

Vorlesungsankündigung

L*-Funktionen, Motive und Beilinsons Vermutungen*Vorbesprechung: Freitag, den 24.10.2008, 14:00, Raum 04-323****Ort und Zeit: 2-std. nach Vereinbarung**Zum Inhalt:In der analytischen Zahlentheorie interessiert man sich für sog. *L*-Reihen

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} f_p(p^{-s})^{-1}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad f_p \in \mathbb{C}[X],$$

die – je nach Kontext – unterschiedliche arithmetische Informationen in den Koeffizienten a_n oder den Polynomen f_p enthalten. Für beliebige Zahlkörper K ist so zum Beispiel die *Dedekindsche Zetafunktion* ζ_K definiert durch

$$\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N(\mathfrak{p})^{-1})^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

wobei die Summe über die nichttrivialen Ideale und das Produkt über Primideale des Ganzheitsringes \mathcal{O}_K von K läuft. Die Funktion $\zeta_K(s)$ lässt sich meromorph auf ganz \mathbb{C} forsetzen und hat an der Stelle $s = 1$ einen einfachen Pol. Die analytische Klassenzahlformel – ein Spezialfall der Beilinson-Vermutungen für $X = \operatorname{Spec}(K)$ – besagt nun

$$\operatorname{res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} h_K}{w_K \sqrt{|\Delta_K|}} R_K.$$

Dabei bezeichnen r_1 und $2r_2$ die Anzahl der reellen und komplexen Einbettung von K ; w_K und Δ_K stehen für die Anzahl der Einheitswurzeln sowie die Diskriminante von K . Die Klassenzahl von K sei bezeichnet durch h_K , und R_K wird folgendermaßen definiert: Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ die reellen und $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \dots, \overline{\sigma_{r_1+r_2}}$ die komplexen Einbettungen von K . Für eine beliebige Basis (u_1, \dots, u_r) von $\mathcal{O}_K^\times / (\mathcal{O}_K^\times)_{tors}$ mit $r := r_1 + r_2 - 1$ ist dabei das Kovolumen

$$R_K := \left| \begin{array}{ccc} \log \|\sigma_1(u_1)\| & \dots & \log \|\sigma_1(u_r)\| \\ \vdots & & \vdots \\ \log \|\sigma_r(u_1)\| & \dots & \log \|\sigma_r(u_r)\| \end{array} \right|$$

unabhängig von allen Wahlen. Grob gesprochen besteht also ein Zusammenhang zwischen dem Residuum von ζ_K an der Stelle $s = 1$ und dem Kovolumen R_K eines gewissen Gitters, nämlich dem Bild einer Regulatorabbildung

$$r_K : \mathcal{O}_K^\times \rightarrow \mathbb{R}^r.$$

Die Determinante R_K kann dabei interpretiert werden als Determinante einer Matrix, die die beiden \mathbb{Q} -Strukturen auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^r : Eine ist gegeben durch \mathbb{Q}^r , die andere durch das Bild von r_K . Beilinsons Vermutungen beschreiben einen ähnlichen Zusammenhang für glatte projektive Varietäten X definiert über \mathbb{Q} . Dabei gilt folgendes „Wörterbuch“

$X = \operatorname{Spec}(K)$	X glatt, projektiv / \mathbb{Q}
$\mathcal{O}_K^\times / (\mathcal{O}_K^\times)_{tors}$	ganzzahlige motivische Kohomologie von X
\mathbb{R}^r	Deligne-Beilinson Kohomologie von X
$r_K \otimes \mathbb{Q}$	Beilinson-Regulator r_B
$\operatorname{res}_{s=1} \zeta_K(s)$	Leitern der motivischen <i>L</i> -Funktion von X an ganzzahligen Stellen

Wären die Vermutungen richtig, so hätte man eine zugänglichere Beschreibung der motivischen Kohomologie von X , die dann der Theorie der Motive zufolge gleichzeitig Informationen über viele verschiedene Kohomologietheorien von X liefert. Auf der anderen Seite kann man auch Informationen über L -Funktionen von Motiven bekommen, die ihrerseits arithmetische Informationen liefern.

Wir geben nun eine Formulierung von Beilinsons Vermutungen: Sei

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} := gr_{\gamma}^j K_{2j-i}(X)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad K_*(X)_{\mathbb{Z}} := \text{im}(K_*(\mathcal{X}) \rightarrow K_*(X))$$

die ganzzahlige motivische Kohomologie von X , wobei \mathcal{X} ein beliebiges eigentliches und flaches Modell von X über dem Ganzheitsring \mathcal{O}_F eines Zahlkörpers F und gr_{γ}^j das j -te graduierte Objekt der γ -Filtrierung in der algebraischen K -Theorie bezeichnet. Beilinson vermutete nun:

- i) Es existiert für gewisse i, j ein Isomorphismus

$$r_{\mathcal{B}} \otimes \mathbb{R} : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H_{\mathcal{D}}^i((X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})/\mathbb{R}, \mathbb{R}(j)),$$

der durch den Beilinson-Regulator $r_{\mathcal{B}}$ induziert wird, und wobei die rechte Seite die Deligne-Beilinson Kohomologie bezeichnet.

- ii) Diese Abbildung überträgt eine rationale Struktur der motivischen Kohomologie auf der Deligne-Beilinson Kohomologie, also auch auf deren höchste äußerster Potenz. Eine zweite \mathbb{Q} -Struktur wird durch eine kurze exakte Sequenz zwischen Betti-, de Rham und Deligne-Beilinson Kohomologie induziert. Beide \mathbb{Q} -Strukturen unterscheiden sich durch einen Skalierungsfaktor in $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ gegeben durch den Litterterm $L^*(h^{i-1}(X), i-j)$ der L -Funktion des Motivs $h^{i-1}(X)$ assoziiert zu X an der Stelle $i-j$.

Beilinsons Vermutungen sind in dieser Form bisher nur für $X = \text{Spec}(K)$ von A. Borel bewiesen, jedoch gibt es Beispiele von sog. Shimura-Varietäten über \mathbb{Q} , für die zumindest eine abgeschwächte Version dieser Vermutungen bewiesen ist.

Verlauf der Vorlesung:

In der Vorlesung wollen wir die obige Formulierung von Beilinsons Vermutungen zu verstehen. Dabei soll nach einer Einführung in klassische L -Funktionen die Theorie der reinen Motive sowie der motivischen Kohomologie behandelt werden. Auf Wunsch kann auch auf Voevodskys Konstruktionen gemischter Motive eingegangen werden, die Motive assoziiert zu singulären Varietäten beschreiben sollen. Anschließend sollen motivische L -Funktionen und der Beilinson-Regulator definiert werden, so dass zum Ende des Semesters die obigen Vermutungen „mit Inhalt gefüllt“ sein sollten.

Wenn noch Zeit bleibt, soll auch auf die Beweise der Vermutungen eingegangen werden. Realistischerweise werden wir dafür aber nicht mehr viel Zeit haben. Bei Interesse kann die Vorlesung im kommenden Sommersemester weitergeführt werden. Dann sollten zumindest ansatzweise Beweise der Vermutungen für ausgewählte Beispiele diskutiert werden.

Vorkenntnisse:

Wie sich schon erahnen lässt, sind gute Vorkenntnisse aus der algebraischen Geometrie und Zahlentheorie wünschenswert. Da sich die Vorlesung aber im Besonderen an den Interessen und Kenntnissen der Teilnehmer orientieren soll, können auch jederzeit Exkurse eingeschoben werden.

Literatur:

- A. Beilinson, *Higher regulators and values of L -functions*, J. Soviet Math., 30:2036–2070, 1985
- J. Nekovář, *Beilinson's conjectures*, Motives (Seattle, WA, 1991), 537–570, Proc. Sympos. Pure Math., 55 (1), AMS, Providence, RI, 1994
- V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field, Cycles, Transfers, and Motivic homology theories*, Annals of Math. Studies

Bei Fragen oder falls man zur Vorbesprechung verhindert ist, aber trotzdem Interesse hat:
opetras@mathematik.uni-mainz.de