

SEMINAR: DAS BUCH DER BEWEISE

„Das Buch der Beweise“ von Martin Aigner und Günter M. Ziegler ist eine Sammlung besonders eleganter Beweise schöner mathematischer Sätze. Die Auswahl der Beweise geht zu einem großen Teil auf Paul Erdős zurück, der die Idee eines göttlichen Buches mit perfekten Beweisen liebte. Die vierte deutsche Auflage entspricht der fünften englischen Auflage [AZ14].

- (1) **18. Oktober, Yannick Folsche: Drei Anwendungen der Eulerschen Polyederformel** Kapitel 13, 8 Seiten
#Ecken – #Kanten + #Flächen = 2 für jeden zusammenhängenden ebenen Graph. Anwendungen, z. B. Satz von Pick.
- (2) **25. Oktober, Julia Sudhoff: Der Spektralsatz + Von Freunden und Politikern** erster Teil von Kapitel 7, und Kapitel 43, 4+4 Seiten
(oder Hadamards Determinantenproblem)
Gegeben eine reelle symmetrische Matrix A gibt es eine reelle orthogonale Matrix Q so dass $Q^t A Q$ eine Diagonalmatrix ist.
Haben in einer Gruppe von Personen je zwei genau einen gemeinsamen Freund, so gibt es eine Person (den „Politiker“), der mit jeder Person befreundet ist.
- (3) **Mittwoch 2. November (falls möglich, wegen Allerheiligen), Schott: Sechs Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen** Kapitel 1, 6 Seiten
Euklids Beweis, per Fermatzahlen, Mersennezahl, per Analysis, per Topologie, per divergierender Reihe.
- (4) **8. November, Zumbruch: Der Zwei-Quadrate-Satz von Fermat** Kapitel 4, 8 Seiten
Eine natürliche Zahl ist genau dann Summe zweier Quadrate, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung jeder Primfaktor der Form $4m + 3$ mit geradzahligem Exponent erscheint.
- (5) **15. November, Francesca Groth: Das quadratische Reziprozitätsgesetz** Kapitel 5, 8 Seiten
Sind p und q ungerade Primzahlen, so ist p quadratischer Rest modulo q genau dann, wenn q (nicht) $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$ quadratischer Rest modulo p ist.
- (6) **22. November, Marie Steinmetz: Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper** Kapitel 6, 6 Seiten
Jeder endliche Schiefkörper ist kommutativ.
- (7) **29. November, Eva Mertens: Einige irrationale Zahlen** Kapitel 8, 8 Seiten
 π^2 ist irrational, e^r ist irrational für $r \in \mathbb{Q} - \{0\}$.
- (8) **6. Dezember, Louisa Mitscher: Drei Mal $\pi^2/6$** Kapitel 9, 10 Seiten
 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$.
- (9) **13. Dezember, Jennifer Schütz: Ein Lob der Ungleichungen** Kapitel 20, 8 Seiten
Cauchy-Schwarz; harmonisches, geometrisches und arithmetisches Mittel (2 Beweise); die Nullstellen eines Polynoms $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, das nur reelle Nullstellen hat, liegen alle innerhalb des Intervalls mit den beiden Endpunkten $-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}$; ein Satz von Erdős und Gallai (eine der beiden Ungleichungen); einfachster Fall von Turán's Satz
- (10) **20. Dezember, Mona Zachhuber: Der Fundamentalsatz der Algebra + Das Nadel-Problem von Buffon** Kapitel 21 und 26, 4+4 Seiten
Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

- Betrachte ein unendliches liniertes Papier mit Linienabstand eins (also unendlich viele äquidistante parallele Geraden in der Ebene). Wirft man eine Nadel der Länge $\ell < 1$ zufällig darauf, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine der Linien kreuzt, genau $\frac{2}{\pi}\ell$.
- (11) **10. Januar, Wortmann: Ein Quadrat und viele Dreiecke** Kapitel 22, 10 Seiten
(Monsky) Ein Quadrat kann nicht in ungeradzahlig viele Dreiecke gleicher Fläche zerlegt werden.
- (12) **17. Januar, Rath: Ein Satz von Pólya über Polynome** Kapitel 23, 8 Seiten
Sei f ein komplexes nichtkonstantes normiertes Polynom und $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| \leq 2\}$ der Bereich der komplexen Ebene, in der die „Höhe“ $|f(z)|$ kleiner als zwei ist. Dann kann man die orthogonale Projektion von \mathcal{C} auf jede Gerade in der komplexen Ebene durch endlich viele Intervalle der Gesamtlänge ≤ 4 überdecken.
- (13) **24. Januar, Raack: Cayleys Formel für die Anzahl der Bäume** Kapitel 32, 8 Seiten
Es gibt genau n^{n-2} verschiedene Bäume mit n (nummerierten) Knoten.
- (14) **31. Januar, Cassel: Ein Fünf-Farben-Satz + Die Museumswächter** Kapitel 38 und 39
(und den Begriff der listenchromatischen Zahl aus Kapitel 36, 4+4 Seiten
Alle ebenen Graphen können 5-listengefärbt werden.
Museumssatz: Jedes Museum mit n Wänden kann von $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächtern bewacht werden.
- (15) **7. Februar, Steffen Hallen: Schubfachprinzip und doppeltes Abzählen; insbesondere Sperners Lemma und Brouwers Fixpunktsatz** Kapitel 27, 12 Seiten, eventuell nicht alles
Jede stetige Selbstabbildung $B^n \rightarrow B^n$ des abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitsballs $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $b \in B^n$ mit $f(b) = b$.
- (16) **Rath (zweiter Vortrag?; Zusatztermin): Wenn man Rechtecke zerlegt** Kapitel 28, 6 Seiten
Zerlegt man ein Rechteck in endlich viele Rechtecke, deren jedes mindestens eine ganzzahlige Seite hat, so hat das ursprüngliche Rechteck eine ganzzahlige Seite.

REFERENCES

[AZ14] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, fifth ed., Springer-Verlag, Berlin, 2014.

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT BONN, ENDENICHER ALLEE 60, 53115 BONN, GERMANY
E-mail address: olaf.schnuerer@math.uni-bonn.de