SEMINAR ZU $\mathcal{D}$-MODULN

1. Teil: Die Weylalgebra

Literaturangaben in diesem Teil beziehen sich auf [Cou95]. Knapper findet man vieles in [Bjö79, 1.1].

1.1. **Die Weyl-Algebra, Definition und erste Eigenschaften.** 16. April, Kathrin

Definition der Weyl-Algebra A_n als

- Unteralgebra von $\mathrm{End}_k(k[x_1, \ldots, x_n])$,
- durch Erzeuger und Relationen [1.1-3],
- per Differentialoperatoren (nur erwähnen, kommt im nächsten Vortrag ausführlich).

Statt [1.3.2 Korollar] nur Fourier-Transformation [Exercise 1.4.8].
Grad eines Operators; A_n ist einfacher (keine nichttrivialen zweiseitigen Ideale), nullteilerfreier Ring [2.1, 2.2].

1.2. **Differentialoperatoren.** 23. April, Daniel

Definition der Differentialoperatoren eines Ringes R, Ordnung eines Diffops [3.1].
Weylalgebra ist der Ring der Differentialoperatoren von $k[x_1, \ldots, x_n]$ [3.2].
Beispiel, dass $D(R)$ nicht notwendig von R und den Derivationen erzeugt wird [Exercise 3.3.8].

$k[x_1, \ldots, x_n]$ ist einfacher A_n-Modul [5.1.2], ebenso $k[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ [5.2.2]. A_n-Moduln und Differentialgleichungen [6.1].

1.3. **Graduierte und Filtrierte Ringe und Moduln.** 30. April, Gero

graduierte und filtrierte Ringe und Moduln, assoziiertes graduiertes, induzierte Filtrierungen [7] (nicht zu detailliert).
Beispiele mit Bernstein-Filtrierung von A_n, Theorem [7.3.1], [7.4].
(kurz: Noethersche Moduln und Ringe) Anwendungen auf Weylalgebra [8.2.3 Theorem, 8.2.4 Korollar (A_n linksnoethersch)]. gute Filtrierungen [8.3].

Hilbert Polynom [9.1], Beispiele (auch aus algebraischer Geometrie).

1.4. **Dimension und Multiplizität, Bernsteins Ungleichung.** 7. Mai, Paul

Wiederholung Hilbert-Polynom. Dimension und Multipliziät eines A_n-Moduls, Beispiele und Eigenschaften [9.2+3].
Bernsteins Ungleichung [9.4].
Ohne Beweis: Eigenschaften holonomer Moduln [10.1+2]: abgeschlossen unter Untermoduln, Quotienten, Erweiterungen; sind Torsionsmoduln, artinsch, zyklisch.

1.5. **Charakteristische Varietäten.** 14. Mai, Angela

Im wesentlichen Kapitel 11.

Definition der charakteristischen Varietät $\mathrm{Ch}(M)$, Unabhängigkeit von der Wahl der guten Filtrierung; Skizze: $\mathrm{Ch}(M)$ ist involutiv (Gabber?). Zusammenhang mit Bernstein's Ungleichung (vgl. [Bjö79, Einleitung §3 und Seite 125]).

2. Teil: Garben von Differentialoperatoren

Literaturangaben in diesem Teil beziehen sich auf [HTT08].

2.1. (Quasi-)kohärente Garben. 28. Mai (Doppelsitzung), Gisa und Ana

Garben auf topologischen Räumen, geringte Räume, Pull-back f^* und Push-forward f_*, Adjunktion (f^*, f_*).
(Quasi-)kohärente Garben auf algebraischen Varietäten.

Literatur: Ueno: Algebraische Geometrie II.

2.2. Garbe der Differentialoperatoren. 18. Juni (Doppelsitzung) erster Vortrag, Nicolas

Kapitel [1.1] (und Appendix A.4 und A.5): Definition der Garbe $\mathcal{D}_X$ der Differentialoperatoren auf glatter Varieät, in lokalen Koordinaten, Exercises 1.1.1, 1.1.2 und 1.1.4. assoziiertes graudiertes.

2.3. $\mathcal{D}$-Moduln und Zusammenhänge, Links- und Rechtsmoduln. 18. Juni (Doppelsitzung) zweiter Vortrag, Joanna

[1.2]

2.4. Derivierte Kategorien und Funktoren. 25. Juni, Tobias

Abelsche Kategorien, Homotopie-Kategorie, derivierte Kategorie, derivierte Funktoren. Beispiele: Ext, Tor, Garbenkohomologie. [Appendix B], vielleicht Kashiwara-Shapira: Sheaves on Manifolds.

Am 2. Juli ist kein Seminar

2.5. Inverses und direktes Bild. 9. Juli (Doppelsitzung), erster Vortrag, Thilo

[1.3] mit Beispielen, vor allem abgeschlossene Einbettungen (1.3.2, 1.3.5).

2.6. Some categories of D-Modules. 9. Juli (Doppelsitzung), zweiter Vortrag, Philipp

Propo 1.4.4: X D-affin, so "globale Schnitte nehmen" liefert Äquivalenz;
Propo 1.4.9 $\mathcal{D}_X$ ist kohärente Garbe von $\mathcal{D}$-Moduln, Charakterisierung kohärenter $\mathcal{D}_X$-Moduln.
1.4.10 $\mathcal{O}_X$-kohärente $\mathcal{D}_X$-Moduln sind flache Zusammenhänge.
technische Aussagen am Ende kurz.

2.7. Inverses und direktes Bild II. 16. Juli, Martin

Kapitel 1.5 ist lang und technisch. Man versuche, die Definitionen allgemein zu geben und zu erklären, ohne Beweise. Wichtig für Kashiwara's Äquivalenz sind:

- Beispiel auf Seite 35 nach dem Beweis von Proposition 1.5.13 (wo $i : X \to Y$ abgeschlossene Einbettung), vielleicht nur $\operatorname{codim}_Y X = 1$
- Beispiel 1.5.23
- Korollar 1.5.26 (Proposition 1.5.25).

2.8. Kashiwara's Äquivalenz. 23. Juli, Hanno

Theorem 1.6.1,
Anwendung Theorem 1.6.5: $\mathbb{P}^n\mathbb{C} \times$ (glatt affin) ist D-affin.

References

[Bjö79] J.-E. Björk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 21, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. MR MR549189 (82g:32013)

[Cou95] S. C. Coutinho, *A primer of algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR MR1356713 (96j:32011)

[HTT08] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 236, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008, Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi. MR MR2357361 (2008k:32022)