Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Philipp Lücke WS 2013/14

Klausur zur Linearen Algebra 1 - 08.02.2014, 09:00-11:00 Uhr

Aufgabe A. (Punkte: 2+2) Sei $V := K[X]_{\leq 4}$ der Unterrraum aller Polynome vom Grad ≤ 4 und $f\colon V \to K^2$ die lineare Abbildung $P \mapsto (P(1), P'(0))$. (Hierbei ist $(\sum a_i X^i)' = \sum i a_i x^{i-1}$ die formale Ableitung.)

i) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis $1, X, X^2, X^3, X^4$ von V bzw. e_1, e_2 von K^2 an.

ii) Bestimmen Sie den Rang und den Kern von f.

Aufgabe B. (Punkte: $2+2$) Es seien

$$f\colon V_1 \to V_2 \text{ und } g\colon V_2 \to V_3$$

lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Man beweise

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(V_2) \leq \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\}.$$

Aufgabe C. (Punkte: $2+2+2$) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $\{0\} \neq U \subset V$ ein f-invarianter Raum. Beweisen Sie folgende Aussagen:

i) Für die charakteristischen Polynome von f und der Einschränkung $f|_U$ gilt:

$$p_{f|_U}(X) \text{ teilt } p_f(X).$$

ii) Für die Minimalpolynome von f und der Einschränkung $f|_U$ gilt:

$$q_{f|_U}(X) \text{ teilt } q_f(X).$$

iii) Wenn f diagonalisierbar ist, dann ist auch $f|_U$ diagonalisierbar.

Aufgabe D. (Punkte: 2+2) Man entscheide, ob folgende Matrizen in $M(3\times 3, \mathbb{C})$ zu einander ähnlich sind:

i) $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe E. (Punkte: $2+2$) Es seien

$$E_1, E_2 \subset A$$

affine Unterräume eines affinen Raumes A mit den dazugehörigen Vektorräumen $V_1, V_2 \subset V$. Man definiert

$$E_1 + E_2 \subset A$$

als den kleinsten affinen Unterraum von A, der sowohl E_1 als auch E_2 enthält (oder äquivalent dazu als $E_1 + E_2 = \bigcap_{E_1, E_2 \subset E} E$, d.h. als Duchschnitt aller affinen Unterräume $E \subset A$ mit $E_1, E_2 \subset E$).

Man beweise, dass der zu $E_1 + E_2$ gehörige Unterraum $V_{12} \subset V$ gegeben ist durch

$$V_{12} = \begin{cases} V_1 + V_2, & \text{falls } E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \\ (V_1 + V_2) \oplus Kv, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $v \in V$, so dass ein Punkt $a \in E_1$ existiert mit $a + v \in E_2$.

Aufgabe F. (Punkte: $2+2+2+1$) Sei $M \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Man bestimme das charakteristische Polynom $p_M(X)$ und das Minimalpolynom $q_M(X)$.

ii) Man berechne die Jordan Normalform der Matrix M.

iii) Man berechne zu einem(!) Eigenwert den Eigenraum und den verallgemeinerten Eigenraum.

iv) Was verändert sich, wenn M als Matrix in $M(4 \times 4, \mathbb{R})$ betrachtet wird. Kann M noch trigonalisiert werden?

Aufgabe G. (Punkte: $2+1+2$) Sei $V := M(2 \times 2, K)$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Körper $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$, ob f diagonalisierbar oder trigonalisierbar ist.

Viel Erfolg!

Eine Musterlösung zur Klausur wird auf der Homepage der Vorlesung veröffentlich werden.
Klausureinsicht: Donnerstag, 13.02.2014, 14.00 - 16.00 Uhr, SR 0.006, SR 0.007 und SR 0.008.
Nachklausur: Mittwoch 19.03.2014, 09.00 - 11.00 Uhr.