm{d}y = \int f\,(x)\,\mathrm{d}x$$

(d) Die erhaltene Gleichung lösen wir, falls möglich nach y auf.

Bei dieser Strategie passieren an einigen Stellen dubiose Dinge: Beispielsweise tun wir so, als wäre der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\,(x) \cdot g\,(y)$ ein Bruch und multiplizieren anschließen mit dem Operator $\mathrm{d}x$. Das scheint nicht richtig zu sein. Der folgende Satz (bzw. sein Beweis) rechtfertigt aber dieses Vorgehen.

Satz 7.26:

(a) Im Falle der Anfangsbedingung $g\,(y_0) = 0$ ist die konstante Funktion y_0 eine Lösung für (2).

(b) Ansonsten erhält man durch die obige Strategie in einem hinreichend kleinen Intervall $I' \subseteq I$ um x_0 eine Lösung für (2).

Beweis:
(a) ist klar.
Zu (b): Sei $J' \subseteq J$ ein offenes Intervall um y_0 mit $g(t) \neq 0$ für alle $t \in J'$. Ein solches Intervall existiert, da g stetig ist. Sei dann
$$G\colon J' \to \mathbb{R}, \quad G\,(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)}$$
und
$$F\colon I \to \mathbb{R}, \quad F\,(x) := \int_{x_0}^{x} f(z)\,\mathrm{d}z$$
(Das ist die formale Version von Punkt (c) in unserer Strategie.)
Da $G' = 1/g$ auf J' ein einheitliches Vorzeichen hat und G streng monoton ist, gibt es eine differenzierbare Umkehrabbildung $G^{-1}\colon G\left(J'\right) \to J$.

Ferner ist $G\left(J'\right)$ ein offenes Intervall um $G(y_0) = 0$. Sei nun $I' \subseteq I$ mit $F\left(I'\right) \subseteq G(J')$. Ein solches existiert wegen der Stetigkeit von F und weil ebenfalls $F\,(x_0) = 0$. Nun definieren wir:
$$y\colon J \to \mathbb{R}, \quad y\,(x) := G^{-1}\left(F\,(x)\right)$$
Man erhält $y\,(x)$ durch Auflösen der Gleichung $G(y) = F\,(x)$ (Beachten Sie den Punkt (d) in unserer Strategie).

Nun löst y tatsächlich (2), denn offenbar gilt $y\,(x_0) = y_0$ und wenn wir die Gleichung $G\left(y\,(x)\right) = F\,(x)$ an beiden Seiten ableiten, folgt wie gewünscht:
$$\frac{y'\,(x)}{g\left(y\,(x)\right)} = f\,(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y'\,(x) = f\,(x) \cdot g\left(y\,(x)\right).$$
⊠

Bemerkung 7.27: Beachten Sie die Einschränkung auf das Teilintervall I' im Definitionsbereich in der Formulierung des Satzes. Eine globale Lösung auf ganz I können Sie nicht erwarten.

Beispiel 7.28: Wir wollen die Differenzialgleichung
$$y' = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$
lösen. Diese ist von der Form (2) mit $f\,(x) = \frac{1}{x}$ und $g(y) = y$.

- Zunächst also die formale Umbenennung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$.
- Nun die Trennung der Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
- Und schließlich müssen wir noch integrieren: $\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Die beiden Integrale sind wohlbekannt: Wir erhalten also

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1.$$

Nun gilt es diese Gleichung nach y aufzulösen. Dies machen wir mit der Exponentialfunktion und erhalten

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{\ln|x|} \cdot \mathrm{e}^{c_1}$$

und somit $y = c \cdot x$ wobei $c = \mathrm{e}^{c_1}$.

Wie gewünscht gilt dann: $y'(x) = c \cdot 1 = \frac{cx}{x} = \frac{y(x)}{x}$.

Beispiel 7.29: Nun betrachten wir die Gleichung

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Hier haben wir nun $f(x) = x$ und $g(y) = \frac{1}{y}$. Wir gehen vor wie oben:

- Formale Umbenennung: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$.
- Trennung der Variablen: $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$.
- Integration: $\int y\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$.

Die Integrale sind leicht: $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c_1$. Diese Gleichung wird wieder nach y aufgelöst und wir erhalten: $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2c_1} = \pm\sqrt{x^2 + c}, \quad c = 2c_1$.
Tatsächlich gilt:

$$y'(x) = \left(\pm\sqrt{x^2 + c}\right)' = \pm\frac{1}{2\sqrt{x^2 + c}} \cdot 2x = \pm\frac{x}{\sqrt{x^2 + c}} = \frac{x}{y(x)}.$$

Beispiel 7.30: In diesem Beispiel werden wir sehen, dass die Einschränkung auf das Teilintervall in Satz (b) notwendig ist. Betrachten Sie nun das folgende AWP:

$$y' = xy^2, \quad y(0) = c$$

Für $c = 0$ ist $y = 0$ offenbar eine Lösung dieser Differenzialgleichung. Ist $c \neq 0$ lösen wir erneut mit Trennung der Variablen und erhalten

$$y(x) = \frac{2}{\frac{2}{c} - x^2}.$$

Nun sehen wir: Ist $c < 0$ erhalten wir eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$, ist aber $c > 0$ besitzt dieses AWP keine Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, sondern nur auf einem hinreichend kleinem Teilintervall

$$I' = \left(-\sqrt{\frac{2}{c}}, \sqrt{\frac{2}{c}}\right) \subset \mathbb{R}.$$

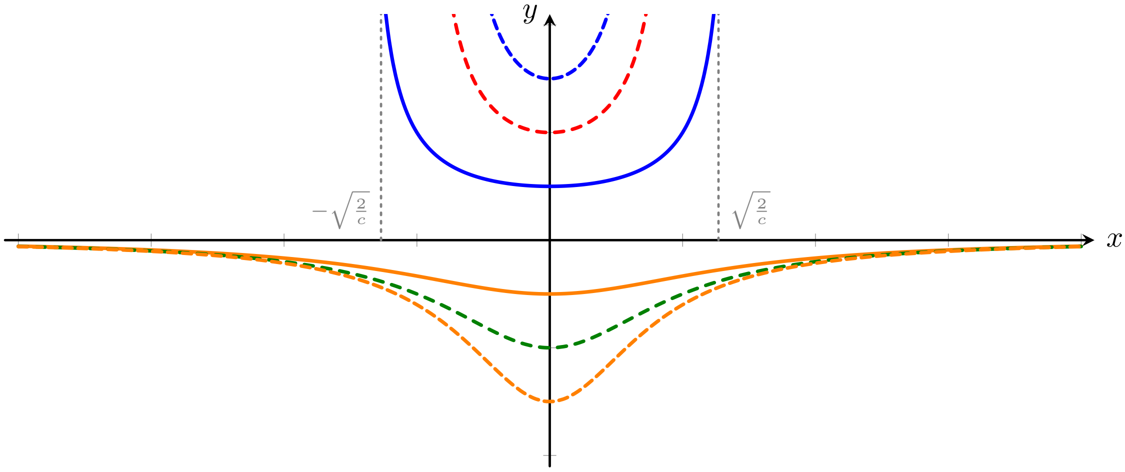


Abbildung 46: Lösungen der Differenzialgleichung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und Lösungen, die nicht auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden können.

System von Differenzialgleichungen. Betrachten wir nun zwei gekoppelte Differenzialgleichungen.

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + by(t) \\ y'(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

Dies kann mittels Matrixschreibweise ausdrückt werden:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Dieses System entspricht jeweils dem Erscheinungsbild linearer homogener Differenzialgleichungen und kann auch so gelöst werden – über den e-Ansatz:
Nutze:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}\mathrm{e}^{\lambda t} \\ \hat{y}\mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

und damit, dass

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $v = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Damit gilt die Gleichung

$$Av = \lambda v.$$

Also ist λ ein Eigenwert der Matrix A und v der zugehörige Eigenvektor.

Im hier vorliegenden Fall (eine (2×2)-Matrix) existieren zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 mit den Eigenvektoren $v_1 = (x_1, y_1)^t$ und $v_2 = (x_2, y_2)^t$, weshalb die allgemeine Lösung nachfolgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2 = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Gleichungen vom Typ:

$$y'(x) = Ay(x)$$

wobei $y, y' \in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ eine $(n \times n)$-Matrix mit reellen Koeffizienten und

$$y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \qquad a_j^i \in \mathbb{R}.$$

Dabei kann y'^i alle Elemente aus $y(x)$ beinhalten, nicht nur die des i-ten Eintrags.
Also kann y'^2 zum Beispiel dargestellt werden als

$$y'^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y^i \qquad \text{mit } \mu_i \in \mathbb{R}$$

oder

$$y'^2 = 2 \cdot y^1 + 4 \cdot y^2 + 16 \cdot y^4.$$

Dies ist klar, da man so wieder ein System von DGLs hat. Dürfte jede Ableitung nur die jeweilige Ursprungsfunktion beinhalten, wäre es kein zusammenhängendes (gekoppeltes) System, sondern zusammen auftretende DGLs, ohne Zusammenhang.

Die Bestimmung des Fundamentalsystems verläuft wie folgt:

1. Man bestimme die Eigenwerte der Matrix A.
2. Führe Fallunterscheidung durch
   - **(a)** Sei λ ein Eigenwert von A, mit dem zugehörigen Eigenvektor v.
     Dann ist $\mathrm{e}^{\lambda x} v$ eine Lösung des Systems.
   - **(b)** Sei λ ein Eigenwert von A mit den zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_m$.
     Dann sind $\mathrm{e}^{\lambda x} v_1, \dots, \mathrm{e}^{\lambda x} v_2$ Lösungen des Systems.
   - **(c)** Sei λ ein m-facher Eigenwert von A, mit nur einem Eigenvektor v_1.
     Die Hauptvektoren werden wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} (A - \lambda 1_n)\, v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda 1_n)\, v_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ (A - \lambda 1_n)\, v_m &= v_{m-1} \end{aligned}$$

Dann sind

$$\mathrm{e}^{\lambda x} v_1$$

$$\mathrm{e}^{\lambda x}\left(v_2 + x v_1\right)$$
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\left(v_3 + v_2 x + v_1 x^2\right)$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\left(\sum_{k=1}^{m} v_k x^{m-k}\right)$$

Lösungen des Systems.

(d) Sei nun $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ ein Eigenwert von A mit dem zugehörigen Eigenvektor $v_1 = a + \mathrm{i}b$. Damit ist auch $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ ein Eigenwert von A mit dem Eigenvektor $v_2 = \overline{v_1} = a - \mathrm{i}b$.
Damit gilt dann:

$$Av = \lambda v \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{Av} = \overline{\lambda v} \qquad \Leftrightarrow \qquad A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

Hierbei ist die $\overline{A} = A$, da A reellwertig.
Damit ist die Lösung des Systems:

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\left(a\cos(\beta x) - b\sin(\beta x)\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{e}^{\alpha x}\left(a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)\right).$$

Beispiel 7.31: Wir suchen die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Bestimmen wir nun die Eigenwerte und -vektoren der Matrix:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(M - \lambda \cdot E_2\right) = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Berechnen wir nun die Nullstellen, um die Eigenwerte zu erhalten:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

Die Eigenvektoren bestimmen wir durch das Gaußverfahren:

$$\begin{aligned} 0 &= M - \lambda_{1,2} \cdot E_2 \\ M - \lambda_1 \mid 0 &= \left(\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \rightarrow v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ M - \lambda_2 \mid 0 &= \left(\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \rightarrow v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit lautet die homogene Lösung des Fundamentalsystems:

$$Y(t) = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2\right) = \left(\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die partikuläre Lösung.
Nach dem Prinzip der Variation der Konstanten folgt:

$$Y(t)\, c'(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\underbrace{Y^{-1}(t)\, Y(t)}_{=1} c'(t) = Y^{-1}(t)\, b(t) = c'(t)$$

Bestimmen wir also $Y^{-1}(t)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} & 1 & 0 \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow[\mathrm{I+II}]{\mathrm{I-II}} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2\mathrm{e}^t & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2\mathrm{e}^{3t} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{e}^t & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \xrightarrow[\mathrm{II}\cdot\mathrm{e}^{-3t}]{\mathrm{I}\cdot\mathrm{e}^{-t}} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{array}\right)$$

Also ist $Y^{-1}(t)$ gegeben durch:

$$Y^{-1}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

Also ist $c'(t)$ gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{t}{2}\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t} \\ -\left(1 + \frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-3t} - \frac{2t}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{t}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-t} \\ -\left(1 + \frac{3}{2}t\right)\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

Um $c(t)$ zu bestimmen, müssen wir die gefundenen Lösungen integrieren. Dies liefert:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{t+1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} \begin{pmatrix} 1-t \\ (t+1)\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

Damit ist unsere Partikuläre Lösung gegeben durch:

$$y_p(t) = Y(t)\, c(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-t}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{t+1}{2}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-t}{2} + \frac{t+1}{2} \\ -\frac{1-t}{2} + \frac{t+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Also ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$y(t) = y_p(t) + Y(t)\, c = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Also haben wir folgende Lösungen gefunden:

$$\begin{array}{rcccl} y_1(t) & = & 1 & + & \mathrm{e}^t\left(c_1 + c_2\mathrm{e}^{2t}\right) \\ y_2(t) & = & t & - & \mathrm{e}^t\left(c_1 - c_2\mathrm{e}^{2t}\right) \end{array}$$

Beispiel 7.32: Betrachten wir das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren:
Das charakteristische Polynom lautet:

$$\det(A - \lambda 1) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Die pq-Formel liefert:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2\mathrm{i}$$

Bestimme die Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
A - \lambda_1 1 \mid 0 &= \left(\begin{array}{cc|c} 1-1+2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 4 & 1-1+2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 4 & 2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\to v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
A - \lambda_2 1 \mid 0 &= \left(\begin{array}{cc|c} 1-1-2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 4 & 1-1-2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 4 & -2\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\to v_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die zwei Lösungen:

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad z_2(t) = \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diese lassen sich zusammenführen zu:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir die allgemeine (reelle) Lösung durch:

$$y_h(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) \\ 2C_1\sin(2t) - 2C_2\cos(2t) \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

8. Analysis mehrerer Veränderlicher

Wir betrachten nun Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $n > 1$ sein darf. Zunächst werden wir versuchen, uns ein Bild von solchen Funktionen zu machen. Anschließend klären wir grundlegende Eigenschaften, etwa wie Stetigkeit. Außerdem werden wir uns der Differentiation von solchen Funktionen zuwenden und uns schließlich der Kurvendiskussion von Funktionsgraphen widmen.

⋆ ⋆ ⋆

Visualisierung von Funktionen in mehreren Veränderlichen. In der eindimensionalen Analysis arbeitet man gerne mit den Graphen von Funktionen. Man kann mit einer Funktion besser arbeiten, wenn man sie veranschaulichen kann – dadurch erkennt man kritische Punkte wie Extrema, Wendepunkte und Sattelpunkten.

Der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist per Definition die Menge

$$Graph\,(f) = G\,(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; f\,(x) = y\right\},$$

ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$. Damit wird es sehr schwierig eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $n \geq 3$ zu visualisieren. Für Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ können wir uns aber teilweise noch ein ganz gutes Bild machen.

Beispiel 8.1: Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (Siehe Abb. 47). Wenn wir bei dieser Funktion beispielsweise x_2 als Konstante betrachten und uns von dieser Funktion den Graphen ansehen, so erhalten wir eine ganz einfache Parabel, welche um x_2^2 nach oben verschoben ist. Wenn wir uns nun den Graphen von f veranschaulichen wollen, so können wir uns vorstellen, dass über jeder x_2-Koordinate eine nach oben verschobene Parabel lebt und erhalten damit das folgende Bild:

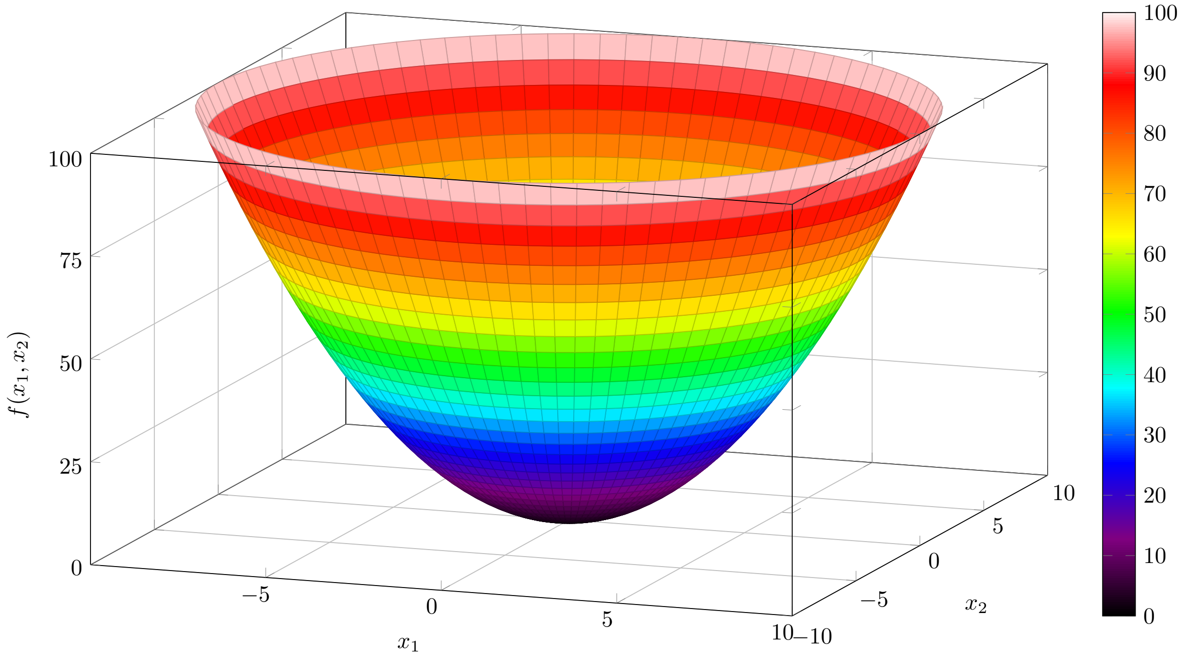


Abbildung 47: $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, „*elliptischer Paraboloid*“

Beispiel 8.2: Nun betrachten wir die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$. Wenn wir uns diese Funktion entlang $y = 0$ ansehen, erhalten wir eine nach oben geöffnete Parabel. Wenn wir das selbe entlang $x = 0$ tun, so erhalten wir eine nach unten geöffnete Parabel. Auf den beiden Diagonalen $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$ und $\{(x,-x) \in \mathbb{R}^2\}$ ist die Funktion konstant 0. Wenn wir diese Informationen „stetig miteinander verbinden" so erhalten wir Abb. 48:

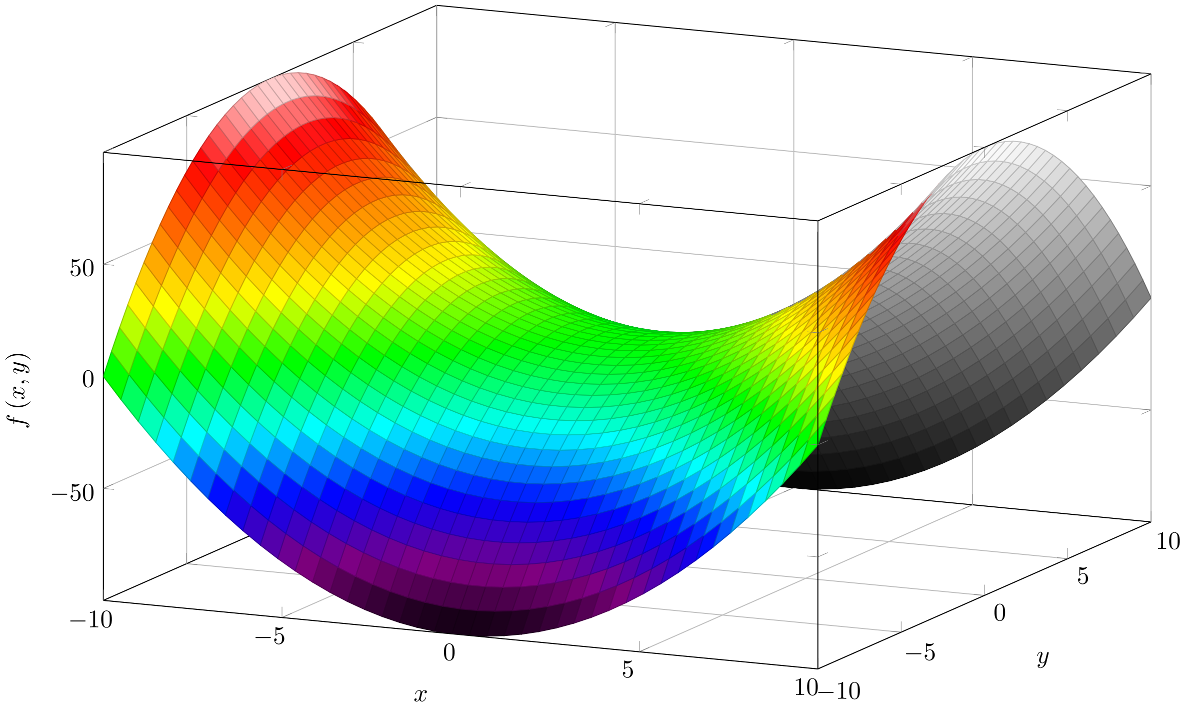


Abbildung 48: $f(x,y) = x^2 - y^2$, „*Hyperbolischer Paraboloid*" oder „*Sattelfläche*"

Beispiel 8.3: $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. (Abb. 49)

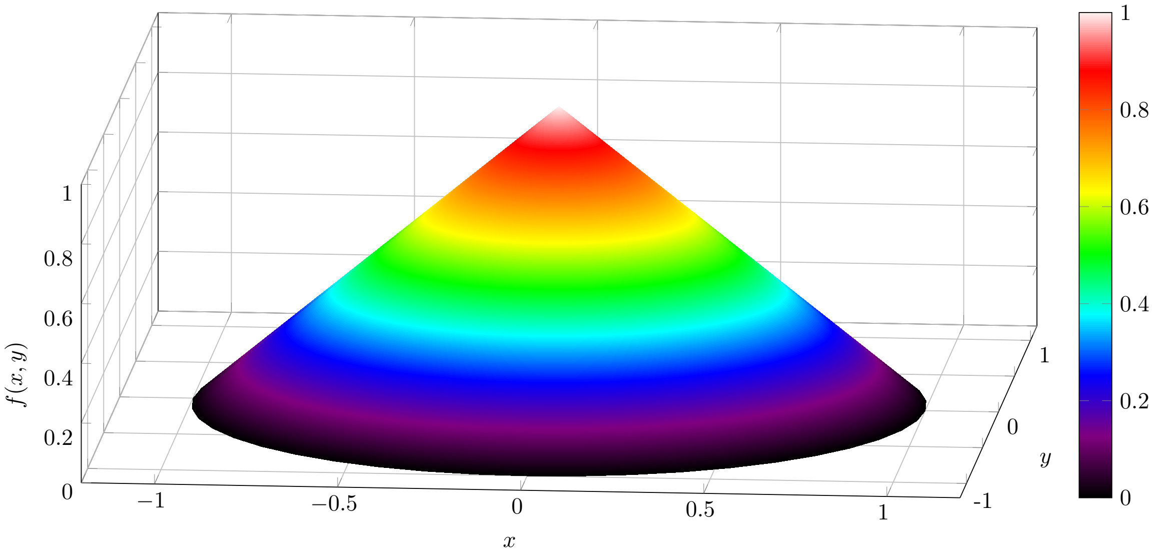


Abbildung 49: $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, „*Kegel*"

Hier fällt zunächst die besondere Form des Subtrahenden auf. Dieser ist nichts anderes als der *euklidische Betrag* und ist offenbar konstant auf Kreisringen mit Zentrum 0; ist (natürlich) streng monoton wachsend mit größerem Abstand zur 0. Das Bild, welches wir jetzt vor Augen haben wird noch einmal gekippt und um 1 nach oben verschoben.

Beispiel 8.4: Wir betrachten nun

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wieder fällt zuerst auf, dass diese Funktion bei der Diagonalen ohne die 0 konstant gleich $\frac{1}{2}$ ist. Bei der x- und der y-Achse ist die Funktion konstant 0. Dies kann durch Abb. 50 veranschaulicht werden. Zugegebenermaßen, fällt es nicht mehr ganz so leicht dies einzusehen, insbesondere da sich die Funktion bei $(0,0)$ unstetig verhält.

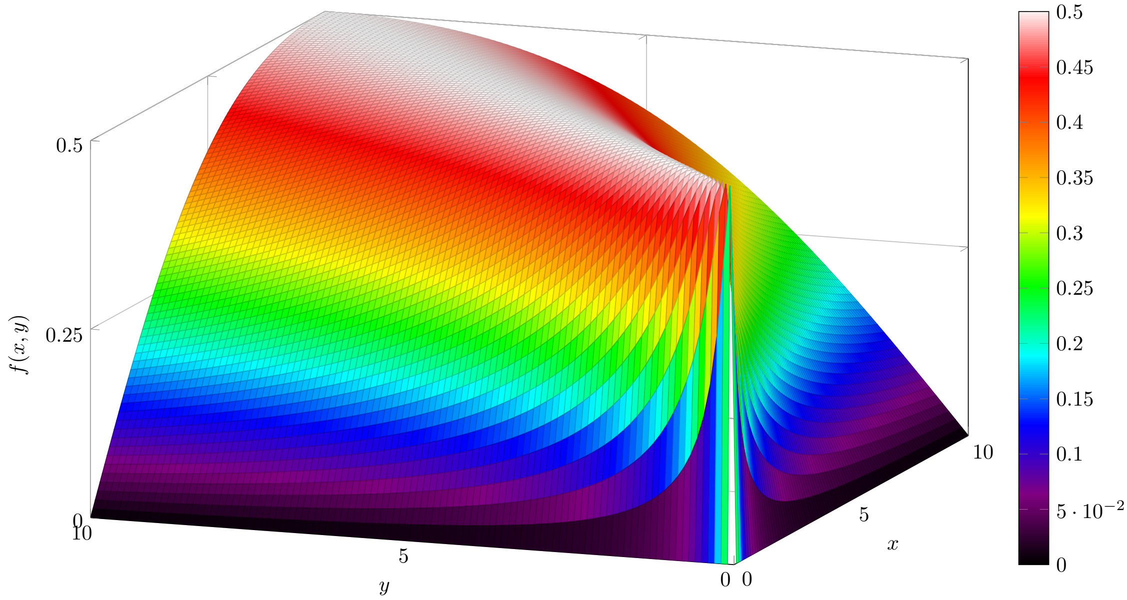


Abbildung 50: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ falls $(x,y) \neq (0,0)$

Beispiel 8.5: Zu guter Letzt werden wir noch kommentarlos den Graphen von zwei weiteren Funktionen betrachten, nämlich für $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ (Abb. 51) und für $f(x,y) = \sin(xy)$ (Abb. 52) liefern:

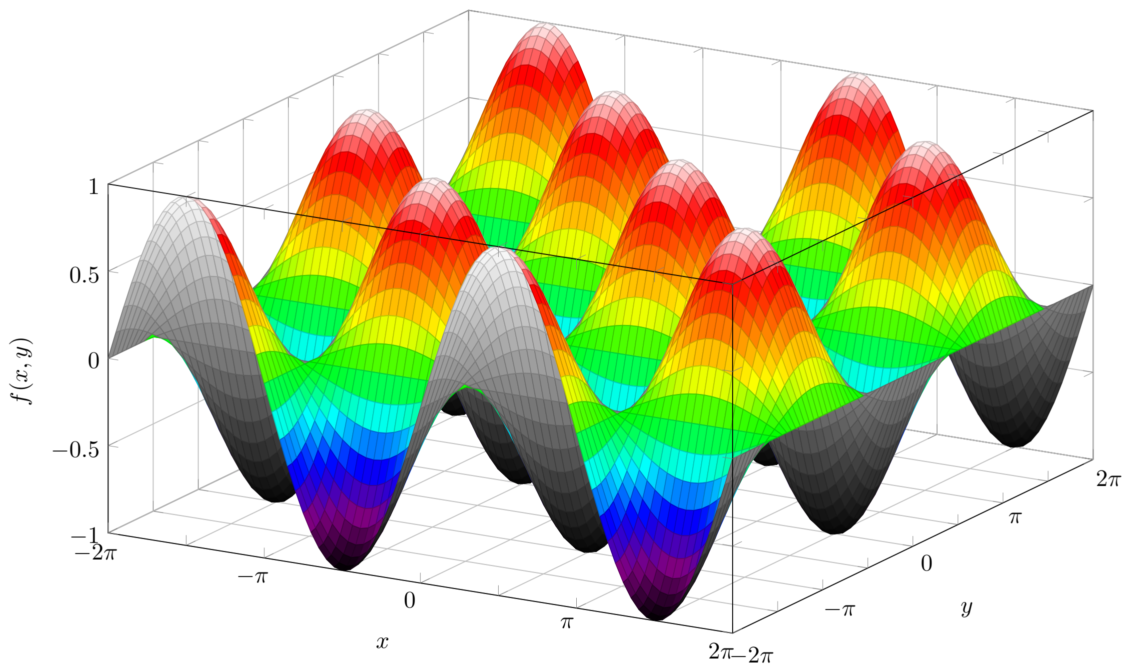


Abbildung 51: $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

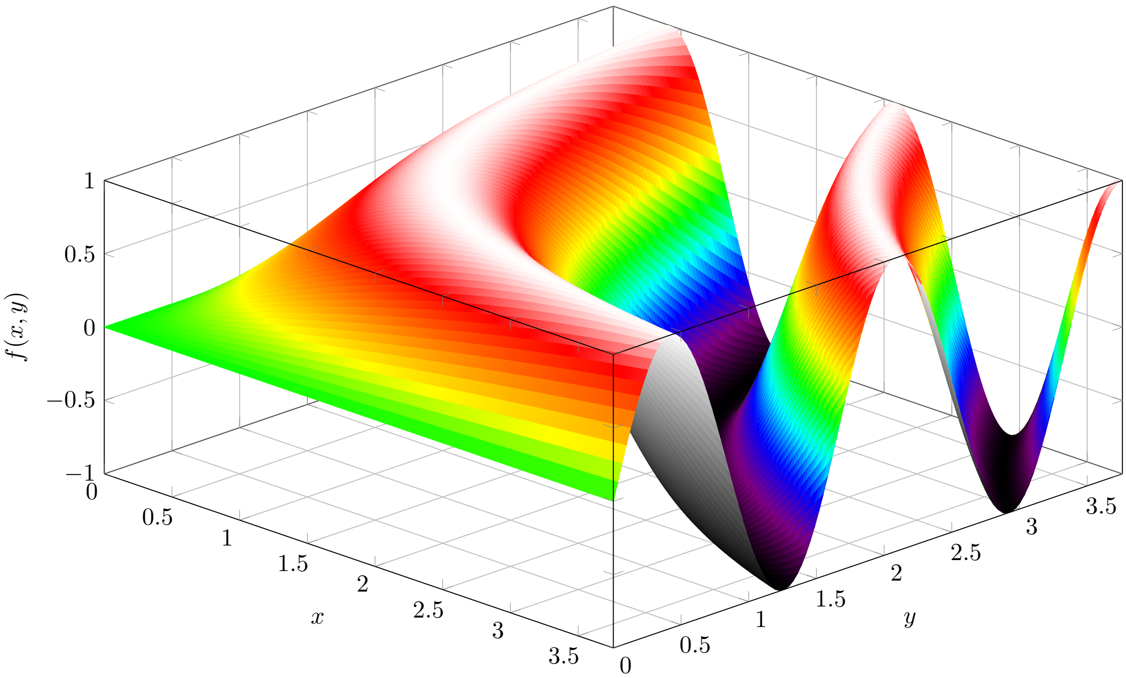
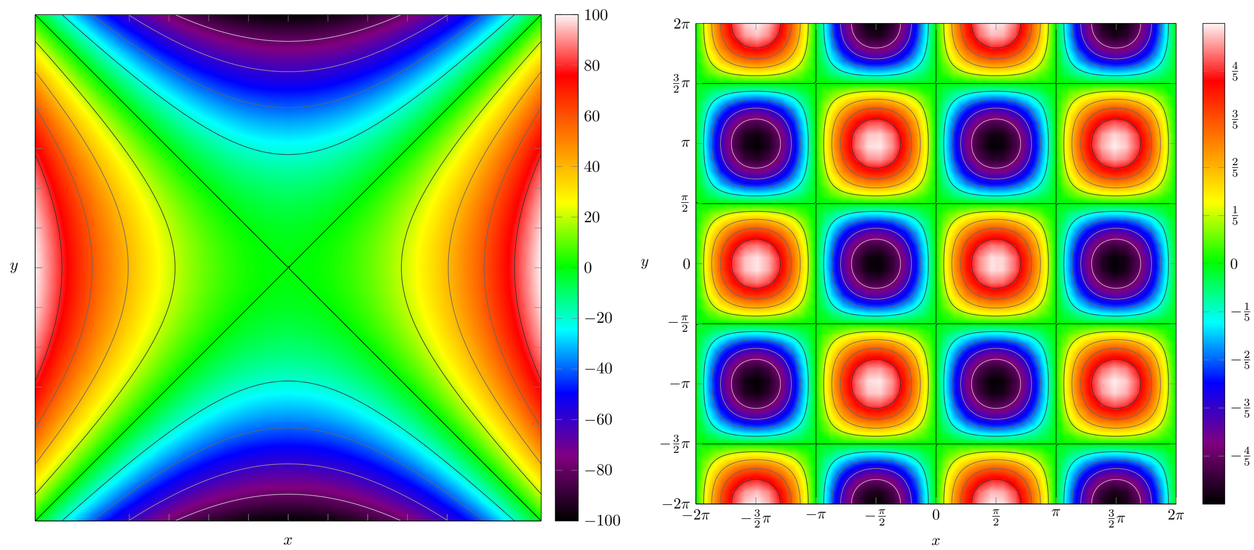


Abbildung 52: $f(x, y) = \sin(xy)$

⋆ ⋆ ⋆

Eine weitere Möglichkeit: Höhenlinien von Graphen. Der Graph einer Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sieht manchmal aus wie ein die Oberfläche eines Gebirges, also mit Bergen und Tälern. Auf Wanderkarten sind solche Höhenunterschiede durch Höhenlinien und/oder unterschiedlichen Farben markiert. Häufig werden so auch Graphen von Funktionen auf der Ebene skizziert. Dafür sind hier zwei Beispiele (Abbildung 53a und 53b). Bei unseren Bildern gilt: umso weißer (roter), desto höher – umso schwarzer (blauer), desto tiefer (Vergleichen Sie dazu die nebenstehende Farbskala):



(a) Höhenlinien der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$

(b) Höhenlinien: für welche Funktion?

Abbildung 53: Höhenlinien

⋆ ⋆ ⋆

Stetigkeit von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Wir haben eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig genannt, falls $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, das heißt, falls für alle Folgen $x_n \to a$ gilt, $f(x_n) \to f(a)$. Diese Definition würden wir gerne so übernehmen, müssen aber dazu vorher noch klären, was eine Folge im $\mathbb{R}^n$ ist, und was es für eine solche Folge heißt zu konvergieren. Dazu benötigen wir eine *Norm* auf dem $\mathbb{R}^n$.

Wir bedienen uns klassischerweise der euklidischen Norm, an die hier noch einmal erinnert sein soll:

Definition 8.6 – Euklidische Norm:

Für ein $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

und nennen den Wert $\|x\|$ den **euklidischen Betrag** von x.

Diese kennen wir schon aus dem Linearen Algebra Teil aus dem Kapitel über euklidische Vektorräume und wiederholen die Eigenschaften:

Satz 8.7:

Die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist tatsächlich eine Norm, es gilt also:

(a) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\|x\| = 0$ gdw. $x = 0$ (Definitheit)
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung)

Ganz analog zu $\mathbb{R}$ definieren wir nun:

Definition 8.8 – Folgen im $\mathbb{R}^n$:

Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Wir werden häufig $x_m = x(m)$ schreiben.

Definition 8.9 – Konvergenz:

Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ **gegen** $x^\star \in \mathbb{R}^n$ **konvergiert**, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\|x_n - x^\star\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben dann auch $x_n \to x^\star$.

Glücklicherweise müssen wir auch bei Folgen in $\mathbb{R}^n$ nicht viel mehr nachprüfen als bei Folgen in $\mathbb{R}$. Es gilt nämlich das Folgende:

Lemma 8.10:

Sei $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad x_n^i \to x^i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

Dabei bezeichnen wir mit dem Superskript i die i-te Komponente des Elements.

Beweis: Angenommen, eine der Komponentenfolgen $(x_n^i)_n$ konvergiert nicht gegen x^i, das hieße, es gibt ein $\varepsilon > 0$ sodass $\left|x_m^i - x^i\right| \geq \varepsilon$ für alle hinreichend großen $m \in \mathbb{N}$.

Dann ist aber

$$\|x_m - x\|^2 = \sum_j \left(x_m^j - x^j\right)^2 \geq \left(x_m^i - x^i\right)^2 \geq \varepsilon^2 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Wieder schreiben wir $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Es gelte nun auf der anderen Seite $x_m^i \to x^i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\left(x_m^i - x^i\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$ für alle $m \geq \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \left(x_m^j - x^j\right)^2 < \varepsilon^2.$$

$\boxtimes$

Beispiel 8.11: Die Folge $a_k = \left(\frac{1}{k+1}, -1\right)$ konvergiert nach dem obigen Satz gegen den Grenzwert $a = (0, -1)$. Die Folge $b_k = \left(\frac{1}{k+1}, (-1)^k\right)$ hingegen konvergiert nicht: Die erste Komponente der Folge geht gegen 0, die zweite Komponente besitzt aber keinen Grenzwert.

Nun definieren wir analog zum eindimensionalen Fall:

Definition 8.12 – Stetigkeit:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in $a \in A$, falls

$$\lim_{y \to a} f(y) = f(a).$$

Falls f stetig in a für alle $a \in A$ ist, so heißt f stetig.

Man beachte hierbei, dass es in höheren Dimensionen „mehr Richtungen gibt“, das heißt, konvergente Folgen können noch interessanter und vielfältiger als in $\mathbb{R}$. Das kennen Sie auch schon aus den komplexen Zahlen!

Beispiel 8.13: Folgende Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ konvergieren alle gegen $(0, 0)$:

- **(a)** $a_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$
- **(b)** $b_k = \left(0, \frac{1}{k}\right)$
- **(c)** $c_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$
- **(d)** $d_k = \left(\frac{1}{k}\cos(k), \frac{1}{k}\sin(k)\right)$

Die erste Folge bewegt sich nur auf der x-Achse in Richtung 0, die zweite nur auf der y-Achse, die dritte auf einer Diagonalen, und die vierte Folge bewegt sich auf einer Spirale. Man muss, um auf Stetigkeit zu prüfen, alle solche Folgen und „Bewegungsarten“ mit berücksichtigen.

Beispiel 8.14: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \left\|(x, y)\right\| \leq 1 \\ 0 & \text{falls } \left\|(x, y)\right\| > 1 \end{cases}$$

Geometrisch können wir uns gut vorstellen, was diese Funktion tut: Alle Punkte außerhalb des Einheitskreises werden auf 0 geschickt und alle Punkte innerhalb des Einheitskreises werden auf 1 geschickt. Wir erhalten also die x_1-x_2-Ebene, aus der wir die Einheitsscheibe „herausgeschnitten" haben und um eins nach oben verschieben:

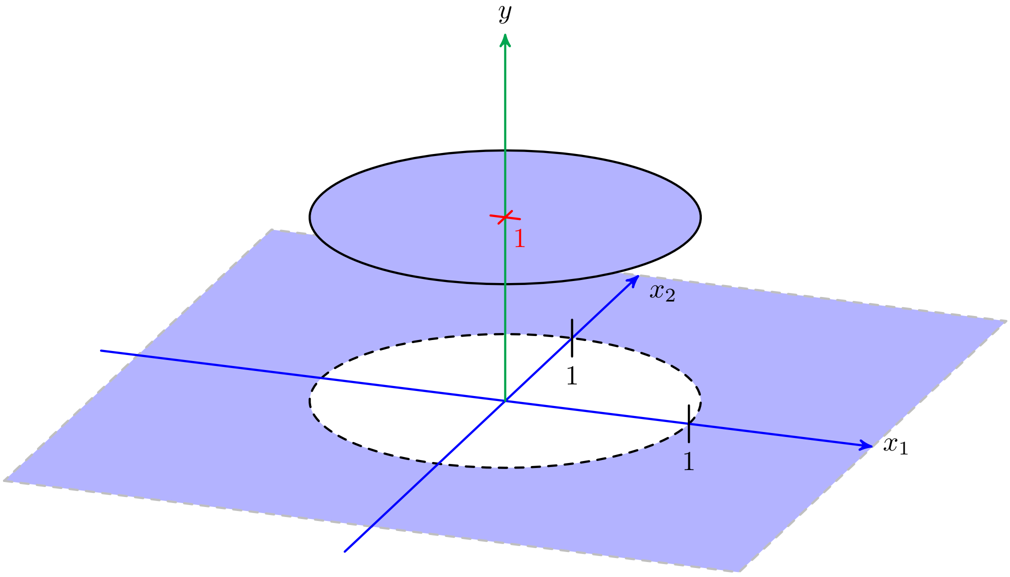


Abbildung 54: Der Graph von f: Eine aus der x_1-x_2-Ebene „herausgeschnittene" Einheitsscheibe

Dass dieser Graph nicht mit unserer Vorstellung von Stetigkeit vereinbar ist, wird an Abbildung 54 sofort klar. Wir können dies auch direkt beweisen: Betrachten wir die Folge $a_k = \left(1 + \frac{1}{k+1}, 0\right)$. Offenbar gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|a_k\| > 1 \implies \forall k \in \mathbb{N} \quad f(a_k) = 0$$

Der Grenzwert von a_k ist aber $a = (1, 0)$, also gilt $\|a\| \leq 1$ und somit $f(a) = 1 \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)$. Damit ist f nicht stetig in $(1, 0)$ (und genau genommen sogar auf dem gesamten Einheitskreis nicht).

Beispiel 8.15: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{k\to\infty} f(c_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{2\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist nachgewiesen dass f in $(0, 0)$ nicht stetig ist, denn ihr Funktionswert an dieser Stelle ist $(0, 0)$.

Aber es gilt noch mehr: Für die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ haben wir:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2} = 0$$

Damit ist klar, dass es sogar relevant ist, von welcher Seite wir uns der Funktion nähern. (Ähnliche Beispiele gibt es auch im eindimensionalen Fall, aber im mehrdimensionalen Fall gibt es eben mehr Richtungen als nur *von links* oder *von rechts*.)

⋆ ⋆ ⋆

Richtungsableitungen und Partielle Ableitungen. Wenn wir eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x ableiten, so erhalten wir Informationen über das lokale Verhalten dieser Funktion bei x. Ähnliches wollen wir auch für Funktionen in mehreren Veränderlichen erhalten. Was wir ohne großen Aufwand aus dem eindimensionalen Fall übernehmen können, ist das Verhalten von einer Funktion in einem Punkt *in eine bestimmte Richtung* zu untersuchen.

Definition 8.16 – Richtungsableitung:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ und $f\colon A \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Richtungsableitung von f in a in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot v) - f(x)}{h}.$$

Man schreibt dann $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ für den resultierenden Wert und sagt f ist in x in Richtung v differenzierbar, falls dieser Wert existiert.

Man beachte, dass die Richtungsableitung nur Informationen über das Verhalten von f *in eine ganz bestimmte Richtung* in sich trägt. Die Richtungsableitung in einem Punkt kann existieren, in eine andere Richtung muss sie damit nicht unbedingt ebenso existieren. Die Funktion kann sogar in diesem Punkt unstetig sein.

Eine besondere Sorte von Richtungsableitungen sind die *Partiellen Ableitungen.*

Definition 8.17 – Partielle Differenzierbarkeit:

Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heißt bei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ partiell nach x_i differenzierbar, falls die Richtungsableitung in Richtung des i-ten Einheitsvektors existiert, das heißt falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

existiert. Man schreibt dann $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ für den resultierenden Wert. Die Funktion f heißt in $x \in A$ partiell differenzierbar, falls f für alle $i = 1, \ldots, n$ nach x_i partiell differenzierbar ist.

Bemerkung 8.18: Partielle Ableitungen sind wichtige Objekte in der Mathematik, die man seit langer Zeit studiert. Daher haben sich viele verschiedene Schreibweisen für das selbe Ding etabliert, von denen man sich nicht verwirren lassen sollte. Hier ist eine Auswahl:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n),\ \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n),\ \partial_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n),\ \partial_i f(x_1, \ldots, x_n),$$
$$D_{x_i} f(x_1, \ldots, x_n),\ f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n),\ f_i(x_1, \ldots, x_n),\ \text{etc.}$$

⋆ ⋆ ⋆

Partielle Ableitungen zu berechnen, ist in konkreten Fällen nicht kompliziert. Wenn wir die i-te Partielle Ableitung einer Funktion in einem Punkt berechnen wollen, so spielt dabei nur die Variable x_i eine Rolle. Alle anderen Veränderlichen können wir daher bei einer konkreten Rechnung wie Konstanten behandeln.

Damit übertragen sich viele Rechenregeln aus der Analysis in *einer* Veränderlichen.

Beispiel 8.19: Wir wollen die beiden partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = ax^2 + xy + y$$

berechnen. Nach der voran gegangenen Erklärung haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2ax + y \quad \text{und} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x + 1. \end{aligned}$$

Beispiel 8.20: Nicht wirklich schwerer leiten Sie die schon bekannte Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ partiell ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)\,y - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)\,x - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Achtung!

Wie schon angedeutet, müssen Funktionen, deren sämtliche partielle Ableitungen existieren, **nicht** stetig sein – wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 8.21: Wir betrachten wieder $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Diese Funktion ist in 0 nicht stetig, aber in beiden Richtungen partiell differenzierbar. Dazu rechnen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und für $\frac{\partial f}{\partial y}$ genau analog.

⋆ ⋆ ⋆

Rechenregeln für partielle Ableitungen. Da wir beim partiellen Ableiten nicht viel mehr gemacht haben als beim eindimensionalen Ableiten, übertragen sich viele Rechenregeln einfach. Dazu führen wir folgenden wichtigen Operator ein:

Definition 8.22 – Gradient, Nabla Operator:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und es existieren alle partiellen Ableitungen von f in x.
Dann definieren wir:

$$\nabla f = \operatorname{grad}(f)(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

Dieser Vektor heißt der Gradient von f in x. In der Physik wird dieser auch oft als Nabla Operator ∇f bezeichnet.

Lemma 8.23:

Seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt (in allen sinnvollen Punkten):

(a) (Linearität) $\operatorname{grad}(\lambda f + \eta g) = \lambda \cdot \operatorname{grad}(f) + \eta \cdot \operatorname{grad}(g)$

(b) (Produktregel) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = \operatorname{grad}(f) \cdot g + f \cdot \operatorname{grad}(g)$

(c) (Quotientenregel) $\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \operatorname{grad}(f) - f \cdot \operatorname{grad}(g)}{g^2}$

Dabei meinen wir mit der umgangssprachlichen Einschränkung „in allen sinnvollen Punkten“ all jene Punkte, in denen die Ausdrücke wohldefiniert sind – also in jenen Punkten, in denen alle partiellen Ableitungen tatsächlich existieren oder in (c) alle Punkte, in denen g nicht verschwindet.

Sie haben nun schon so viel Erfahrung, dass Sie solche Einschränkungen selbst ergänzen können!

Beweis von Lemma 8.23: Alle diese Regeln folgen aus den entsprechenden Regeln aus der eindimensionalen Analysis. Beachten Sie, dass Sie für die Berechnung des i-ten Eintrages des Gradienten nichts anderes als eine Funktion mit *einer* Veränderlichen ableiten. ☒(Lemma 8.23)

Etwas komplizierter ist es, die aus dem Eindimensionalen bekannte Kettenregel zu übersetzen:

Lemma 8.24 – Kettenregel:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, seien $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und sei $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$h(x_1, \ldots, x_m) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)\right)$$

. Wenn nun die i-te partielle Ableitung von h existiert, so gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)\right) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Dies folgt *nicht* sofort aus dem eindimensionalen Fall. Der Beweis ist durchaus etwas aufwändiger und wir werden ihn nicht führen!

⋆ ⋆ ⋆

Ableitungen höherer Ordnung. Für eine ausreichend stetige und differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist jede i-te partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ wieder eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Eine solche ist dann vielleicht wieder bezüglich einer Richtung differenzierbar.

Dann schreiben wir für die j-te partielle Ableitung der i-ten partiellen Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \ldots, x_n)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Beispiel 8.25: Wir haben weiter oben schon die Funktion $f(x,y) = ax^2 + xy + y$ nach beiden Richtungen partiell differenziert. Nun rechnen wir (alle Möglichkeiten):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + xy + y\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2ax + y) = 2a$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2+xy+y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}(2ax+y) &= 1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(ax^2+xy+y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}(x+1) &= 0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(ax^2+xy+y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(x+1) &= 1
\end{aligned}$$

Beispiel 8.26: Nun wollen wir uns noch mal der Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$ zuwenden und rechnen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy\left(x^2-3y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}.$$

Diese Rechnungen sind wieder einfache eindimensionale Analysis. Bei beiden Beispielen erkennen wir eine auffällige Symmetrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Man kann eine allgemeine Gültigkeit einer solchen Symmetrie vermuten. Dies bestätigt der folgende Satz:

Satz 8.27 – Satz von Schwarz:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Falls für $i,j = 1,\ldots,n$ die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in $x^\star \in \mathbb{R}^n$ existiert und dort stetig ist, so existiert in $x^\star$ auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ und es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^\star\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(x^\star\right)$$

Auch diesen Satz werden wir nicht beweisen.

Bemerkung 8.28: Damit sind natürlich unter der entsprechenden Voraussetzung auch beliebige, endlich lang verkettete partielle Ableitungen kommutativ.

⋆ ⋆ ⋆

Totales Differenzial und Differenzierbarkeit. Bisher haben wir (nur) die partiellen Ableitungen einer Funktion in mehreren Veränderlichen betrachtet. Diese beschreiben das Änderungsverhalten der Funktion in der jeweiligen Richtung (der Ableitung). So bezeichnet die Ableitung an einer Stelle den Anstieg der Funktion an dieser Stelle. Diesen können wir durch den Quotienten aus dem infinitesimalen Änderungsverhalten der Funktionswerte zu den Argumenten annähern, also Δy zu Δx und somit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (siehe auch Abbildung 55).

Wenn man zum Grenzwert übergeht, erhält man aus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schließlich den Anstieg an der betrachteten Stelle, die mit $f'(x)$ oder eben $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$ bezeichnet wird. Somit kann symbolisch das Änderungsverhalten der Funktion durch die Funktionalgleichung $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ bzw. $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ dargestellt werden.

Hat man eine Funktion in mehreren Veränderlichen lässt sich dieses Prinzip fortsetzen. Wird also das infinitesimale Verhalten in Richtung x_i durch die partielle Ableitung in Richtung e_i, also x_i,

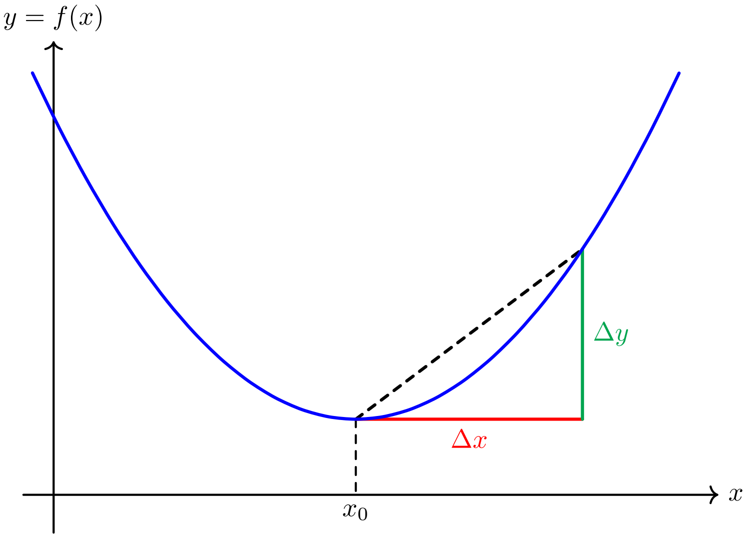


Abbildung 55: Anstiegsdreieck an einer Funktion

dargestellt, so lässt sich eine potenzielle Veränderung in allen Richtungen durch die folgende Summe ausdrücken:

Definition 8.29 – Totales Differenzial:

Für eine Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ nennt man

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

das **totale Differenzial** der Funktion f. Dabei gibt es das Änderungsverhalten der Funktion in allen Richtungen wieder.

Aber wann ist überhaupt eine Funktion in mehreren Veränderlichen (total) differenzierbar? Um dies zu verstehen, können wir das bekannte Prinzip der punktweisen Linearisierung der Funktion weiterverfolgen. Im Eindimensionalen beschreibt eine Tangentengerade eine solche Annäherung, die durch den Anstieg an dem betrachteten Punkt charakterisiert ist. Wir erhalten die Tangentengleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

Reellwertige Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ benötigen andere Linearisierungen. Hier kommt der Begriff der *Tangentialebene* ins Spiel. Für $n = 2$ kann man sich dies an den Graphen sehr gut vorstellen, da diese Tangentialebenen in der Tat Ebenen im dreidimensionalen Raum sind. Diese lässt sich ebenfalls durch eine Gleichung beschreiben, die sehr an die obige erinnert:

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \operatorname{grad}(f)(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Eine Funktion heißt nun in einem Punkt *total differenzierbar*, wenn sie in diesem Punkt durch eine solche Ebene angenähert werden kann – wie auch eine Tangente in einem Punkt eine Funktion in einer Veränderlichen approximieren kann.

Bemerkung 8.30: Existieren alle partiellen Ableitungen und sind diese darüber hinaus stetig, dann ist die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch total differenzierbar. Total differenzierbare Funktionen sind selbst stetig. Damit ist die totale Differenzierbarkeit eine echt stärkere Eigenschaft, als die bloße Existenz partieller Ableitungen.

Beispiel 8.31: Die Funktion aus Beispiel 8.25 ist offenbar total differenzierbar, weil alle partielle Ableitungen existieren und stetig sind. Die obige Bemerkung hilft uns aber nicht bei der Funktion aus Beispiel 8.26, da die partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ nicht stetig ist. (Wie zeigen Sie das?)

⋆ ⋆ ⋆

Kurvendiskussion für Funktionen in mehreren Veränderlichen. Die (auch aus der Schule schon) bekannte Kurvendiskussion im eindimensionalen Fall werden wir in diesen Kapitel für Funktionen in mehreren Veränderlichen weiterentwickeln und starten mit Extrempunkten:

Definition 8.32 – Lokales Maximum:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ein $x^\star \in \mathbb{R}^n$ heißt lokales Maximum von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass gilt:

$$f\left(x^\star\right) \geq f\left(x\right) \ \text{ für alle } \ x \in B_\varepsilon\left(x^\star\right) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \left\|y - x^\star\right\| < \varepsilon\}.$$

Analog definieren wir lokale Minima.

Bemerkung 8.33: Wir nennen $B_\varepsilon\left(x^\star\right)$ einen *Epsilon-Ball um* $x^\star$. Im Eindimensionalen entspricht das genau der Epsilonumgebung, die wir bei der Folgenkonvergenz schon kennengelernt haben.

Ein anschaulich plausibles und notwendiges Kriterium für die Existenz eines Extremums ist das Verschwinden des Gradienten an dieser Stelle:

Lemma 8.34:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x^\star$ stetig, partiell differenzierbar und habe ein lokales Extremum. Dann gilt: $\operatorname{grad}\left(f\right)\left(x^\star\right) = 0$.

Man nennt ein solches $x^\star$, an dem der Gradient verschwindet, einen *kritischen* oder auch *stationären* Punkt.

Beispiel 8.35: Wir erinnern uns an die Funktion $f\left(x, y\right) = x^2 + y^2$. Wir haben dann $f_x\left(x, y\right) = 2x$ und $f_y\left(x, y\right) = 2y$. Damit ist der einzige kritische Punkt der Ursprung $(0, 0)$. Wie wir schon gesehen haben (anhand Abbildung 47), ist der Punkt $(0, 0)$ ein Minimum (sogar ein globales).

Beispiel 8.36: Jetzt erinnern wir uns an die Funktion $f\left(x, y\right) = x^2 - y^2$. Dann haben wir $f_x\left(x, y\right) = 2x$ und $f_y\left(x, y\right) = -2y$. Wieder sehen wir, dass der einzige kritische Punkt der Ursprung ist. Aber dieser ist offenbar *kein* lokales Extremum (Abbildung 48). Damit sehen wir, analog dem eindimensionalen Fall, dass das bloße Verschwinden des Gradienten kein hinreichendes Kriterium für das Aufkommen eines lokalen Extremums ist.

Für eine bessere Analyse der Funktion brauchen wir mehr Informationen über die Funktion, welche wir betrachten. Dazu definieren wir einen weiteren Ableitungsoperator:

Definition 8.37 – Hessematrix:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ausreichend stetig und differenzierbar). Dann definieren wir die Hessematrix von f im Punkt $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\operatorname{Hess}(f)(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{H}_f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Die Hessematrix können wir nun mithilfe von Methoden aus der Linearen Algebra untersuchen. Dabei wollen wir an folgende Definition erinnern:

Definition 8.38 – Definitheit:

Sei $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wir definieren die Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $f_A(x) = x^t A x$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$. Wir sagen dann:

(a) A ist positiv definit, falls $f_A(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
(b) A ist negativ definit, falls $f_A(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
(c) A ist indefinit, falls es $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f_A(x) < 0$ und $f_A(y) > 0$.

Gilt keine strikte Ungleichheit in **(a)** bzw. **(b)**, so nennen wir A positiv (negativ) semidefinit.

Mit diesen Definitionen können wir nun hinreichende Kriterien dafür definieren, wann ein kritischer Punkt ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt ist.

Lemma 8.39:

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $x^\star = (x_1^\star, \dots, x_n^\star) \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt von f (also $\operatorname{grad}(f)(x_1^\star, \dots, x_n^\star) = 0$). Dann gilt:

(a) f hat in $x^\star$ ein lokales Minimum, falls $\mathrm{H}_f(x^\star)$ positiv definit ist,
(b) f hat in $x^\star$ ein lokales Maximum, falls $\mathrm{H}_f(x^\star)$ negativ definit ist,
(c) f hat in $x^\star$ einen Sattelpunkt, falls $\mathrm{H}_f(x^\star)$ indefinit ist.

Beispiel 8.40: Wir betrachten die Funktion $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Die Hessematrix kennen wir schon; sie ist von der Form:

$$\mathrm{H}_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir die Funktion $f_{\mathrm{H}_g(x_1,x_2)}$ und es gilt

$$f_{\mathrm{H}_g(x_1,x_2)}(x_1, x_2) = 2 \cdot (x_1^2 + x_2^2).$$

Damit haben wir $f_{\mathrm{H}_g(x_1,x_2)}(x_1, x_2) > 0$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und somit ist die Matrix $\mathrm{H}_g(x_1, x_2)$ an allen Punkten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ positiv definit. Damit haben wir im einzigen kritischen Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum.

Beispiel 8.41: Wir betrachten die Funktion $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ und untersuchen sie im Punkt $(0, 0)$ auf Extrema. Hier haben wir folgende Hessematrix:

$$\mathrm{H}_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hier haben wir aber $f_{\mathrm{H}_g(x)}(1,0) = 2$ und $f_{\mathrm{H}_g(x)}(0,1) = -2$. Damit ist die Matrix indefinit und wir haben in $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

Beachten Sie, dass nach dem Satz von Schwarz die betrachteten Hessematrizen symmetrisch sind. Wir wissen aus der Linearen Algebra, dass die Definitheit reell symmetrischer Matrizen rasch über ihre Eigenwerte bestimmt werden kann:

Satz 8.42:

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

$$\begin{array}{rcll} A \text{ ist positiv definit,} & \Leftrightarrow & \lambda_i > 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, n \\ A \text{ ist positiv semidefinit,} & \Leftrightarrow & \lambda_i \geq 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, n \\ A \text{ ist negativ definit,} & \Leftrightarrow & \lambda_i < 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, n \\ A \text{ ist negativ semidefinit,} & \Leftrightarrow & \lambda_i \leq 0 & \text{für alle } i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Das kann manchmal helfen, zum Beispiel:

Beispiel 8.43: Die Hessematrix aus Beispiel 8.40 hat offenbar den Eigenwert $\lambda = 2$ (mit geometrischer und algebraischer Vielfacheit 2). Damit ist die Matrix positiv definit. Die Matrix aus Beispiel 8.41 hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$. Damit ist sie indefinit.

Ist die Hessematrix in einem kritischen Punkt der Funktion nur positiv oder negativ *semidefinit*, so versagt dieses Kriterium für die Charakterisierung von Extremstellen und wir müssen auf andere Methoden zurückgreifen:

Ebenfalls wegen der Symmetrie der Hessematrix und im Falle $n = 2$, also einer Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gibt es noch ein weiteres Kriterium, welches Ihnen weiterhelfen kann – es basiert auf einen Satz über die so genannten Hauptminore, den Sie in der Linearen Algebra kennengelernt haben und nun hilfreiche Dienste leistet:

Satz 8.44:

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ausreichend stetig und differenzierbar. Es bezeichnet $\delta(x_1, x_2) := \det\big(\mathrm{H}_f(x_1, x_2)\big)$ die Determinante der Hessematrix von f in Abhängigkeit von x_1 und x_2. Dann besitzt f an der Stelle $(x_1^\star, x_2^\star)$ ein lokales Extremum, wenn $\mathrm{grad}\,(f)\,(x_1^\star, x_2^\star) = 0$ und $\delta(x_1^\star, x_2^\star) > 0$ gilt.

Dabei liegt im Falle von $f_{x_1x_1}(x_1^\star, x_2^\star) < 0$ ein lokales Maximum und im Falle von $f_{x_1x_1}(x_1^\star, x_2^\star) > 0$ ein lokales Minimum vor.

Ist aber $\delta(x_1^\star, x_2^\star) < 0$, so liegt kein Extrempunkt, wohl aber ein Sattelpunkt vor.

Überzeugen Sie sich anhand unserer Beispiele, wie einfach dieses Kriterium anzuwenden ist. Wie Sie sehen, gibt es sehr viele unterschiedliche Wege, anhand der Hessematrix Eigenschaften der Funktion zu bestimmen.

⋆ ⋆ ⋆

Extremwerte unter Nebenbedingungen bestimmen. Im Alltag werden Extremwerte unter Umständen nicht über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion gesucht. Manchmal sind

Punkte interessant, die eine zusätzliche Nebenbedingung erfüllen. Wie man diese bestimmen kann, untersuchen wir nun im Folgenden. Hierfür gibt es eine grundlegende Methode – der *Lagrangesche Ansatz*: Sie suchen die Extrempunkte der differenzierbaren Funktion $y = f(x_1, x_2)$ unter all denjenigen Paaren (x_1, x_2), die die stetig differenzierbare Nebenbedingung $G(x_1, x_2) = 0$ erfüllen.

Hierzu betrachten Sie die lagrangesche Hilfsfunktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot G(x_1, x_2).$$

Bestimmen Sie nun all diejenigen kritischen Paare (x_1, x_2), die die notwendige Bedingung $\text{grad}(L(x_1, x_2, \lambda)) = 0$ erfüllen. Es soll also gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}L(x_1, x_2, \lambda) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_2}L(x_1, x_2, \lambda) \;=\; \frac{\partial}{\partial \lambda}L(x_1, x_2, \lambda) \;=\; 0.$$

Bestimmen Sie anschließend für jeden solchen kritischen Punkt den entsprechenden Funktionswert. Diejenigen kritischen Punkte mit den größten Funktionswerten sind die gesuchten Maxima; die mit den kleinsten die gesuchten Minima. Aber Achtung! Prüfen Sie dabei, ob es sich wirklich um ein Extremum handelt: Hierfür gibt es keine gute Methode. Sie können sich die Lage klarer gestalten, indem Sie eine Skizze betrachten oder Punkte in der Nähe des kritischen Punktes ausrechnen. Beides ist allerdings mit Vorsicht zu genießen.

Eine weitere Möglichkeit bietet der Satz von Weierstraß: Dieser besagt, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge stets ihr Maximum und Minimum annehmen muss. Beachten Sie dabei, dass (total) differenzierbare Funktion in der Tat stetig sind.

Beispiel 8.45: Es ist Zeit für ein praktisches Beispiel: Beetplanung im Kleingärtnerverein. Sie haben Blumen für 10 Meter und möchten damit das beste Beet Ihres Gartens rechteckig umranden. Sie fragen sich, welche Maße das Beet haben muss, damit eine möglichst große Beetfläche entsteht. Eine klare Fragestellung und nach näherer Analyse eine Extrempunktaufgabe mit Nebenbedingung.

Sie müssen zuerst die Funktion f und die Nebenbedingung G finden: Das zu planende Rechteck hat einen festen Umfang, nämlich zehn Meter. Die Größe, die dabei extrem werden soll, ist der Flächeninhalt des Rechtecks. Somit ist $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ und $G(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - 10$. (Überlegen Sie sich, warum dies so ist!?)

Wir betrachten nun die lagrangesche Hilfsfunktion:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot G(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 + \lambda(2x_1 + 2x_2 - 10).$$

Anschließend berechnen wir die partiellen Ableitungen und setzen diese gleich null:

$$\begin{array}{rclclcl}
\frac{\partial}{\partial x_1}L(x_1, x_2, \lambda) & = & \frac{\partial}{\partial x_1}\big(x_1 \cdot x_2 + \lambda\,(2x_1 + 2x_2 - 10)\big) & = & x_2 + 2\lambda & = & 0 \\
\frac{\partial}{\partial x_2}L(x_1, x_2, \lambda) & = & \frac{\partial}{\partial x_2}\big(x_1 \cdot x_2 + \lambda\,(2x_1 + 2x_2 - 10)\big) & = & x_1 + 2\lambda & = & 0 \\
\frac{\partial}{\partial \lambda}L(x_1, x_2, \lambda) & = & \frac{\partial}{\partial \lambda}\big(x_1 \cdot x_2 + \lambda\,(2x_1 + 2x_2 - 10)\big) & = & 2x_1 + 2x_2 - 10 & = & 0
\end{array}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt sofort, dass $x_1 = -2\lambda = x_2$ ist. Eingesetzt in die dritte Gleichung erhalten Sie:

$$0 = 2x_1 + 2x_2 - 10 = 2 \cdot (-2\lambda) + 2 \cdot (-2\lambda) - 10 = -8\lambda - 10$$

Somit folgt schließlich, dass $\lambda = -\frac{5}{4}$ ist und damit auch $x_1 = x_2 = -2\lambda = \frac{5}{2}$. Der gesuchte kritische Punkt ist daher $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

Als Funktionswert für diesen kritischen Punkt erhalten Sie $f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = 6,25$ Quadratmeter Beetfläche. Dass der Extrempunkt auch wirklich existieren musste, können Sie an dieser Stelle mit dem Satz von Weierstraß erkennen: Aufgrund der Flächenbegrenzung wissen Sie, dass nur positive Seitenlängen des Rechtecks unter zehn Meter in Frage kommen. Somit müssen Sie gar nicht nach Lösungen auf ganz $\mathbb{R}^2$ suchen, sondern es reicht beispielsweise schon die kompakte Menge $[0, 10] \times [0, 10]$. Fertig – das Beet kann angelegt werden.

⋆ ⋆ ⋆

Haben Sie es im letzten Beispiel bemerkt, Sie hätten auch die Nebenbedingung $G(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - 10 = 0$ nach einer der beiden Variablen umstellen können, also etwa $x_2 = 5 - x_1$. Diesen Ansatz können Sie bequem in die Funktionsgleichung einsetzen und erhalten

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (5 - x_1) = 5x_1 - x_1^2.$$

Wie Sie sehen, hängt diese Funktion nur noch von *einer* Variablen ab. Eine kleine Kurvendiskussion der Parabel $g(x_1) = -x_1^2 + 5x_1$ zeigt Ihnen die gesuchte Lösung: Die erste Ableitung null gesetzt ergibt: $g'(x_1) = 5 - 2x_1 = 0$, also $x_1 = \frac{5}{2}$. Da die zweite Ableitung an dieser Stelle negativ ist, haben Sie ein Maximum: $g''(x_1) = -2$. Eingesetzt erhalten Sie schließlich ebenfalls: $x_2 = 5 - x_1 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Dieses so genannte *Einsetzverfahren* funktioniert allerdings nur, wenn sich die Nebenbedingung *explizit* nach einer Variablen ausdrücken lässt. Es gibt natürlich viele implizite Funktionen, die sich nicht einfach explizit umformen lassen, sodass das Verfahren von Lagrange seine Berechtigung hat – wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 8.46: In einer Kuppel eines Planetariums, die die Form einer oberen (Einheits-)Halbkugel hat, sollen zusätzliche Befestigungspunkte markiert werden, um Beleuchtungskörper oberhalb einer Besucherplattform anbringen zu können: Oberhalb eines am Boden festgelegten Kreises soll die maximale und die minimale Höhe bis zur Kuppel bestimmt werden, da an diesem Punkt die Besucher stehen werden. Betrachten Sie dazu die Abbildung 56.

Die Halbkugel ist durch die Gleichung $y = f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ gegeben. der markierte Kreis entspreche der Kreisgleichung $\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Damit kommen nur x_1-Punkte zwischen $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, sowie x_2-Punkte zwischen $-\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$ in Frage.

Die Nebenbedingung können Sie nun leicht als $G(x_1, x_2) = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{9} = 0$ ausdrücken. An dieser Stelle können Sie diese quadratische Gleichung nicht einfach explizit nach einer der beiden Variablen umstellen, sodass Sie das Verfahren von Lagrange anwenden. Insbesondere sind die beiden Funktionen, nämlich $f(x_1, x_2)$ und auch $G(x_1, x_2)$, stetig partiell differenzierbar.

Sie betrachten nun die lagrangesche Hilfsfunktion

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot G(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} + \lambda \cdot \left(\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{9}\right)$$

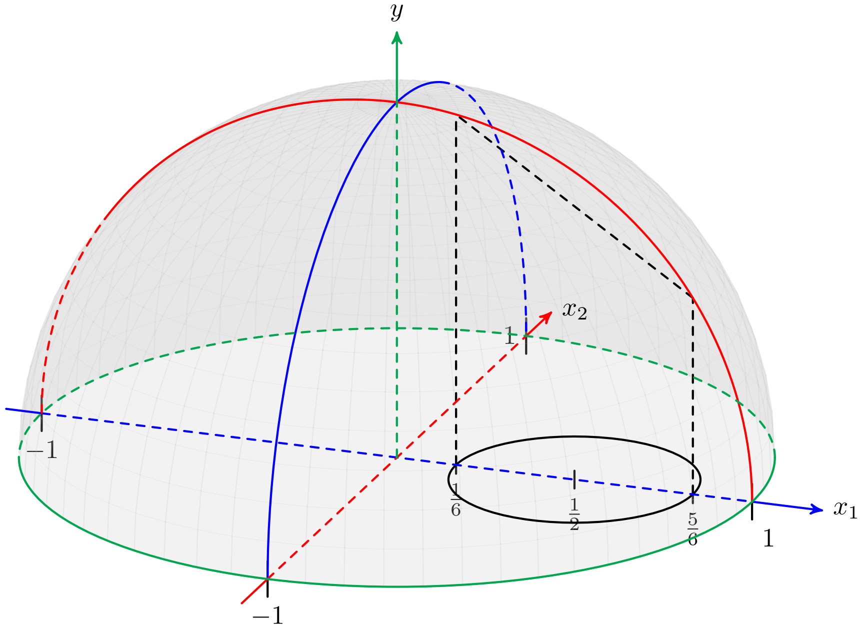


Abbildung 56: Die halbkugelförmige Kuppel eines Planetariums mit einem speziellen Kreis am Boden

und setzen die jeweiligen partiellen Ableitungen gleich null:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}L(x_1,x_2,\lambda) &= \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} + 2\lambda\left(x_1-\frac{1}{2}\right) &&= 0\\
\frac{\partial}{\partial x_2}L(x_1,x_2,\lambda) &= \frac{-x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} + 2\lambda x_2 = x_2\cdot\left(2\lambda-\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\right) &&= 0\\
\frac{\partial}{\partial \lambda}L(x_1,x_2,\lambda) &= \left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{9} &&= 0
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass $x_2 = 0$ oder $2\lambda - \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} = 0$ gilt. Im letzten Fall erhalten wir einen Widerspruch, denn wenn Sie $2\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}$ in die erste Gleichung eingesetzten, so erhalten Sie keine Nullstelle:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}L(x_1,x_2,\lambda) &= \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} + 2\lambda\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\cdot\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} &&\neq 0
\end{aligned}$$

Somit muss $x_2 = 0$ sein. Setzen wir diese Erkenntnis in die dritte Gleichung ein, erhalten wir:

$$0 = \left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 - \frac{1}{9} = \left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{9}.$$

Also erhalten wir für x_1 zwei potenzielle Lösungen $x_1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ oder $x_1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Die gesuchten kritischen Paare sind daher $\left(\frac{1}{6},0\right)$ und $\left(\frac{5}{6},0\right)$. Die Analyse der Funktionswerte ergibt, dass $f\left(\frac{1}{6},0\right) = \frac{35}{36} > \frac{1}{2} = f\left(\frac{5}{6},0\right)$ ist. Somit ist $\left(\frac{1}{6},0\right)$ das gesuchte Maximum und $\left(\frac{5}{6},0\right)$ das gesuchte Minimum. Prüfen Sie diese Erkenntnis noch einmal anhand der Abbildung 56.

⋆ ⋆ ⋆

Beachten Sie, dass Sie beim letzten Beispiel zwar die Nebenbedingung nicht explizit nach einer Variablen hätten umstellen können, da die Quadrate gestört haben, aber in dieser konkreten Aufgabe hätte es dennoch für ein Weiterkommen genügt: Sie hätten die Nebenbedingung natürlich wie folgt umstellen können:

$$x_2^2 = \frac{1}{9} - \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2$$

Mit diesem Quadrat hätten Sie aber weiter machen können, da x_2 in der Funktionsgleichung auch nur quadratisch vorkommt. Somit erhalten Sie eingesetzt:

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{1 - x_1^2 - \left(\tfrac{1}{9} - \left(x_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{\tfrac{8}{9} - x_1^2 + \left(x_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2}.$$

Dies ist erneut eine Funktion in einer Variablen x_1, die sie klassisch untersuchen können. Die erste Ableitung ergibt den folgenden Quotienten:

$$\frac{-2x_1 + 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{8}{9} - x_1^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{8}{9} - x_1^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2}}$$

Dieser Term hat aber keine Nullstellen!? Ein Widerspruch? – Nein, denn Sie müssen stets die Randpunkte Ihres Intervalls betrachten und genau dort liegen die Extrempunkte. Die Beleuchtung der Kuppel kann also kommen!

Damit schließen wir unseren kleinen Exkurs.

Abbildungen

Tabellen

Definitionsverzeichnis

Stichwortverzeichnis