INFINITESIMALRECHNUNG III

WERNER MÜLLER

Inhaltsverzeichnis

Date: Wintersemester 1998.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die mathematische Formulierung vieler Probleme in Naturwissenschaft und Technik führt häufig zu Differentialgleichungen. Dies sind Gleichungen, in denen endlich viele Ableitungen einer unbekannten Funktion auftreten.

Es handelt sich jetzt nicht mehr wie bisher um Gleichungen zwischen Zahlen sondern um Gleichungen zwischen Funktionen. Die Gleichungen enthalten endlich viele Ableitungen einer oder mehrerer unbekannter Funktionen. Das Ziel ist es, die Gleichungen zu "lösen", d.h., die Funktionen zu bestimmen, die der entsprechenden Gleichung genügen. Im allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, eine Differentialgleichung explizit zu lösen, d.h., die unbekannte Funktion durch elementare oder algebraische Funktionen und deren Integrale auszudrücken. In diesem Kapitel lernen wir einige Grundzüge der Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen kennen.

Beispiele: 1. Beim senkrechten Wurf eines Körpers der Masse m nach oben unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes F_W wirken das Gewicht G des Körpers und der Luftwiderstand der Bewegung entgegen. Somit gilt für die Geschwindigkeit v des Körpers nach dem 2. Newtonschen Gesetz

$$m\frac{dv}{dt} = -F_W - G.$$

Sei g die Erdbeschleunigung. Dann ist $G = mg$. Weiter ist $F_W = av^2$, wobei a eine Konstante ist, die von der Form des Körpers abhängt. Daraus erhält man die folgende Differentialgleichung für v

$$m\frac{dv}{dt} + av^2 + mg = 0.$$

2. Auf eine elastisch aufgehängte Masse m wirke nach erfolgter Auslenkung x eine Dämpfungskraft $F_D = c\frac{dx}{dt}$. Die nach dem Hookschen Gesetz der Bewegung der Masse entgegenwirkende Kraft ist $F_H = kx$. Daraus ergibt sich nach dem Newtonschen Gesetz

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für die Auslenkung $x(t)$.

3. Ein mechanisches System mit m Freiheitsgraden $q_1, \dots, q_m$ sei durch die Lagrangefunktion

$$L(t, q, \dot{q})$$

gegeben. Die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems sind die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Als Lösung erhält man die physikalische Bahnkurve.

4. Es sei

$$H(t, q, p) = \sum_{k=1}^{m} p_k \dot{q}_k - L(t, q, \dot{q})$$

die Hamiltonfunktion des obigen Systems. Die kanonischen Gleichungen des mechanischen Systems sind gegeben durch

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, m$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

5. Die Wärmeausbreitung in einem homogen Medium wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u = a^2 \Delta u + f$$

beschrieben. Dabei ist

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der Laplaceoperator des R^n. Im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen treten jetzt neben der Ableitung nach der Zeit auch Ableitungen in den räumlichen Koordinaten auf. Dies ist eine **lineare partielle Differentialgleichung**. Allgemeiner werden Prozesse der Wärmeausbreitung und der Diffusion in einem Medium durch die sogenannte Diffusionsgleichung beschrieben:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t).$$

Die Koeffizienten ρ, p und q werden durch das Medium bestimmt und $F(x, t)$ bezeichnet die äußeren Kräfte. Bei dieser Gleichung handelt es sich wiederum um eine lineare partielle Differentialgleichung.

6. Die ungleichförmige Bewegung einer viskosen inkompressiblen Flüssigkeit wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) - \mu \Delta v + \nabla p = F(x, t),$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Das ist die **Navier-Stokes-Gleichung**. Dabei ist ρ die Dichte, $\mu > 0$ der Viskositätskoeffizient, $v = v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(x,t))$ der Geschwindigkeitsvektor, $p = p(x,t)$ der Druck und F die äußere Kraft. Weiter ist

$$v \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

ist der Laplaceoperator,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

ist der Gradientenoperator, und

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

die Divergenz des Vektorfeldes v. Wegen des Termes $v \cdot \nabla v$ ist die Navier-Stokes-Gleichung eine **nichtlineare partielle Differentialgleichung**. Dies ist der schwierigste Typ von Differentialgleichungen.

Gewöhnliche Differentialgleichungen kann man sowohl für reellwertige als auch für komplexwertige Funktionen betrachten. Mit Hilfe der Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ kann man jede Differentialgleichung über $\mathbb{C}$ auf ein System von Differentialgleichungen über $\mathbb{R}$ zurückführen. Wir beschränken uns deshalb auf die Diskussion des reellen Falles. Viele Resultate gelten völlig analog im komplexen Fall und können einfach übertragen werden. In manchen Fällen ist es jedoch von Vorteil, zur Behandlung bestimmter Differentialgleichungen zu den komplexen Zahlen überzugehen.

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung** hat im allgemeinen die Form

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t) = F(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)), \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Dabei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter einer **Lösung** der Differentialgleichung versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ so, daß (1.1) gilt. Im allgemeinen muß keine Lösung existieren. Oft sind noch sogenannte **Anfangswerte**

$t_0 \in I$ und $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Gesucht ist dann eine Lösung f von (1.1), für die die Anfangsbedingungen

$$f(t_0) = x_1,\ f'(t_0) = x_2, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = x_n \tag{1.2}$$

erfüllt sind. Die Differentialgleichung (1.1) zusammen mit den Anfangsbedingungen (1.2) nennt man ein **Anfangswertproblem**. Wenn es sich bei der Gleichung (1.1) zum Beispiel um die Beschreibung eines physikalischen Vorganges handelt, so sind die Anfangswerte durch den Anfangszustand des entsprechenden physikalischen Systems festgelegt. In Beispiel 2 sind das der Anfangswert $x(t_0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $x'(t_0)$, die gegeben sein müssen.

Häufig hat man es nicht nur mit einer einzelnen Differenialgleichung zu tun, sondern wie in den Beispielen 3 und 4 mit einem System von gew öhnlichen Differentialgleichungen. In impliziter Form hat ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen im allgemeinen die Form

$$F_i(t, f_1(t), f_1'(t), \dots, f_1^{(m_1)}(t), ..., f_n(t), f_n'(t), \dots, f_n^{(m_n)}(t)) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Es sei $f = (f_1, \dots, f_n)$. Eine Lösung von (1.3) ist eine m_n-mal differenzierbare Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ so, daß (1.3) gilt.

In einfachen Fällen kann man Differentialgleichungen direkt durch Integration lösen. Man spricht deshalb auch von der Integration einer Differentialgleichung, wenn man sie löst.

Beispiele: 1. $f' = cf$.

O.B.d.A. kann man annehmen, daß $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Andernfalls folgt leicht, daß $f = 0$. Dann gilt

$$(\log f)' = \frac{f'}{f} = c.$$

Daraus folgt

$$\log f = cx + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Somit hat die allgemeine Lösung die Gestalt

$$f(x) = Ce^{cx}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

2. $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = g$.

Durch 2-malige Integration erhält man

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + at + b$$

$a, b \in \mathbb{R}$, als allgemeine Lösung.

Im allgemeinen ist es natürlich nicht möglich, Differentialgleichungen auf diesem Wege zu lösen.

1.1. **Reduktion auf Systeme 1. Ordnung.** Wir ordnen der Differentialgleichung (1.1) das folgende System von Differentialgleichungen 1. Ordnung zu:

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t) &= \varphi_2(t),\\ \varphi_2'(t) &= \varphi_3(t),\\ &\vdots\\ \varphi_{n-1}'(t) &= \varphi_n(t),\\ \varphi_n'(t) &= F(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1.1). Dann ist φ n-mal differenzierbar. Wir definieren die Funktionen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ rekursiv durch

$$\varphi_1 = \varphi \text{ und } \varphi_{i+1} = \varphi_i', \quad i = 1,\ldots,n-1.$$

Dann sind $\varphi_1,\ldots,\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ ist eine Lösung des Systems (1.4). Es sei umgekehrt $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, eine Lösung von (1.4). Dann sind die Funktionen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, differenzierbar und es gilt

$$\varphi_k = \varphi_1^{(k-1)}, \quad k = 1,\ldots,n$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(n)}(t) &= F(t,\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))\\ &= F(t,\varphi_1(t),\varphi_1'(t),\ldots,\varphi_1^{(n-1)}(t)), \quad t \in I,\end{aligned}$$

d.h., $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von (1.1). Wenn weiterhin Anfangswerte $(t_0,x_0,\ldots,x_{n-1})$ für (1.1) gegeben sind, d.h., es gilt

$$\varphi_1^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0,\ldots,n-1,$$

so entspricht dies den Anfangswerten.

$$\varphi_k(t_0) = x_{k-1}, \quad k = 1,\ldots,n,$$

des Systems (1.4). Damit haben wir folgenden Satz gezeigt.

Satz 1.1. *Die Differentialgleichung (1.1) ist äquivalent zu dem System (1.4) von n Differentialgleichungen erster Ordnung in dem Sinne, daß für eine Lösung φ von (1.1) der Vektor $(\varphi,\varphi',\varphi'',\ldots,\varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von (1.4) ist und umgekehrt, wenn $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ eine Lösung von (1.4) ist, so ist φ_1 eien Lösung von (1.1).*

Ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung hat im allgemeinen die Gestalt

$$f'(t) = F(t, f(t)). \tag{1.5}$$

Dabei ist $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die auf dem kartesischen Produkt eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ und einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Dabei kann U z.B. eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit sein. Man nennt U den **Phasenraum** der Differentialgleichung. Eine Lösung ist eine differenzierbare Abbildung $f : I \to U$ so, daß (1.5) gilt. Das entsprechende Anfangswertproblem hat die Form

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0, \tag{1.6}$$

wobei $t_0 \in I$ und $x_0 \in U$ gegeben sind. Allgemeiner kann man den **erweiterten Phasenraum** betrachten. Dann ist $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \to \mathbb{R}$.

1.2. **Vektorfelder und Integralkurven.** Die Differentialgleichung (1.5) kann man geometrisch interpretieren. Dazu führen wir den Begriff eines Vektorfeldes ein.

Definition 1.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein **Vektorfeld auf** U ist eine Abbildung $v : U \to \mathbb{R}^n$. Wenn v eine C^k-Abbildung ist, so heißt v ein C^k-Vektorfeld.

Geometrisch deutet man ein Vektorfeld v dadurch, daß man sich an jedem Punkt $x \in U$ den Vektor $v(x)$ angeheftet denkt. Formal bedeutet dies, daß wir die Paare $(x, v(x))$, $x \in U$, betrachten.
Physikalisch kann man ein Vektorfeld als das Geschwindigkeitsfeld einer zeitunabhängigen Strömung interpretieren, d.h., $v(x)$ ist der Geschwindigkeitsvektor am Punkte $x \in U$.
Beispiele: 1. *Konstante Vektorfelder.*
Es sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und $v : U \to \mathbb{R}^n$ sei die Abbildung $v(x) = v_0$.
2. *Zentralfelder*
Es sei $I \subset \mathbb{R}^+$ ein Intervall und $K(I)$ die entsprechende Kugelschale mit Zentrum 0. Weiter sei $a : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $v : K(I) \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$v(x) = a(\| x \|) \cdot x, \quad x \in K(I)$$

Dies ist ein Zentralfeld. Ein Beispiel ist das Gravitationsfeld

$$v(x) = -\frac{x}{\| x \|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}.$$

3. *Rotationsfelder*

Auf einem Kreisring $K(I) \subset \mathbb{R}^2$ mit Zentrum 0 sei

$$v(x) = a(\| x \|) \cdot (-x_2, x_1),$$

wobei $I \subset \mathbb{R}^+$ und $a : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist.
4. *Gradientenfelder*
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist das Gradientenfeld grad $fU \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right), \quad x \in U.$$

Definition 1.3. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Vektorfelder $v_1, \dots, v_n : U \to \mathbb{R}^n$ nennt man eine **Basis der Vektorfelder auf** U, wenn für alle $x \in U$ die Vektoren $v_1(x), \dots, v_n(x)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Es sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis der Vektorfelder auf U und $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres Vektorfeld. Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ so, daß

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) v_j(x), \quad x \in U.$$

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Offensichtlich ist die Menge der C^1-Vektorfelder gleich dem Raum $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ der C^1-Abbildungen $v : U \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ ein n-dimensionaler Vektorraum über $C^1(U)$.

Definition 1.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Eine **Integralkurve** von v ist eine differenzierbare Kurve $\varphi : I \to U$, die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist so, daß gilt

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = v(\varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Deutet man v als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, so ist eine Integralkurve die mit Zeitplan versehene Bahnkurve eines mitgeführten Partikels.
Beispiel: Wir betrachten das Rotationsfeld $v(x, y) = (-y, x)$. Für eine Integralkurve $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ gilt dann

$$\varphi_1' = -\varphi_2, \quad \varphi_2' = \varphi_1.$$

Lösungen sind $\varphi_1(t) = c \cos t$, $\varphi_2(x) = c \sin t$. Die Integralkurven sind also die konzentrischen Kreise $x^2 + y^2 = c^2$ mit Zentrum 0. Im geometrischen Sinne sind also die Lösungen des **autonomen Differentialgleichungssystems**

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = v(\varphi(t))$$

genau die Integralkurven des Vektorfeldes v. Bei gegebener Anfangsbedingung (t_0, x_0) bedeutet die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems, daß die Integralkurve $\varphi : I \to U$ zum Zeitpunkt t_0 durch den Punkt x_0 geht: $\varphi(t_0) = x_0$.

Allgemeiner sei $v : I \times U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Für jedes $t \in I$ ist dann $v(t, \cdot) : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und wir können die Abbildung v als zeitabhängiges Vektorfeld interpretieren. Man nennt dies auch ein **dynamisches System**. Eine Integralkurve ist wiederum eine differenzierbare Abbildung $\varphi : I \to U$ so, daß

$$\frac{d\varphi}{dt} = v\,(t, \varphi(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt. Vektorfelder hängen eng mit dem Begriff der 1-parametrigen Transformationsgruppen von Diffeomorphismen zusammen.

Definition 1.5. Eine einparametrige Gruppe $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ von Diffeomorphismen einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$g\colon \mathbb{R} \times U \to U, \quad g(t,x) = g_t(x), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in U,$$

so, daß gilt

1. $\forall t \in \mathbb{R} : g_t : U \to U$ ist ein Diffeomorphismus.
2. $\forall t, s \in \mathbb{R} : g_{t+s} = g_t \circ g_s$.
3. $g_0 =$Id.

Jede 1-parametrige Gruppe $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ von Diffeomorphismen von U erzeugt ein Vektorfeld v durch

$$v(x) = \frac{d}{dt} g_t(x)\big|_{t=0}.$$

Für $x \in U$ sei $\varphi : \mathbb{R} \to U$ definiert durch

$$\varphi(t) = g_t(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist φ eine Integralkurve von

$$\frac{df}{dt} = v(f(t)),$$

die durch den Punkt x geht. Die 1-parametrige Gruppe $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ nennt man den **Phasenfluß** zum Vektorfeld v. Im allgemeinen existiert der Phasenfluß nur lokal, d.h., g_t ist nur für $t \in I$ definiert und für $t, s \in I$ mit $t + s \in I$ gilt $g_t \circ g_s = g_{t+s}$.

1.3. **Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.** Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen an F die Differentialgleichung

$$f'(t) = F(t, f(t)) \tag{1.7}$$

Lösungen besitzt und ob diese durch die Vorgabe von Angangswerten eindeutig bestimmt sind. Beides muß im allgemeinen nicht der Fall sein. Eine Lösung von (1.7) ist eine differenzierbare Abbildung $f : I \to \mathbb{R}^n$ eines Intervalles $I \in \mathbb{R}$ so, daß $(t, f(t) \in U$ für alle $t \in I$ und die Gleichung (1.7) gilt. Es sei $(t_0, x_0) \in U$. Dann lautet das entsprechende Anfangswertproblem

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0. \tag{1.8}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine **stetige Abbildung** ist. Die Konstruktion einer Lösung zu einem gegebenen Anfangswert $(t_0, x_0) \in U$ führen wir auf die Lösung einer Integralgleichung zurück. Dazu führen wir noch folgenden Begriff ein.
Es sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ seien die Komponenten von φ. Dann definieren wir das Integral von φ durch

$$\int_a^b \varphi(t)dt := \left(\int_a^b \varphi_1(t)dt, \dots, \int_a^b \varphi_n(t)dt\right).$$

Es sei $(t_0, x_0) \in U$ und es sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (1.7) mit $f(t_0) = x_0$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Intergralrechnung folgt dann

$$f(t) = \int_{t_0}^t F(s, f(s))ds + x_0. \tag{1.9}$$

Dies ist eine **Integralgleichung** für die gesuchte Funktion f. Es sei umgekehrt $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion so, daß $(t, f(t)) \in U$ für alle $t \in I$ und (1.9) gilt. Dann folgt wiederum aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß f differenzierbar ist und (1.8) löst. Es genügt also, die Integralgleichung (1.9) zu lösen. Diese Gleichung interpretieren wir als Fixpunktgleichung im Raum $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ der stetigen Abbildungen von I nach $\mathbb{R}^n$ und wenden zu ihrer Lösung den Banachschen Fixpunktsatz an. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen und Bezeichnungen. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Dann sei

$$\| A \| = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

Definition 1.6. Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. F heißt **Lipschitz-stetig bezüglich** x, wenn F stetig ist und ein $L \geq 0$ existiert so, daß für alle Punkte $(t,x),(t,x') \in U$ gilt:

$$\| F(t,x) - F(t,x') \| \leq L \| x - x' \| .$$

F heißt **lokal Lipschitz-stetig** bezüglich x, wenn es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ eine Umgebung $U_0 \subset U$ von (t_0, x_0) gibt, derart daß die Einschränkung $F \mid U_0$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

Das folgende Lemma ist ein hinreichendes Kriterium dafür, daß F lokal Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

Lemma 1.7. *Die Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ sei für alle $(t,x) \in U$ nach $x_1, \dots, x_n$ partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} F, \dots, \partial_{x_n} F$ seien auf U stetig. Dann ist F lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Genauer gilt: F ist Lipschitz-stetig bezüglich x auf jeder kompakten Teilmenge $Q = I \times K$ von U, wobei $I \subset \mathbb{R}$ eine Intervall und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge ist.*

Beweis: Es seinen $F_1, \dots, F_n$ die Komponenten von F. Weiter sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe Teilmenge und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall so, daß $Q = I \times K \subset U$. Dann existiert

$$M = \max_{i,k} \sup_{(t,x) \in I \times K} |\partial_{x_i} F_k(t,x)|.$$

und es gilt

$$\sup_{(t,x) \in I \times K} \| dF(t,x) \| \leq nM.$$

Nach dem Schrankensatz ist $L = nM$ eine Lipschitz-Konstante für $F|Q$.

$\square$

Lemma 1.8. *Es sei $g : I \to \mathbb{R}$ setig und $g \geq 0$ auf I. Es sei $t_0 \in I$ so, daß für alle $t \in I$ gilt*

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right| + B$$

mit von t unabhängigen Konstanten $A, B \geq 0$. Dann gilt für alle $t \in I$

$$g(t) \leq B e^{A|t - t_0|}.$$

Beweis: Es sei $t > t_0$. Wenn $g(t) = 0$ ist, so ist die Ungleichung richtig. Wir können daher $g(t) > 0$ voraussetzen. Es sei

$$G(t) := A \int_{t_0}^{t} g(s) ds + B.$$

Dann ist $G(t) > 0$ und auf Grund der Voraussetzung ist

$$(\ln G(t))' = \frac{G'(t)}{G(t)} \leq A.$$

Daraus folgt

$$G(t) \leq G(t_0)e^{A(t-t_0)}.$$

Nun ist $G(t_0) = B$ und auf Grund der vorausgesetzten Ungleichung ist $g \leq G$. Daraus folgt die Behauptung. Der Fall $t < t_0$ wird analog behandelt.

□

Wir können jetzt die beiden Hauptsätze über dynamische Systeme beweisen.

Satz 1.9. *(Eindeutigkeitssatz) Es sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Es seien $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von*

$$f'(t) = F(t, f(t))$$

und für ein $t_0 \in I$ gelte $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Dann gilt $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis: Es sei $I' \subset I$ die Menge aller $t \in I$ mit $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Dann ist $I' \neq \emptyset$, und da φ_1 und φ_2 stetig sind, ist I' abgeschlossen.
Zu zeigen: I' ist offen in I.
Sei $t_0 \in I'$. Dann existiert eine Umgebung $J \times V \subset U$ von $(t_0, \varphi_1(t_0))$ so, daß $F|J \times V$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist mit der Konstanten L. Sei $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Da $\psi(t_0) = 0$ ist, folgt aus (1.9) für alle $t \in I \cap J$

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} (F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s))ds.$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $F|J \times V$ folgt für alle $t \in I \cap J$

$$\| \psi(t) \| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \| F(s, \varphi_2(s)) - F(s, \varphi_1(s)) \| \, ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \| \psi(s) \| \, ds \right|.$$

Aus Lemma 1.8 folgt $\psi(t) = 0$ für alle $t \in I \cap J$, d.h., $I \cap J \subset I'$. Daher ist I' offen. Da I zusammenhängend ist, ist $I' = I$.

□

Bemerkung: Ohne die Lipschitz-Bedingung gilt der Eindeutigkeitssatz nicht.

Beispiel: Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = 2\sqrt{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

F ist in keiner Umgebung von 0 Lipschitz-stetig. Für $s \geq 0$ sei

$$f_s(t) = \begin{cases} 0, & t \leq s; \\ (t-s)^2, & t \geq s. \end{cases}$$

Dann ist $f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$f_s'(t) = 2\sqrt{|f_s(t)|} = F(f_s(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

und $f_s(0) = 0$. Wir haben damit unendlich viele Lösungen für das AWP

$$f'(t) = F(f(t)), \quad f(0) = 0,$$

gefunden.

Satz 1.10. *(Picard-Lindelöf) Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Dann gibt es zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ ein $\delta > 0$, so daß das Anfangswertpoblem*

$$f'(t) = F(t, f(t)),\ f(t_0) = x_0, \tag{1.10}$$

auf $I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ genau eine Lösung besitzt, d.h., es existiert genau eine differenzierbare Abbildung $\varphi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$ so, daß $(t, \varphi(t)) \in U$ für alle $t \in I_\delta$ und (1.10) gilt.

Beweis: Wir wählen $a, b > 0$ so, daß gilt
1. $\overline{I}_a(t_0) \times \overline{U}_b(x_0) \subset U$,
2. $F \restriction \overline{I}_a(t_0) \times \overline{U}_b(x_0)$ ist Lipschitz-stetig bezüglich x.
Wir setzen $Q = \overline{I}_a(t_0) \times \overline{U}_b(x_0)$. Es sei L die Lipschitz-Konstante von $F \mid Q$. Weiter sei $\delta > 0$ so gewählt, daß

$$\delta < \min\{a, L^{-1}, b \parallel F \parallel_Q^{-1}\}. \tag{1.11}$$

Wie wir oben gesehen haben genügt es, eine stetige Abbildung $\varphi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$ zu konstruieren so, daß die Integralgleichung

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s))ds \tag{1.12}$$

erfüllt ist. Wir führen die Konstruktion von φ auf den Banachschen Fixpunktsatz zurück. Dazu sei

$$\mathcal{M} = \{\psi : I_\delta(t_0) \to \overline{U}_b(x_0) \mid \psi \text{ stetig}\}.$$

Für $\psi \in \mathcal{M}$ sei die Abbildung $P\psi : I_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(P\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \psi(s))ds.$$

Dann ist ψ stetig und es gilt

$$\begin{aligned} \| (P\psi)(t) - x_0 \| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s,\psi(s))ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \| F(s,\psi(s)) \| \, ds \right| \leq \delta \| F \|_Q \leq b. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $P\psi \in \mathcal{M}$ ist, d.h., P definiert eine Abbildung $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Mittels P lautet die Integralgleichung (1.12) jetzt $P\varphi = \varphi$. Die gesuchte Lösung ist ein Fixpunkt von P. Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir in $\mathcal{M}$ eine Metrik einführen. Dies geschieht wie folgt: Für $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}$ sei

$$d(\psi_1, \psi_2) = \sup\{\| \psi_1(t) - \psi_2(t) \| | \, t \in I_\delta(t_0)\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß damit $\mathcal{M}$ zu einem metrischen Raum wird.

Lemma 1.11. *$(\mathcal{M}, d)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis: Es sei (ψ_k) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{M}$. Für jedes $t \in I_\delta(t_0)$ ist dann

$$|\psi_k(t) - \psi_l(t)| \leq d(\psi_k, \psi_l).$$

Daher ist $(\psi_k(t))$ eine Cauchy-Folge in $\overline{U}_b(x_0)$. Da $\overline{U}_b(x_0)$ kompakt ist, existiert $\psi(t) \in \overline{U}_b(x_0)$ mit

$$\psi(t) = \lim_{k \to \infty} \psi_k(t).$$

Da die Folge (ψ_k) gleichmäßig konvergiert, ist $\psi : I_\delta(t) \to \overline{U}_b(x_0)$ auf Grund von Satz 6.43 aus Infini I stetig und daher liegt ψ in $\mathcal{M}$. Weiter ist

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = \psi,$$

wobei der Grenzwert bezüglich d zu verstehen ist. Damit haben wir gezeigt, daß $(\mathcal{M}, d)$ vollständig ist.

$\square$

Weiter gilt für $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} d(P\psi_1, P\psi_2) &= \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \left\| \int_{t_0}^t (F(s, \psi_1(s)) - F(s, \psi_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \left| \int_{t_0}^t \| F(s, \psi_1(s)) - F(s, \psi_2)) \| ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in I_\delta(t_0)} \left| \int_{t_0}^t L \| \psi_1(s) - \psi_2(s) \| ds \right| \\ &\leq \delta L \cdot d(\psi_1, \psi_2). \end{aligned}$$

Auf Grund der Wahl von δ gilt $\delta L < 1$. Damit haben wir gezeigt, daß $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ eine Kontraktion ist. Der Banachsche Fixpunktsatz kann daher angewendet werden. Aus diesem Satz folgt, daß es genau ein $\varphi \in \mathcal{M}$ gibt mit $P\varphi = \varphi$. Dieses φ löst das Anfangswertproblem.

□

Bemerkung: Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, daß man die Lösung φ des Anfangswertproblems durch Iteration von P mit beliebigem Startpunkt erhält. Es sei z.B. φ_0 die konstante Abbildung $\varphi_0 = x_0$. Wir definieren rekursiv

$$\varphi_{k+1} = P(\varphi_k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert die Folge (φ_k) auf $I_\delta(t_0)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion φ, die Lösung von (1.10) ist. Dies ist die Picard-Lindelöf-Iteration zur Konstruktion von φ:

$$\varphi_0 := x_0, \quad \varphi_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_k(s)) ds, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel: Es sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Rotationsfeld:

$$v(x, y) = (-y, x).$$

Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x'0 - y, &\quad x(0) = 1, \\ y' = x, &\quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Picard-Lindelöf-Iteration ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix},\\
\varphi_2(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}-s\\1\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}1-t^2/2\\t\end{pmatrix},\\
\varphi_3(t) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix}-s\\1-s^2/2\end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix}1-t^2/2\\t-t^3/3!\end{pmatrix}\\
&\vdots\\
\varphi_{2k+1}(t) &= \begin{pmatrix}1-t^2/2+\cdots+(-1)^k t^{2k}/(2k)!\\t-t^3/3!+\cdots+(-1)^k t^{2k+1}/(2k+1)!\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Komponenten von φ_{2k+1} sind die Taylorpolynome der Odrnung $2k+1$ von $\cos t$ bzw. $\sin t$. Damit folgt, daß

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$$

die Lösung des AWP ist.

□

Aus dem Beweis von Satz 1.10 folgt: Zu jedem Punkt $(t_0, x_0) \in U$ existieren $\delta > 0$ und $r > 0$ so, daß für alle $x \in U_r(x_0)$ das Anfangswertproblem

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x,$$

eine eindeutige Lösung

$$\varphi_x \colon I_\delta(t_0) \to U_{2r}(x_0)$$

besitzt. Wir erhalten damit eine Abbildung

$$\varphi : I_\delta(t_0) \times U_r(x_0) \to U_{2r}(x_0),$$

die definiert ist als

$$\varphi(t,x) = \varphi_x(t).$$

Dies ist der **lokale Fluß** des dynamischen Systems. Für jedes $x \in U_\delta(x_0)$ ist $t \in I_\delta(t_0) \to \varphi(t,x)$ die Bahnkurve, die durch x verläuft.

Wir untersuchen jetzt die Abhängigkeit der Lösungskurve von der Anfangsbedingung.

Satz 1.12. *Für alle $t \in I_\delta(t_0)$ und $x, y \in U_r(x_0)$ gilt*

$$\| \varphi(t,x) - \varphi(t,y) \| \leq e^{L|t-t_0|} \| x - y \| .$$

Beweis: Es seien $x, y \in U_r(x_0)$. Wir setzen

$$v(t) = \| \varphi(t,x) - \varphi(t,y) \|^2, \quad t \in I_\delta(t_0).$$

Dann gilt

$$v'(t) = 2 \left\langle \varphi(t,x) - \varphi(t,y), F(t,\varphi(t,x)) - F(t,\varphi(t,y)) \right\rangle .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |v'(t)| &\leq 2v(t)^{1/2} \| F(t,\varphi(t,x)) - F(t,\varphi(t,y)) \| \\ &\leq 2v(t)^{1/2} L \| \varphi(t,x) - \varphi(t,y) \| = 2Lv(t). \end{aligned}$$

Sei

$$u(t) = e^{-2L(t-t_0)} v(t).$$

Dann folgt

$$u'(t) = -2Lu(t) + e^{-2L(t-t_0)} v'(t) \leq -2Lu(t) + 2Lu(t) = 0.$$

Für $t \geq t_0$ ist daher

$$u(t) \leq u(t_0) = \| x - y \| .$$

Daraus folgt

$$\| \varphi(t,x) - \varphi(t,y) \| \leq e^{2L(t-t_0)} \| x - y \| .$$

Für $t \leq t_0$ setzen wir $u(t) = e^{-2L(t_0-t)} v(t)$ und verfahren wie oben.

□

Die Stetigkeit der Lösungskurve $\varphi(t,x)$ in den Anfangswerten kann man auch direkt aus dem Beweis erhalten, indem man den Raum $\mathcal{M}$ anders definiert. Wir wählen $a, b > 0$ so, daß

$$Q = \overline{I}_a(t_0) \times \overline{U}_{2b}(x_0) \subset U$$

gilt und $F|Q$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist mit der Lipschitz-Konstanten L. Es sei $\delta > 0$ wie in (1.11) gewählt. Dann sei

$$\mathcal{M} = \left\{ \psi : I_\delta(t_0) \times U_b(x_0) \to \overline{U}_{2b}(x_0) \mid \psi \text{ stetig} \right\} .$$

Wir versehen $\mathcal{M}$ mit der Metrik

$$d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{\substack{|t-t_0|<\delta \\ |x-x_0|<b}} |\psi_1(t,x) - \psi_2(t,x)|.$$

Wie in Lemma 1.11 zeigt man, daß $\mathcal{M}$ eine vollständiger metrischer Raum ist. Für $\varphi \in \mathcal{M}$ sei

$$(P\varphi)(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi(s,x)) \, ds.$$

Dann ist $P\varphi$ stetig und es gilt

$$\begin{aligned} \| (P\varphi)(t,x) - x \| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s,\varphi(s,x))\, ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \| F(s,\varphi(s,x)) \| \ ds \right| \leq \delta \| F \|_Q \leq b. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\| (P\varphi)(t,x) - x_0 \| \leq \| (P\varphi)(t,x) - x \| + \| x - x_0 \| \leq 2b.$$

Daher ist P eine Abbildung von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}$. Wie im Beweis von Satz 1.10 zeigt man, daß $P : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ eine Kontraktion ist. Es sei $\varphi \in \mathcal{M}$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von P. Die Funktion φ erhält man als Grenzwert der Picard-Lindelöf Iteration

$$\varphi_0(t,x) = x, \quad \varphi_{k+1}(t,x) = x + \int_{t_0}^t F(s,\varphi_k(s,x))\, ds, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Folge (φ_k) gilt dann $d(\varphi_k,\varphi) \to 0$ für $k \to \infty$. Nach Definition des Abstandes d folgt daraus, daß $\varphi_k(t,x)$ gleichmässig in t und x gegen φ konvergiert. Auf Grund von Satz 6.43 aus Infini I ist φ daher stetig in x.

Wenn man $F : U \to \mathbb{R}^n$ als differenziebar voraussetzt, so kann man entsprechend zeigen, daß die Lösungskurve $\varphi(t,x)$ differnzierbar in x ist. Als ersten Schritt dazu zeigen wir

Satz 1.13. *Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-Abbildung. Dann ist die Lösungskurve $\varphi(t,x)$ eine stetig differenzierbare Funktion von x.*

Beweis: Es sei

$$F_*(t,x) = d_x F(t,x).$$

Dann ist

$$F_*(t,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Da F eine C^2-Abbildung ist, so ist

$$F_* : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$$

eine C^1-Abbildung und daher Lipschitz-stetig. Wir betrachten das folgende AWP:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt}(t,x) = F(t,\varphi(t,x)), \\ &\frac{d\psi}{dt}(t,x) = F_*(t,\varphi(t,x)) \circ \psi(t,x), \\ &\varphi(t_0,x) = x, \quad \psi(t_0,x) = E. \end{aligned}$$

Die Picard-Lindelöf-Iteration ergibt

$$\varphi_{k+1} = x + \int_{t_0}^{t} F(s, \varphi_k(s,x))\, ds,$$

$$\psi_{k+1} = E + \int_{t_0}^{t} F_*(s, \varphi_k(s,x)) \circ \psi_k(s,x)\, ds.$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt $d_x\varphi_0 = \psi_0$. Durch Induktion zeigt man

$$d\varphi_k = \psi_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Folgen (φ_k) und (ψ_k) konvergieren gleichmäßig gegen φ bzw. ψ für $|t - t_0| \le \delta$, $|x - x_0| \le b$. Daher konvergieren die Fogen (φ_k) und $(\partial\varphi_k/\partial x_j)_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, ..., n$, gleichmäßig. Nach Satz 8.21 aus Infini I ist $\varphi(t,x)$ daher eine C^1-Abbildung in x.

$\square$

Mit etwas mehr Aufwand kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 1.14. *Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Abbildung. Dann ist die Lösung $\varphi(t,x)$ des AWP*

$$\frac{df}{dt}(t,x) = F(t, f(t,x)), \quad f(t_0, x) = x,$$

eine k-mal stetig differenzierbare Funktion von x.

1.4. **Maximale Integralkurven.** Wie bisher betrachten wir ein dynamisches System

$$F : U \to \mathbb{R}^n$$

mit einer stetigen Funktion F, die auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Definition 1.15. Es sei $(t_0, x_0) \in U$. Eine Integralkurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ von F mit $\varphi(t_0) = x_0$ heißt **maximal**, wenn für jede andere Integralkurve $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ von F mit $\psi(t_0) = x_0$ gilt: $J \subset I$ und $\psi = \varphi|J$.

Bemerkung: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.Für eine maximale Integralkurve $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ von $F\colon I \times U \to \mathbb{R}^n$ gilt im allgemeinen nicht $J = I$.

Beispiel: Es sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Funktion

$$F(t,x) = 1 + x^2.$$

Wir betrachten das AWP

$$f'(t) = 1 + f(t)^2, \quad f(0) = 0.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung in einer Umgebung von 0 ist $f(t) = \tan t$. Der maximale Definitionsbereich ist $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Lemma 1.16. *Wenn $F(t,x)$ lokal Lippschitz-stetig bezüglich x ist, so hat jedes AWP (1.8) eine (und nur eine) maximale Lösung.*

Beweis: Es sei X die Menge aller Intervalle I mit
1. $t_0 \in I$.
2. Auf I existiert eine Lösung $\varphi_I : I \to \mathbb{R}^n$ des AWP

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0.$$

Wegen Satz 1.10 ist $X \neq \emptyset$. Sei

$$J = \bigcup_{I \in X} I.$$

Sei $t \in J$. Dann existiert $I \in X$ mit $t \in I$. Wir setzen

$$\varphi(t) := \varphi_I(t).$$

Es sei $I' \in X$ ein weiteres Intervall mit $t \in I'$. Dann gilt $[t_0, t] \subset I \cap I'$. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt $\varphi_I(t) = \varphi_{I'}(t)$. Damit ist

$$\varphi : J \to U$$

eine eindeutig definierte Lösung des AWP. Die Kurve φ ist offensichtlich die maximale Lösung.

□

Satz 1.17. *Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ lokal Lippschitz-stetig bezüglich x. Weiter sei $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Integralkurve von F. Wenn $\beta < \infty$, so existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\tau \in (\beta - \epsilon, \beta)$ mit $(\tau, \varphi(\tau)) \notin K$. Analoges gilt für $\alpha > -\infty$.*

Beweis: Wir nehmen an, daß ein $\gamma \in (\alpha, \beta)$ existiert so, daß für alle $t \in (\gamma, \beta)$ gilt $(t, \varphi(t)) \in K$. Wir zeigen dann, daß φ stetig auf $(\alpha, \beta]$ fortgesetzt werden kann. Es sei

$$M := \max_{(t,x) \in K} \| F(t,x) \| .$$

Dann gilt für alle $t_1, t_2 \in (\gamma, \beta)$:

$$\begin{aligned} \| \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \varphi'(s) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \| F(s, \varphi(s)) \| \, ds \right| \leq M |t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

Daher ist φ auf (γ,β) gleichmäßig stetig. Daraus folgt, daß φ eine stetige Fortsetzung auf $[\gamma,\beta]$ hat. Damit hat φ eine stetige Fortsetzung $\tilde{\varphi}:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$. Für alle $t\in(\alpha,\beta)$ gilt

$$\tilde{\varphi}(t)=\tilde{\varphi}(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(s,\tilde{\varphi}(s))ds.$$

Wegen der Stetigkeit von $\tilde{\varphi}:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ gilt diese Gleichung auch für $t=\beta$. Damit folgt, daß $\tilde{\varphi}\colon(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ das AWP löst im Widerspruch zur Maximalität von $\varphi:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^n$.

□

Mit anderen Worten besagt der Satz:

Wenn eine maximale Integralkurve nur endliche Lebensdauer hat, so verläßt sie jedes Kompaktum.

Für ein dynamisches System, dessen Definitionsbereich die spezielle Gestalt $I\times V$ hat, enthält der Satz die folgende Aussage:

Korollar 1.18. *Es sei $F\colon I\times V\to\mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich x und $\varphi:(\alpha,\beta)\to V$ sei eine maximale Integralkurve von F. Ist β nicht der rechte Randpunkt von I, so existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K\in V$ und zu jedem $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ein $t\in(\gamma,\beta)$ mit $\varphi\notin K$. analoges gilt für α.*

Beweis: $[\gamma,\beta]\times K$ ist eine kompakte Teilmenge von $I\times V$. Darauf kann Satz 1.17 angewendet werden.

□

Definition 1.19. Eine Abbildung $F:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ heißt linear beschränkt, wenn es stetige Funktionen $a,b:I\to\mathbb{R}$ gibt so, daß für alle $(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n$ gilt

$$\parallel F(t,x)\parallel\leq a(t)\parallel x\parallel+b(t).$$

Satz 1.20. *Es sei $F:I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ linear beschränkt und lokal Lipschitz-stetig. Dann ist jede maximale Integralkurve von F auf ganz I definiert.*

Beweis: Es sei $(\alpha,\beta)\subseteq I$ das Definitionsintervall einer maximalen Integralkurve φ. Angnommen, β ist nicht der rechte Randpunkt von I. Es sei $t_0\in(\alpha,\beta)$. Nach Korollar 1.18 ist $\varphi:[t_0,\beta)\to U$ unbeschränkt. Da φ eine Lösung ist, gilt

$$\varphi(t)=\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}F(s,\varphi(s))ds.$$

Aus der linearen Beschränktheit von F folgt für $t \in [t_0, \beta)$

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leq \|\varphi(t_0)\| + \left|\int_{t_0}^{t} \| F(s, \varphi(s)) \| \, ds\right| \\ &\leq \varphi(t_0)\| + \left|\int_{t_0}^{t} (a(s) \| \varphi(s) \| + b(s) ds\right| \\ &\leq \| \varphi(t_0) \| + \sup_{s \in [t_0, \beta]} |a(s)| \int_{t_0}^{t} \| \varphi(s) \| \, ds + \sup_{s \in [t_0, \beta]} |b(s)| |\beta - t_0|.\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.8 folgt, daß

$$\| \varphi(t) \| \leq \| b \|_{[t_0, \beta]} |\beta - t_0| e^{\|a\|_{[t_0,\beta]} |\beta - t_0|}$$

für $t \in [t_0, \beta]$. Dies ist ein Widerspruch. Deshalb ist $(\alpha, \beta) = I$.

□

1.5. **Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung.** Es sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung über $\mathbb{K}$ hat die Form

$$f'(t) = A(t) f(t) + b(t), \tag{1.13}$$

wobei $A : I \to \operatorname{Mat}(n, \mathbb{K})$ und $b : I \to \mathbb{K}^n$ Abbildungen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Seien $A(t) = (a_{ij}(t))$ und $b(t) = (b_i(t))$. Dann lautet (1.13) ausführlich

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= a_{11}(t) f_1(t) + \cdots + a_{1n}(t) f_n(t) + b_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n'(t) &= a_{n1}(t) f_1(t) + \cdots + a_{nn}(t) f_n(t) + b_n(t). \end{aligned}$$

Im Falle $b = 0$ heißt die Differentialgleichung **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Satz 1.21. *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Es seien A und b stetig. Dann existiert für alle $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine auf ganz I definierte Lösung des Anfangswertproblems*

$$f'(t) = A(t) f(t) + b(t), \quad f(t_0) = x_0.$$

Beweis: Es sei

$$F(t, x) = A(t)x + b(t).$$

Dann gilt

$$\| F(t,x) \| \leq \| A(t) \| \| x \| + \| b(t) \|,$$

d.h., die Abbildung

$$F(t,x) : I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

ist linear beschränkt im Sinne von Defintion 1.19. Es sei $[a,b] \subset I$. Da $A : I \to \mathrm{Mat}(n,\mathbb{K})$ stetig ist, existiert

$$L = \max_{t\in[a,b]} \| A(t) \| .$$

Dann gilt für alle $t \in [a,b]$ und $x, x' \in \mathbb{K}^n$:

$$\| F(t,x) - F(t,x') \| = \| A(t)(x - x') \| \leq L \| x - x' \|,$$

d.h., $F(t,x)$ ist Lipschitz-stetig bezüglich x auf $[a,b] \times \mathbb{K}^n$. Die Behautptung des Satzes folgt aus Satz 1.9, Satz 1.10 und Satz 1.20.

□

Korollar 1.22. *Es seien $a_0, \cdots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ stetige Funktionen und $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$ gegeben. Dann besitzt jedes AWP*

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) f^{(k)}(t) + b(t), \\ f^{(k)}(t_0) &= x_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{1.14}$$

genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Beweis: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

Nach Satz 1.1 ist die Lösung des AWP (1.14) äquivalent zur Lösung des AWP

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \quad \varphi(t_0) = (x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

□

Korollar 1.23. *Es sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung*

$$f'(t) = A(t)f(t)$$

auf I. Dann gilt:

1. *$\mathcal{L}$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.*
2. *Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{L}$. Dann ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Basis von $\mathcal{L}$ genau dann, wenn ein $t_0 \in I$ existiert so, daß $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ ist.*

Beweis: 1. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{L}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $c_1\varphi_1 + \cdots + c_k\varphi_k \in \mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ ist also ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Es sei $t_0 \in I$ und $\alpha_{t_0} : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^n$ sei definiert durch $\alpha_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$. Aus Satz 1.21 folgt, daß α_{t_0} ein Isomorphismus ist.
2. Da α_{t_0} ein Isomorphismus ist, führt α_{t_0} Basen von $\mathcal{L}$ in Basen von $\mathbb{K}^n$ über.

□

Definition 1.24. Eine Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von $\mathcal{L}$ heißt **Fundamentalsystem**.

Es sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$. Wir fassen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ als Spaltenvektoren einer Matrix Φ auf: $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$. Φ heißt **Fundamentalmatrix** der homogenen Gleichung $f'(t) = A(t)f(t)$. Für diese Matrix gilt offensichtlich

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t). \tag{1.15}$$

Lemma 1.25. *Für alle $t \in I$ ist*

$$\det \Phi(t) \neq 0,$$

d.h., für alle $t \in I$ ist $\Phi(t)$ invertierbar.

Beweis: Fogt aus Korollar 1.23,2).

□

Es sei $\varphi \in \mathcal{L}$. Dann existieren $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ mit $\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$. Damit gilt

$$\varphi(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Wir betrachten jetzt die inhomogene Gleichung

$$f'(t) = A(t)f(t) + b(t). \tag{1.16}$$

Es seien φ_1 und φ_2 Lösungen von (1.16). Wir setzen $\Psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Dann gilt

$$\Psi'(t) = A(t)\Psi(t),$$

d.h., $\Psi \in \mathcal{L}$. Damit gilt für den Lösungsraum $\mathcal{L}_{inh}$ von (1.16)

$$\mathcal{L}_{inh} = \varphi_1 + \mathcal{L},$$

d.h. $\mathcal{L}_{inh}$ ist ein affiner Raum. Man gewinnt also jede Lösung von (1.16) aus einer speziellen (partikulären) Lösung durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung. Kennt man ein Fundamentalsystem $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ der homogenen Gleichung, so kann man eine partikuläre Lösung von (1.16) mittels "Variation der Konstanten" konstruiert werden.

Satz 1.26. *(Variation der Konstanten) Es sei Φ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung $f'(t) = A(t)f(t)$. Weiter sei*

$$c(t) = \int \Phi(s)^{-1} b(s) ds.$$

und

$$\varphi(t) = \Phi(t)(c(t)).$$

Dann gilt

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t).$$

Beweis: Aus (1.15) folgt

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \Phi'(t)(c(t)) + \Phi(t)(c'(t)) \\ &= A(t)\Phi(t)(c(t)) + \Phi(t) \circ Phi(t)^{-1}(b(t)) \\ &= A(t)(\varphi(t)) + b(t).\end{aligned}$$

□

Wenn wir das Anfangswertproblem

$$f'(t) = A(t)f(t) + b(t), \quad f(t_0) = x_0,$$

lösen möchten, so müssen wir die Stammfunktion $c(t)$ entsprechend festlegen. Die Lösung ist

$$\varphi(t) = \Phi(t)\left(\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) ds + \Phi(t_0)^{-1} x_0\right).$$

Konstruktion eines Fundamentalsystems

Wir betrachten zuerst den Fall, daß $A(t)$ konstant ist. Es sei also $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ und

$$A(t) = A, \quad t \in I.$$

Die Picard-Lindelöf-Iteration zur Lösung des AWP

$$f'(t) = A(f(t)), \quad f(0) = x_0, \tag{1.17}$$

ergibt

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t Ax_0 ds = (E + tA)x_0p,$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A(E + sA)x_0 ds = (E + tA + \frac{t^2}{2}A^2)x_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(t) = (E + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}t^kA^k)x_0.$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir

$$\boxed{\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) = e^{tA}x_0.}$$

Hierbei ist

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k.$$

Für die matrixwertige Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Daraus folgt

$$\varphi'(t) = Ae^{tA}x_0 = A\varphi(t).$$

Dies zeigt uns unabhängig von der Picard-Lindelöf-Iteration, daß $\varphi(t)$ das AWP (1.17) löst. Diese Darstellung eignet sich z.B. zur Strukturuntersuchung von Differentialgleichungen. Sei z.B. A reell und schiefsymmetrisch. Dann verläuft jede Lösung von (1.17) auf einer Sphäre um 0, denn es gilt

$$e^{tA}(e^{tA})^{\top} = e^{t(A+A^{\top})} = E.$$

Daraus folgt, daß e^{tA} eine orthogonale Matrix ist und daher ist

$$\| \varphi(t) \|_2 = \| e^{tA}x_0 \|_2 = \| x_0 \| \text{ für alle} t \in \mathbb{R}.$$

Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Wir setzen

$$\varphi_i(t) = e^{tA}v_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.18}$$

Dann folgt aus Korollar 1.23, daß $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis des Lösungsraumes $\mathcal{L}$ von $f'(t) = A(f(t))$ ist.
Wenn $A(t)$ nicht konstant ist, so können wir ähnlich verfahren, um ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung zu konstruieren.

Satz 1.27. *Es sei $B(t)$ eine Stammfunktion von $A(t)$ auf I und es gelte $A(t)B(t) = B(t)A(t)$ für alle $t \in I$. Dann ist die Lösung des AWP*

$$f'(t) = A(t)f(t), \quad f(0) = x_0,$$

gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{B(t)}e^{-B(0)}x_0.$$

Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und

$$\varphi_i(t) = e^{B(t)}v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$f'(t) = A(t)f(t).$$

Beweis: 1. Wegen $[A(t), B(t)] = 0$ ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{B(t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{d}{dt}(B(t)^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}B'(t)B(t)^{k-1} \\ &= A(t)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B(t)^k = A(t)e^{B(t)}.\end{aligned}$$

Sei $x_0 \in \mathbb{K}^n$ und

$$\varphi(t) = e^{B(t)}e^{-B(0)}x_0.$$

Dann folgt

$$\varphi'(t) = A(t)e^{B(t)}e^{-B(0)}x_0 = A(t)\varphi(t),$$

und $\varphi(0) = x_0$. Damit ist φ Lösung des AWP.
2. Sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ eine Basis und

$$\varphi_i(t) = e^{B(t)}v_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungen der homogenen Gleichung $f'(t) = A(t)(f(t))$. Da $e^{B(0)}$ invertierbar ist, ist $e^{B(0)}v_1, \dots, e^{B(0)}v_n$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Aus Korollar 1.23 folgt, daß $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis des Lösungsraumes ist.

$\square$

1.6. **Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.** Im allgemeinen ist die Berechnung von $e^{B(t)}$ schwierig und deshalb liefert uns Satz 1.27 kein effektives Verfahren zur Berechnung eines Fundamentalsystems.
Wir nehmen jetzt wieder an, daß $A(t) = A$ konstant ist. In diesem Falle kann man mit Hilfe der Jordanschen Normalform von A zu einem geeigneten Fundamentalsystem gelangen.
Der einfachtste Fall liegt vor, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt. Es sei $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$, ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ. Weiter sei

$$\varphi_v(t) = e^{t\lambda}v.$$

Dann ist φ_v die Lösung des AWP

$$f'(t) = A(f(t)),\ f'(0) = v.$$

Wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ besitzt, so ist $\varphi_{v_1}, \dots, \varphi_{v_n}$ ein Fundamentalsystem. Dies löst z.B. das Problem der Konstruktion eines Fundametalsystems für eine reelle symmetrische Matrix A.
Wenn A nicht linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, so kann man ein Fundamentalsystem mit Hilfe von Hauptvektoren konstruieren. Wir müssen dazu allerdings zum Körper $\mathbb{C}$ übergehen.

Definition 1.28. Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, heißt **Hauptvektor der Matrix A zum Eigenwert λ**, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert so, daß

$$(A - \lambda E)^k v = 0.$$

Die kleinste derartige Zahl k heißt **Stufe** von v.

Die Hauptvektoren der Stufe 1 sind genau die Eigenvektoren von A. Ferner gilt: Ist v ein Hauptvektor der Stufe k, so sind die Vektoren

$$v_j = (A - \lambda E)^{k-j}v, \quad j = 1, \dots, k,$$

Hauptvektoren der Stufe j. v_1 ist ein Eigenvektor und v_i, $i = 2, \dots, k$, ist eine Lösung der Gleichung

$$(A - \lambda E)v_i = v_{i-1}.$$

Aus dem Satz über die Jordansche Normalform folgt

Satz 1.29. *Es sei $A \in Mat(n, \mathbb{C})$. Dann existiert eine Basis von $\mathbb{C}^n$, die aus Hauptvektoren besteht, wobei zu jedem k-fachen Eigenwert λ von A, k Hauptvektoren $v_1, \dots, v_k$, gehören mit Stufe$(v_j) \leq j$.*

Es sei $v_1 \dots, v_n$ eine solche Basis von Hauptvektoren. Dann ist

$$\varphi_i(t) = e^{tA}v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung

$$f'(t) = Af(t).$$

Wir untersuchen die Struktur dieser Basis. Es sei v ein Hauptvektor zum Eigenwert λ und der Stufe k. Dann ist

$$e^{tA}v = e^{t\lambda}e^{t(A-\lambda E)}v = e^{t\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda E)^j v.$$

Da $(A-\lambda E)^j v = 0$ für $k \geq j$ gilt, reduziert sich die Reihe auf eine Summe und man erhält

$$\boxed{\varphi_v(t) = e^{t\lambda}p_v(t) \quad \text{mit} \quad p_v(t) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}(A-\lambda E)^j v.}$$

Dabei ist $p_v(t)$ ein Polynom vom Grade $\leq k-1$, dessen Koeffizienten $\frac{1}{j!}(A-\lambda E)^j v$ Vektoren in $\mathbb{C}^n$ sind.

Konstruktion eines Fundamentalsystems für $\dot{x} = Ax$

1. Es sei
$$\det(\lambda E - A) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$$
die Faktorisierung des charakteristischen Polynoms von A in Linearfaktoren, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind.
2. Zu jedem Eigenwert λ_i der Vielfachheit k_i konstruiere man Hauptvektoren $v_{i1}, \ldots, v_{im_i}$ mit $\text{Stufe}(v_{ij}) \leq j$. Es sei
$$\varphi_{ij}(t) = e^{t\lambda_i}p_{v_{ij}}(t), \quad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m_i.$$
Dann ist φ_{ij}, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, m_i$, ein Fundamentalsystem.

Beispiel: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat A den 3-fachen Eigenwert 1. e_1 ist ein Eigenvektor, e_2 ein Hauptvektor der Stufe 2 und e_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Als Lösungen erhalten wir

$$\varphi_1(t) = e^t e_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(t) = e^t(E + (A - E)t)e_2 = e^t \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(t) = e^t(E + (A - E)t + \frac{1}{2}(A - E)^2 t^2)e_3 = e^t \begin{pmatrix} 3t + 2t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ist ein Fundamentalsystem.

Wir betrachten jetzt eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vom Grade n. Eine Gleichung dieser Art hat die Form

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 = q(t), \tag{1.19}$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegebene Konstanten und $q : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist. Dazu gehört die homogene Gleichung

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) + \cdots + a_1 f'(t) + a_0 = 0 \tag{1.20}$$

Zur Abkürzung führen wir die Operatorschreibweise ein. Es sei

$$P(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Dann ist $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grade n mit komplexen Koeffizienten. Jedes solche Polynom definiert einen Operator

$$P(D) : C^n(I) \to C^0(I)$$

durch

$$P(D)f = f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)}.$$

Wir können dann (1.17) und (1.20) wie folgt schreiben

$$P(D)f = q \quad \text{bzw.} \quad P(D)f = 0.$$

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}$$

Gegeben sei $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Nach Abschnitt 1.1 ist die Lösung des AWP

$$P(D)f = q, \quad f(t_0) = x_1, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = x_n, \tag{1.21}$$

äquivalent zur Lösung des AWP

$$\varphi' = A\varphi + b, \quad \varphi(t_0) = x_0. \tag{1.22}$$

Es sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die nach Satz 1.21 eindeutig bestimmte Lösung von (1.22). Dann ist $f = \varphi_1$ die eindeutig bestimmte Lösung von (1.21). Die Entwicklung von $\det(\lambda E - A)$ nach der letzten Zeile ergibt

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = P(\lambda),$$

d.h., das charakteristische Polynom von A stimmt mit $P(\lambda)$ überein.
Es sei λ ein Eigenwert von $P(x)$ mit der Vielfachheit k. Es seien $v_1, \dots, v_k$ Hauptvektoren von A zum Eigenwert λ mit $\text{Stufe}(v_j) \leq j$. Weiter sei

$$\varphi_j(t) = e^{\lambda t} P_{v_j}(t).$$

Dann ist $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ Teil des Fundamentalsystems von Lösungen der Gleichung

$$f' = Af.$$

Es seien $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn})$ die Komponenten von φ_j. Nach Satz 1.1 sind $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{k1}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$P(D)f = 0.$$

Weiterhin gilt $\varphi_{ji} = \varphi_{j1}^{(i-1)}$, $i = 1, \dots, n$. Da die $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linear unabhängig sind, folgt daraus, daß die Funktionen $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{k1}$ linear unabhängig sind. Nach Konstruktion hat φ_{j1} die Form

$$\varphi_{j1}(t) = e^{\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} a_{ji} t^i.$$

Auf Grund der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{jk}$ ist die Matrix (a_{ji}) invertierbar. Daraus folgt, daß

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen von

$$P(D)f = 0$$

sind.

Wenn wir diese Konstruktion für jeden Eigenwert λ_i von $P(x)$ durchführen, so erhalten wir ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung

$$P(D)f = 0.$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 1.30. *(Fundamentalsystem) Es sei*

$$P(x) = \prod_{j=0}^{r} (x - \lambda_j)^{k_j}$$

die Faktorisierung von $P(x)$, wobei die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschieden sind. Für $1 \leq i \leq r$ sei

$$\varphi_{ij}(t) = t^j e^{\lambda_i t}, \quad 0 \leq j \leq k_i - 1.$$

Dann sind die Funktionen φ_{ij}, $i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, k_i - 1$, ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$P(D)f = 0.$$

Korollar 1.31. *Es seien $t_0 \in I$ und $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ gegeben. Dann besitzt das AWP*

$$P(D)f = 0, \quad f^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

genau eine Lösung.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 1.1 und Satz 1.30.

□

Beispiel: $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$. Für das charakteristische Polynom gilt:

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)^3.$$

Damit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $k = 0$ und $k_2 = 3$. Aus Satz 1.9 folgt, daß

$$1, e^x, xe^x, x^2 e^x$$

ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung ist.

Zur Konstruktion einer particulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$P(D)f = q$$

kann man die Methode der Variation der Konstanten anwenden. Aus Satz 1.26 ergibt sich unter Verwendung von Satz 1.1 der folgende Satz.

Satz 1.32. *(Variation der Konstanten)*
Es sei $y_1, \dots, y_n$ eine Basis des Lösungsraumes der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$ der Ordnung n. Dann gilt:
1) Für jede stetige Funktion $q : I \to \mathbb{C}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1 & y_2' \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

eine Lösung $u_1, \dots, u_n$.
2) Sind $U_1, \dots, U_n$ Stammfunktionen auf I zu $u_1, \dots, u_n$, so ist

$$y_0 = U_1 y_1 + \cdots + U_n y_n$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $P(D)y = q$.

Beispiel: $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.
Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y'' + y = 0$ sind $y_1(x) = \sin x$ und $y_2(x) = \cos x$. Wir müssen nun die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

lösen. Wegen der Orthogonalität der Matrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan(x) \end{pmatrix}.$$

Als Stammfunktion zu $u_1 = 1$ und $u_2 = -\tan x$ wählen wir

$$u_1(x) = x \text{ und } u_2(x) = \ln|\cos x|.$$

Als particuläre Lösung der Differentialgleichung ergibt sich

$$y_0(x) = x \sin x + (\ln|\cos x|) \cos x.$$

Reelle Lösungen

Die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1}$ der Differentialgleichung

$$P(D)f = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0 \tag{1.24}$$

seien reell. Wir interessieren uns jetzt für reelle Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$.

Lemma 1.33. *Es sei $y : I \to \mathbb{C}$ eine komplexe Lösung von (1.24). Dann sind $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ ebenfalls Lösungen von (1.24).*

Beweis: Es sei $y = u + iv$, wobei $u = \mathrm{Re}(y)$ und $v = \mathrm{Im}(y)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$y^{(k)} = u^{(k)} + iv^{(k)}.$$

Aus $P(D)y = 0$ folgt dann

$$[u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0 u] + i[v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \cdots + a_0 v] = 0.$$

Die Summen in den Klammern sind reelle Funktionen und daher Null.

□

Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von P ist, so sind

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

linear unabhängige reelle Lösungen von (1.24). Wenn $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle ist, so ist auch $\overline{\lambda}$ eine k-fache Nullstelle. Das Paar $\lambda, \overline{\lambda}$ liefert die $2k$ komplexen Lösungen

$$\begin{aligned} &e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x} \\ &e^{\overline{\lambda} x}, xe^{\overline{\lambda} x}, \dots, x^{k-1}e^{\overline{\lambda} x}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Damit sind auch

$$x^j\frac{e^{\lambda x} + e^{\overline{\lambda} x}}{2}, \text{ und } x^j\frac{e^{\lambda x} - e^{\overline{\lambda} x}}{2i}, \quad j = 0, \dots, k-1,$$

Lösungen von (1.24). Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind also

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x, ; xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

$2k$ reelle Lösungen, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, da sich die Lösungen (1.25) als Linearkombinationen dieser Lösungen darstellen lassen. Daraus erhalten wir schließlich

Satz 1.34. *Es sei $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ der Raum der reellen Lösungen von (1.24). Dann ist $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die oben konstruierten Lösungen bilden eine Basis von $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$.*

Beispiel: $y'' - 2y' + 5y = 0$
Charakteristisches Poynom: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. Nullstellen von $P(\lambda)$: $\lambda_1 = 1 + 2i,\ \lambda_2 = 1 - 2i$.
Komplexes Fundamentalsystem: $e^{(1+2i)x}, e^{(1-2i)x}$.
Reelles Fundamentalsystem: $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$.

1.7. **Anwendung auf Schwingungsprobleme.** Harmonische Schwingungen mit einem Freiheitsgrad werden durch lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Wenn es sich um freie Schwingungen handelt, so ist die Differentialgleichung homogen. Für erzwungene Schwingungen haben wir es mit einer inhomogenen Differentialgleichung zu tun.

I. Freie Schwingungen

Wir nehmen an, daß die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit ist. Dann lautet die Gleichung des freien harmonischen Oszillators

$$y'' + 2dy' + ky = 0.$$

Dabei ist $d \geq 0$ eine Dämpfungskonstante und $k > 0$ eine Elastizitätskonstante. Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2d\lambda + k.$$

Die Nullstellen von P sind

$$x_1 = -d + \sqrt{d^2 - k},\ \lambda_2 = -d - \sqrt{d^2 - k}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle.

1. $d^2 < k$, **schwache Dämpfung**;
2. $d^2 > k$, **starke Dämpfung**;
3. $d^2 = k$, **kritische Dämpfung**.

1. **Schwache Dämpfung**
   Es sei $\omega = \sqrt{k - d^2}$. Dann sind $\lambda_1 = -d + i\omega$ und $\lambda_2 = -d - i\omega$ konjugiert komplexe Nullstellen. Nach Satz 1.17 hat die allgemeine reelle Lösung die Form
   $$y(t) = e^{-dt}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Dies kann man auch wie folgt schreiben
   $$y(t) = e^{-dt}\,\mathrm{Re}\left((c_1 - ic_2)e^{i\omega t}\right).$$

Es sei $c_1 - ic_2 = Ae^{i\varphi}$ die Darstellung in Polarkoordinaten. Dann erhalten wir für die allgemeine Lösung die folgende Darstellung

$$y(t) = Ae^{-dt}\cos(\omega t + \varphi).$$

φ ist bis auf ein ganzes Vielfaches von 2π bestimmt und heißt **Phase** der Schwingung.
Wenn $d = 0$ ist, so ist $y(t)$ periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$, wobei $\omega = \sqrt{k}$.
Wenn $d > 0$ ist, so klingt jede Lösung exponentiell ab.

2. **Starke Dämpfung**
In diesem Falle sind die Nullstellen λ_1 und λ_2 reell und es gilt:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0.$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ klingt die Lösung $t \to \infty$ exponentiell ab. Jede Lösung $\neq 0$ wird höchstens einmal extremal und geht höchstens einmal durch Null.

3. **Kritische Dämpfung**
In diesem Falle ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -d$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-td}.$$

Jede Lösung $\neq 0$ klingt für $t \to \infty$ exponentiell ab, wird höchstens einmal extremal und geht höchstens einmal durch Null.

Literatur

V.I. Arnold: *Ordinary Differential Equations*, The MIT Press, 1973.
O. Forster: *Analysis II*, Viehweg, 1996.
H. Grauert und W. Fischer: *Differential- und Integralrechnung II*, Springer-Verlag, 1968.
K. Königsberger: *Analyis II*, Springer-Lehrbuch, Springer-Verlag, 1997.
W. Walter: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, 5. Auflage, 1992.

2. Mass- und Integrationstheorie

2.1. **Einleitung.** Der bisherige Integralbegriff erlaubt uns nur, Regelfunktionen zu integrieren. Etwas allgemeiner ist das Riemann-Integral. Wir erinnern uns an die Defintion des Riemann-Integrals. Es sei $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zu einer Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_m\}$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, von $[a,b]$ und Stützstellen $\xi_Z = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, ist die **Riemannsche Summe** definiert als

$$S(Z,\xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn es ein $I \in \mathbb{R}$ gibt so, daß für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|I - S(Z, \xi_Z)| < \epsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit

$$\max_i \{x_i - x_{i-1}\} < \delta$$

und alle Folgen ξ_Z von Stützstellen. I heißt dann das Riemann-Integral von f. Dafür schreibt man

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, so ist f insbesondere beschränkt. Ein wichtiger Nachteil des Riemann-Integrales ist der folgende Sachverhalt: Es sei $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen für die gilt

$$\int_I |f_l - f_k|^2 dx \to 0$$

für $l, k \to \infty$, d.h., (f_k) ist eine Cauchy-Folge im quadratischen Mittel. Dann existiert im allgemeinen **keine** Riemann-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_I |f - f_k|^2 dx \to 0$$

für $k \to \infty$.

Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \exists k \in \mathbb{Z} : \ x = \frac{k}{n!} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $f_n(x) = 1$ für fast alle $x \in [0,1]$. Daher ist f_n Riemann integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Andererseits konvergiert (f_n) punktweise gegen die Dirichletsche Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Die Dirichletsche Funktion ist aber nicht Riemann-integrabel.

□

Aus diesen Gründen hat Lebesgue den Integrationsbegriff erweitert. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Seien $A < B$ so, daß $A < f(x) < B$ für alle $x \in [a,b]$. Wir wählen eine Zerlegung $A = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = B$ von $[A,B]$. Es sei

$$X_i = \{x \in [a,b] | f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Es sei $\mu(X_i)$ das Maß der Menge X_i. $\mu(X_i)$ kann man als "Gesamtlänge" von X_i verstehen. Wir nehmen an, daß dies definiert ist. Es sei $\xi_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$. Anstelle der Riemannschen Summmen betrachten wir jetzt die Summen

$$S_L(Z, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\mu(X_i).$$

Wir nennen f **Lebesgue-integrierbar**, wenn folgendes gilt

1. Für jede Zerlegung $Z = \{y_0, \ldots, y_m\}$ von $[A,B]$ sind die Mengen $f^{-1}([y_{i-1}, y_i))$, $i = 1, \ldots, m$, meßbar.

2. Es existiert $I \in \mathbb{R}$ so, daß für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|I - S_L(Z, \xi)| < \epsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit

$$\max_i \{y_i - y_{i-1}\} < \delta$$

und alle Folgen ξ von Stützstellen.

Als erstes stellt sich die Frage, was das Maß $\mu(X)$ einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$, oder allgemeiner, einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist. Dies führt zur Definition des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^n$.

2.2. **Das Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$.** Die Lebesguesche Theorie unterscheidet nicht zwischen eigentlichen und uneigentlichen Integralen. Es sind von vornherein unendliche Funktionenwerte und unbeschränkte Gebiete zugelassen. Aus diesem Grund erinnern wir an die Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und erweitern sie in einem Punkt.

1. $\forall a \in \mathbb{R} : a \pm \infty = \pm\infty$
2. $\forall a \in (0, \infty] : a \cdot \infty = \infty$
3. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : a/\infty = 0$
4. $0 \cdot \infty = 0,\ (-\infty) \cdot 0 = 0$
5. $\infty + \infty = \infty$

Aber $\infty - \infty$ ist nach wie vor nicht definiert.

(a) *Unendliche Reihen.*

Es sei (a_k) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ mit $0 \leq a_k \leq \infty$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ immer definiert. Sie hat den Wert ∞, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen gegen ∞ konvergiert. Insbesondere ist dies der Fall, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_k = \infty$. Die Formel

$$\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k$$

gilt für beliebige $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

(b) *Doppelreihensatz*

Es gilt

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right),$$

falls eine der Reihen absolut konvergent ist. Der Satz gilt auch, falls $0 \leq a_{ij} \leq \infty$, $i, j \in \mathbb{N}_0$.
(c) *Limes superior und inferior.*
Für eine Folge (a_k) in $\overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup a_k = \inf_p \{\sup_{k\geq p} a_k\},$$
$$\lim_{k\to\infty} \inf a_k = \sup_p \{\inf_{k\geq p} a_k\}.$$

Es sei

$$\alpha_p = \sup_{k\geq p} a_p \quad ,\beta_p = \inf_{k\geq p} a_k.$$

Dann ist (α_p) monoton fallend und (β_p) monoton wachsend. Daher gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup a_k = \lim_{p\to\infty} \alpha_p,\ \lim_{k\to\infty} \inf a_k = \lim_{p\to\infty} \beta_p.$$

2.3. **Meßräume.**

Definition 2.1. *Es sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt σ-Algebra auf X, wenn gilt:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
3. *Es sei (A_k) eine Folge in $\mathcal{A}$. Dann ist $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.*

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **meßbare Mengen** *und $(X, \mathcal{A})$ heißt* **Meßraum** *(meßbarer Raum).*

Beispiele: 1) Sei $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X.
2) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist eine σ-Algebra.
3) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $Y \subset X$. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \mid \exists A \in \mathcal{A} : B = Y \cap A\}$$

eine σ-Algebra auf Y. Wir nennen $\mathcal{B}$ die Spur von $\mathcal{A}$ auf Y oder die von $\mathcal{A}$ induzierte σ-Algebra auf Y.
4) Sei $f : X \to Y$ Abbildung, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf $X, \mathcal{B}$ σ-Algebra auf Y.

$$f_*\mathcal{A} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$
$$f^*\mathcal{B} = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

$f_*\mathcal{A}$ und $f^*\mathcal{B}$ sind σ-Algebren auf X bzw. Y.

Lemma 2.2. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X. Dann gilt:*
a) $X \in \mathcal{A}$
b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.
c) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Beweis: a) folgt aus 1) und 2). b) Sei $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \cdots \emptyset$. Dann ist wegen 3)

$$A \cup B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}.$$

c) Es gilt

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = X - \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (X - A_k).$$

□

Lemma 2.3. *Es sei $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, eine Familie von σ-Algebren auf X. Dann ist $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf X.*

Beweis: Übung!

Es sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{C}_\sigma$ der Durchschnitt aller σ-Algebren $\mathcal{A}$ auf X, die $\mathcal{C}$ enthalten. Da $\mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, ist $\mathcal{C}_\sigma \neq \emptyset$. $\mathcal{C}_\sigma$ ist auf Grund von Lemma 2.3 eine σ-Algebra. $\mathcal{C}_\sigma$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{C}$ enthält und heißt die von $\mathcal{C}$ erzeugte Algebra.

Beispiele: 1) Wenn $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist, so ist $\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}$.
2) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$. Dann heißt $\mathcal{B} = \mathcal{T}_\sigma$ die Borelsche σ-Algebra von X. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen **Borelsche Mengen**. Es sind also z.B. höchstens abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte von offenen und abgeschlossenen Mengen von X Borelsch.

Definition 2.4. *Es seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Meßräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt meßbar, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt: $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Lemma 2.5. *Es seien $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ und $(Z, \mathcal{C})$ Meßräume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ seien meßbare Abbildungen. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls meßbar.*

Beweis: klar.

Lemma 2.6. *Seien $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ meßbare Räume und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine Teilmenge mit $\mathcal{B} = \mathcal{C}_\sigma$. Dann ist $f : X \to Y$ meßbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{C}$.*

Beweis: $\Leftarrow$) Nach Voraussetzung ist

$$\mathcal{C} \subset f_*\mathcal{A} = \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Da $f_*\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt

$$\mathcal{B} = \mathcal{C}_\sigma \subset f_*\mathcal{A}.$$

Daher ist f meßbar.

Die andere Richtung ist klar.

□

Beispiel: Sei $(Y,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{B} = \mathcal{T}_\sigma$ die Borelsche σ-Algebra. . Dann ist $f : X \to Y$ meßbar genau dann, wenn $f^{-1}(U)$ meßbar ist für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$. Insbesondere ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen X und Y meßbar.

Satz 2.7. *Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum.*

1. *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die Menge $f^{-1}((a,\infty]) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid f(x) > a\}$ meßbar ist.*
2. *Eine Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann meßbar, wenn alle Komponenten $f_1, ..., f_n \colon X \to \mathbb{R}$ meßbar sind.*
3. *Die Menge $\{f : X \to \mathbb{R}^n \mid f$ ist meßbar $\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum unter der punktweisen Addition von Abbildungen und der punktweisen Multiplikation mit Skalaren.*
4. *Ist $f : X \to \mathbb{R}^n$ meßbar , so ist auch $\| f \| \to \mathbb{R}$ meßbar . Sind $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ meßbar , so auch $f \cdot g \colon X \to \mathbb{R}$.*

Beweis: 1) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Dann ist

$$(a,b] = (a,\infty] - (b,\infty].$$

Jedes offene Intervall $(c,d) \subset \mathbb{R}$ ist darstellbar als Vereinigung abzählbar vieler Intervalle $(a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$.

2) $\Rightarrow$) Sei $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente. Da π_i stetig ist, ist $f_i = \pi_i \circ f$, $i = 1, ..., n$, auf Grund von Lemma 2.5 meßbar
.

$\Leftarrow$)

Lemma. *Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung von abzählbar vielen Quadern der Form*

$$Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

Beweis: Erfolgt später.

Aus diesem Lemma zusammen mit Lemma 2.6 folgt, daß f meßbar ist, falls $f^{-1}(Q)$ meßbar ist für alle Quader Q der obigen Form. Es gilt

$$f^{-1}(Q) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}\left([a_k, b_k)\right).$$

Nach Voraussetzung sind die Mengen $f_k^{-1}\left([a_k, b_k)\right)$, $k = 1, ..., n$, meßbar . Daher ist $f^{-1}(Q)$ meßbar .

3) Die Abbildungen $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to v + w \in \mathbb{R}^n$ und $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \lambda v \in \mathbb{R}^n$ sind stetig, also meßbar .

4) Die Funktion $x \in \mathbb{R}^n \to \| x \| \in \mathbb{R}$ ist stetig. Daher ist $\| f \|$ meßbar . Entsprechend folgt, daß$f \cdot g$ meßbar ist.

$\square$

Die Meßbarkeit überträgt sich auch auf Grenzwerte. Es sei (f_j) eine Folge von Funktionen $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann definieren wir die Funktionen

$$\sup_j f_j, \quad \inf_j f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

punktweise, d.h., für alle $x \in X$ ist

$$\left(\sup_j f_j\right)(x) = \sup_j f_j(x), ...$$

Satz 2.8.

1) *Es sei (f_j) eine Folge meßbarer Funktionen $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind die Funktionen*

$$\sup_j f_j, \quad \inf_j f_j, \quad \limsup_{j\to\infty} f_j, \quad \liminf_{j\to\infty} f_j$$

meßbar . Konvergiert f_j punktweise gegen f, so ist f meßbar .

2) *Es seien $f_j : X \to \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, meßbar und es gelte $f_j(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist f meßbar .*

Beweis: 1) Es gilt

$$\left\{x \in X \mid \left(\sup_j f_j\right)(x) > a\right\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f_j(x) > a\right\}.$$

Aus Satz 2.7, 1), folgt, daß $\sup_j f_j$ meßbar ist. Analog folgt, daß $\inf_j f_j$ meßbar ist. Daraus folgt, daß

$$\limsup_{j\to\infty} f_j = \inf_j \left(\sup_{k\geq j} f_k\right)$$

meßbar ist. Ebenso folgt, daß $\inf_j f_j$ meßbar ist. Wenn (f_j) punktweise gegen f konvergiert, so ist

$$\lim_{j\to\infty} f_j = \limsup_{j\to\infty} f_j$$

und daher ist $f = \lim_{j\to\infty} f_j$ meßbar .
2) Folgt aus Satz 2.7, 2).

$\square$

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und M eine Menge. Eine Abbildung $f : X \to M$ heißt **Stufenabbildung** oder **elementar**, wenn gilt:
1) $f(X) = \{m_1, \ldots, m_n\}$.
2) $\forall m \in M :\ f^{-1}(m)$ ist meßbar.

Dann gilt

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$$

wobei $X_i = f^{-1}(m_i)$, $1 \leq i \leq m$.
Beispiel: Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Dirichletfunktion, d.h.,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist $f([0,1]) = \{0,1\}$. Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Dann ist $f^{-1}(x) = \emptyset$. Die leere Menge ist meßbar. Weiter ist

$$f^{-1}(0) = [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Da die rationalen Zahlen abzählbar sind, ist $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ abzählbar. Sei etwa

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$$

eine Abzählung. Die Menge $\{r_i\}$ ist abgeschlossen und daher Borelsch, d.h., meßbar. Da

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\},$$

ist $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ die Vereinigung abzählbar vieler meßbarer Mengen und daher meßbar. Schließlich ist

$$f^{-1}(1) = [0,1] \setminus ([0,1] \cap \mathbb{Q})$$

das Komplement einer meßbaren Menge und deshalb ebenfalls meßbar. Damit haben wir gezeigt, daß die Dirichletfunktion eine Stufenfunktion ist.

□

Satz 2.9. *Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ ist meßbar genau dann, wenn eine Folge (f_k) elementarer Abbildungen $f_k : X \to \mathbb{R}^n$ existiert mit*

$$\forall x \in X\colon\ f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Beweis: $\Leftarrow$) Nach Definition sind Stufenabbildungen meßbar . Wenn (f_k) punktweise gegen f konvergiert, so folgt aus Satz 2.8, 1), daß f meßbar ist.

$\Rightarrow$) Es sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ meßbar. Wegen Satz 2.7, 2), können wir $n = 1$ annehmen. Sei

$$I_j = \left[-n + \frac{j-1}{n}, -n + \frac{j}{n}\right],\ 1 \le j \le 2n^2.$$

Für $n \geq 1$ sei

$$f_n(x) = \begin{cases} -n + \frac{j-1}{n}, & f(x) \in I_j \\ -n, & f(x) \in (-\infty, -n) \\ n, & f(x) \in (n, \infty). \end{cases}$$

Aus Satz 2.7, 1), folgt, daß f_n eine Stufenfunktion ist. Es sei $x \in X$ und sei $n > |f(x)|$. Dann existiert j, $1 \le j \le 2n^2$, mit $f(x) \in I_j$. Daraus folgt

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

d.h., $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$.

□

Satz 2.10. *Es sei $f : X \to [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge $f_1 \le f_2 \le \cdots$ von Stufenfunktionen $f_k : X \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert, d.h., es ist $f = \sup_j f_j$.*

Beweis: Für $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f_j(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^j}, & \text{falls } \frac{k-1}{2^j} \le f(x) < \frac{k}{2^j},\ k < j2^j. \\ j, & f(x) \geq j. \end{cases}$$

Dann ist (f_j) eine Folge von Stufenfunktionen und man zeigt leicht, daß $f_j \leq f_{j+1}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$. Wie im Beweis von Satz 2.10 folgt, daß (f_j) punktweise gegen f konvergiert. Da (f_j) eine monoton wachsende Folge ist, gilt

$$f = \sup_j f_j.$$

□

2.4. **Maße.** Wir wollen jetzt meßbare Mengen messen. Dazu benötigen wir Maße.

Definition 2.11. *Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum. Ein (positives) Maß auf $(X, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Die Funktionen μ ist σ-additiv, d.h.: Ist (A_k) eine Folge paarweise disjunkter meßbarer Mengen, so ist*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ein **Maßraum** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Meßraum $(X, \mathcal{A})$ zusammen mit einem Maß μ auf $(X, \mathcal{A})$.
Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt **σ-endlich** wenn eine Folge (A_k) in $\mathcal{A}$ existiert mit $Y \subset \cup A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$. Weiter heißt μ **σ-enlich**, wenn X σ-endlich ist.

Beispiele: 1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. Dann kann $\mu(X)$ beliebig gewählt werden.
2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sei $p \in X$. Für $A \subset X$ definieren wir

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & p \in A; \\ 0, & p \notin A. \end{cases}$$

Dann ist δ_p ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$. δ_p heißt **Dirac-Maß** in p.
3) *Zählmaß.* Für $A \subset X$ sei $\xi(A) = |A|$, wenn A endlich ist und $\xi(A) = \infty$, falls A unendlich ist. Dann ist ξ ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$. ξ heißt das **Zählmaß.**

Elementare Eigenschaften von Maßen

Satz 2.12. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:*

1. *(Additivität) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2. *(Monotonie) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

3. *Für jede Folge (A_k) in $\mathcal{A}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

4. *Für jede Folge (A_k) in $\mathcal{A}$ mit $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

5. *Für jede Folge (A_k) in $\mathcal{A}$ mit $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt*

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis: 1) Es sei $A_1 = A, A_2 = B$, und $A_k = \emptyset$ für $k \geq 3$. Aus i) und ii) folgt

$$\mu(A \cup B) = \mu(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \mu(A) + \mu(B).$$

2) Es ist $B = A \cup (B \setminus A)$. Da A und $B \setminus A$ disjunkt sind, folgt aus 1)

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

3) Sei $A'_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})$.
Dann sind die A'_k paarweise disjunkt und es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k.$$

Aus ii) folgt damit

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

4) Sei $B_k = A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}$. Dann ist $A_k = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ eine disjunkte Zerlegung von A_k. Daher ist

$$\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j).$$

Für $k \to \infty$ ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

5) Es sei $B_n := A_1 \setminus A_n$. Dann gilt $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$. Aus 4) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(A_1 - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Da A_1 die disjunkte Vereinigung von A_n und B_n ist, folgt

$$\mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) + \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) + \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Da $\mu(A_1) < \infty$ ist, ergibt sich aus dieser Gleichung die behauptete Gleichung.

□

Bemerkung: Ohne die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ gilt 5) nicht.

Beispiel: Sei $A_n = [n, \infty)$. Dann ist $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, aber $\mu(A_n) = \infty$ für alle $n \in N$.

Definition 2.13. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Teilmenge $N \subset X$ heißt* **Nullmenge** *bezüglich μ, wenn ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $N \subset A$ und $\mu(A) = 0$. Umgekehrt sagen wir, daß die Menge $X \setminus N$ volles Maß hat.*

Lemma 2.14. *Die (höchstens) abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.*

Beweis: Übung!

Im allgemeinen sind nicht alle Nullmengen meßbar im bisherigen Sinne, d.h., eine Nullmenge $N \subset X$ ist nicht notwendig Element der σ-Algebra $\mathcal{A}$.

Definition 2.15. *Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt* **vollständig**, *wenn jede Teilmenge einer Nullmenge meßbar ist.*

Man kann im allgemeinen die σ-Algebra $\mathcal{A}$ um die Nullmengen wie folgt erweitern: Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt μ-**meßbar**, wenn eine meßbare Menge $A \in \mathcal{A}$ und eine Nullmenge N existiert so, daß

$$Y = A \cup N.$$

Es sei $\overline{\mathcal{A}}$ die Menge aller μ-meßbaren Mengen. Man zeigt leicht, daß $\overline{\mathcal{A}}$ wieder eine σ-Algebra ist. Das Maß μ kann man wie folgt auf $\overline{\mathcal{A}}$ erweitern. Für $Y = A \cup N$ mit $A \in \mathcal{A}$ und N eine Nullmenge setzen wir

$$\mu(Y) = \mu(A).$$

Man prüft leicht nach, daß $\mu : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ wohldefiniert ist und auf $\mathcal{A}$ mit dem bisherigen Maß übereinstimmt. Dann ist $(X, \overline{\mathcal{A}}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Er heißt die **Lebesgue-Komplettierung** von $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sei $(Y, \mathcal{B})$ ein Meßraum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt μ-**meßbar**, wenn das Urbild meßbarer Mengen μ-meßbar ist.

2.5. **Fortsetzung von Maßen.** In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion von Maßen. Wir gehen dabei aus von einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ und einem Prämaß μ auf $\mathcal{A}$. Das Hauptziel ist die Erweiterung von μ zu einem Maß auf der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$.

Definition 2.16. *1) Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X heißt* **Mengenalgebra**, *wenn folgendes gilt:*
i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}$.
2) Ein positives Maß μ auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$
i) $\mu(\emptyset) = 0$
ii) σ-Additivität: Sei (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$. Wenn $\cup_{n \geq 1} A_n$ Element von $\mathcal{A}$ ist, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Satz 2.17. *(Fortsetzungssatz von Hahn):*
Es sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra in X und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein positives Maß auf $\mathcal{A}$. Weiter sei X Vereinigung von abzählbar vielen

Mengen aus $\mathcal{A}$. Dann existiert eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf der von $\mathcal{A}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$. Für $A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist

$$\mu(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

wobei das Infimum genommen wird über alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $A \subset \cup_{n\geq 1} A_n$. Wenn μ σ-endlich ist, so ist die Fortsetzung eindeutig.

Beweis: Der Beweis verläuft in zwei Schritten. Zuerst benötigen wir den Begriff des äußeren Maßes.
Es sei $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf X. Ein **äußeres Maß** auf $\mathcal{B}$ ist eine Funktion $\mu^* : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:
1) $\mu^*(\emptyset) = 0$
2) Wenn $A, B \subset \mathcal{B}$ und $A \subset B$, so ist

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B).$$

3) Für jede Folge (A_n) in $\mathcal{B}$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Lemma 2.18. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Für $Y \subset X$ sei*

$$\mu^*(Y) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

wobei das Infimum über alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $Y \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ genommen wird. Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{P}(X)$ und es gilt

$$\mu^*(A) = \mu(A) \textit{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß $\mu^*(A) = \mu(A)$ gilt für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$. Da

$$A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots,$$

folgt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Sei umgekehrt $\epsilon > 0$. Zu ϵ wählen wir eine Folge (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Nach Voraussetzung über X existiert eine solche Folge.
Da $A = \cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A)$, folgt

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, also $\mu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
Wir zeigen jetzt, daß μ^* ein äußeres Maß ist. Eigenschaften 1) und 2) sind klar.
Es seien $\epsilon > 0$ und eine Folge (Y_j) von Teilmengen von X gegeben. Wir wählen eine Folge $(A_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit
1) $Y_j \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n^j$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n^j) \leq \mu^*(Y_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$.
Dann ist

$$Y := \bigcup_j Y_j \subset \bigcup_{n,j} A_n^j$$

und es gilt

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{n,j} \mu(A_n^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Y_j) + \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\mu^*(Y) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(Y_j),$$

d.h., es gilt 3).

□

Es sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf der Potenzmenge von X.

Definition 2.19. *Eine Teilmenge A von X heißt μ^*-meßbar, wenn für jede Teilmenge Z von X gilt:*

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Lemma 2.20. *(von Carathéodory) Es sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{M}$ das System aller μ^*-meßbaren Teilmengen von X. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und μ^* ein Maß auf $\mathcal{M}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{M}$. Weiter ist mit A auch $X \setminus A$ in $\mathcal{M}$. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ und sei $Z \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Da B μ^*-meßbar ist, folgt

$$\mu^*(A \cap Z) = \mu^*(A \cap Z \cap B) + \mu^*((A \cap Z) \setminus (B \cap Z)).$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\mu^*(Z \setminus A \cap Z)$. Dann erhalten wir

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A \cap B) + \mu^*((A \cap Z) \setminus (B \cap Z)) + \mu^*(Z \setminus A \cap Z).$$

Wir müssen zeigen

$$\begin{aligned}\mu^*((A \cap Z) \setminus (B \cap Z)) + \mu^*(Z \setminus A \cap Z) &= \mu^*(Z \setminus A \cap B)\\ &= \mu^*(Z \setminus (A \cap Z) \cap (B \cap Z))\end{aligned}$$

Es ist aber

$$(Z \setminus (A \cap B \cap Z)) \cap A = A \cap Z \setminus B \cap Z$$

und

$$(Z \setminus (A \cap B \cap Z)) \setminus A = Z \setminus A = Z \setminus A \cap Z.$$

Da A μ^*-meßbar ist, folgt obige Gleichung und daraus ergibt sich

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A \cap B) + \mu^*(Z \setminus A \cap B).$$

Damit ist $A \cap B$ μ^*-meßbar. Wir haben damit gezeigt, daß $\mathcal{M}$ eine Mengenalgebra ist.
Wir zeigen jetzt, daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ disjunkt und sei $Z \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B)$$

eine Zerlegung in disjunkte Mengen. Daraus folgt

$$(Z \cap (A \cup B)) \cap A = Z \cap A$$

und

$$Z \cap (A \cup B) \setminus A = Z \cap B.$$

Da A μ^*-meßbar ist, folgt damit aus der Definition der μ^*-Meßbarkeit

$$\mu^*(Z \cap (A \cup B)) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap B).$$

Es seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt. Dann folgt daraus mittels Induktion

$$\mu^*(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap A_k). \tag{2.1}$$

Jetzt sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{M}$ paarweise disjunkter Mengen und es sei

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{M}$ folgt aus der Definition der μ^*-Meßbarkeit und aus (2.1), daß für jede Teilmenge $Z \subset X$ gilt

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &= \mu^*(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) + \mu^*(Z \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Z \cap A_k) + \mu^*(Z \setminus A)\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil μ^* ein äußeres Maß ist, folgt

$$\begin{aligned}\mu^*(Z) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Z \cap A_k) + \mu^*(Z \setminus A) \\ &\geq \mu^*(Z \cap (\cup_{k=1}^{\infty} A_k)) + \mu^*(Z \setminus A) \\ &\geq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$Z = (Z \cap A) \cup (Z \setminus A).$$

Da μ^* ein äußeres Maß ist, folgt daraus

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Also gilt

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

und daher ist $A = \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$. Damit ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Aus (2.1) und der Eigenschaft des äußeren Maßes folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Durch Übergang zum Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k),$$

d.h., μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{M}$.

□

Es sei jetzt μ^* das äußere Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, das mit Hilfe von Lemma 2.18 aus μ konstruiert wird. Weiter sei $\mathcal{M}$ die Menge der μ^*-meßbaren Mengen. Auf Grund von Lemma 2.20 ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Um zu zeigen, daß sich das Maß μ auf $\mathcal{A}$ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ fortsetzen läßt, genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ in $\mathcal{M}$ enthalten ist. Dazu müssen wir beweisen, daß jede Menge aus $\mathcal{A}$ μ^*-meßbar ist. Sei also $A \in \mathcal{A}$ und $Z \subset X$. Da μ^* ein äußeres Maß ist, gilt:

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A). \tag{2.2}$$

Um die Umkehrung dieser Ungleichung zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ und (A_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $Z \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \epsilon.$$

Dann ist

$$Z \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A) \text{ und}$$

$$Z \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A).$$

Da μ^* ein äußeres Maß ist, folgt daraus

$$\mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(Z) + \epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt zusammen mit (2.2), daß

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A),$$

d.h., A ist μ^*-meßbar. Damit ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ und daher ist auch $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{M}$. Durch Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}_\sigma$ erhalten wir die gewünschte Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}_\sigma$.

Wir nehmen jetzt an, daß μ auf $\mathcal{A}$ σ-endlich ist. Dann wollen wir zeigen, daß die Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}_\sigma$ eindeutig bestimmt ist. Es sei ν ein weiteres Maß auf $\mathcal{A}_\sigma$, das auf $\mathcal{A}$ mit μ übereinstimmt. Es sei (A_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$.
Nach Satz **??**, 4), genügt es zu zeigen, daß für alle $Y \in \mathcal{A}_\sigma$ gilt:

$$\nu(Y \cap A_n) = \mu(Y \cap A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit genügt es aber, folgendes zu zeigen: Es sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und es sei $Y \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $Y \subset A$. Dann ist

$$\nu(Y) = \mu(Y).$$

Nach Definition des äußeren Maßes ist

$$\mu(Y) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n), \tag{2.3}$$

wobei das Infimum für alle Folgen (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ genommen wird. Nach Satz **??**, 3), gilt

$$\nu(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Zusammen mit (2.3) folgt daraus $\nu(Y) \leq \mu(Y)$. Genauso folgt $\nu(A \setminus Y) \leq \mu(A \setminus Y)$. Daraus ergibt sich

$$\mu(A) = \nu(A) = \nu(A \setminus Y) + \nu(Y) \leq \mu(A \setminus Y) + \mu(Y) = \mu(A).$$

Da $\mu(A) < \infty$, folgt $\mu(Y) = \nu(Y)$.

□

2.6. **Das Lebesguesche Maß im $\mathbb{R}^n$.** Wir konstruieren jetzt das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ und es gelte $a_i \leq b_i$ für $1 \leq i \leq n$. Wir setzen

$$Q(a,b) = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

Wir nennen $Q(a,b)$ einen halboffenen Quader. Die leere Menge ist ein halboffener Quader.

Definition 2.21. *Es sei $\mathcal{A}$ das System aller Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die Vereinigung von endlich vielen, paarweise disjunkten halboffenen Quadern sind.*

Satz 2.22. *$\mathcal{A}$ ist eine Mengenalgebra*

Beweis: 1) Seien Q_1, Q_2 halboffene Quader. Dann ist $Q_1 \cap Q_2$ ein halboffener Quader. Dies sieht man wie folgt: Sei

$$Q_i = [a_1^i, b_1^i) \times \cdots \times [a_n^i, b_n^i), \ i = 1, 2.$$

Wir setzen

$$\alpha_j = \max\{a_j^1, a_j^2\}, \ \beta_j = \min\{b_j^1, b_j^2\}.$$

Dann gilt entweder $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ oder

$$\forall j : \ \beta_j \geq \alpha_j \text{ und } Q_1 \cap Q_2 = [\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n).$$

2) Seien Q_1, Q_2 halboffene Quader. Dann ist $Q_1 \setminus Q_2 = \{x \in Q_1 \mid x \notin Q_2\} \in \mathcal{A}$.

Beweis: Da $Q_1 \cap Q_2$ ein halboffener Quader ist und

$$Q_1 \setminus Q_2 = Q_1 \setminus (Q_1 \cap Q_2)$$

gilt, können wir annehmen, daß $Q_2 \subset Q_1$. Der Rest ist klar.
Daraus folgt jetzt, daß $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra ist.

□

Für einen Quader

$$Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

setzen wir

$$\lambda(Q) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Lemma 2.23. *Es sei Q ein halboffener Quader und sei $Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$ die disjunkte Vereinigung von halboffenen Quadern. Dann ist*

$$\lambda(Q) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(Q_i).$$

Beweis: 1) Sei $Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $c \in [a_i, b_i)$. Die Hyperebene $H_{i,c} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c\}$ zerlegt Q in die Quader

$$Q_1 = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_i, c) \times \cdots \times [a_n, b_n)$$

und

$$Q_2 = [a_1, b_1) \times \cdots \times [c, b_i) \times \cdots \times [a_n, b_n).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(Q) &= \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \prod_{j \neq i} (b_j - a_j)(b_j - c + c - a_i) \\ &= \prod_{j \neq i} (b_j - a_j)(b_j - c) + \prod_{j \neq i} (b_j - a_j)(c - a_i) = \lambda(Q_2) + \lambda(Q_1). \end{aligned}$$

2) Wird Q durch den Schnitt mit endlich vielen Hyperebenen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = c_i\}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_m$ zerlegt, so gilt

$$\lambda(Q) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(Q_j).$$

Dies beweist man mittels Induktion nach der Anzahl der Hyperebenen.
3) Sei $Q = \sqcup_{i=1}^m Q_i$ die disjunkte Vereinigung von halboffenen Quadern und es sei $Q_i \neq \emptyset$. Dann ist

$$Q_i = [a_{j1}, b_{i1}) \times \cdots \times [a_{in}, b_{in})$$

mit $b_{ij} > a_{ij}$ für alle $j = 1, \ldots, n$.
Es sei H^1_{ij} die Hyperebene, die durch $x_j = a_{ij}$ definiert ist und H^2_{ij} sei die Hyperebene, die durch $x_j = b_{ij}$ definiert ist.
Wir schneiden Q mit allen Hyperebenen H^i_{jk}, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$Q = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_l$$

die disjunkte Vereinigungn von Quadern so, daß jeder Quader Q_i eine disjunkte Vereinigung von Quadern $B^i_{j_1}, \ldots, B^i_{j_{r_i}}$ ist. Nach Teil 2) gilt

$$\lambda(Q_i) = \sum_{l=1}^{r_i} \lambda(B^i_{j_l}).$$

Daraus folgt

$$\lambda(Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{r_i} \lambda(B^i_{j_l}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(Q_i).$$

□

Es sei $A \in \mathcal{A}$ und $A = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m$ eine disjunkte Vereinigung von Quadern. Wir setzen

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(Q_i).$$

Auf Grund von Lemma 2.23 ist $\lambda(A)$ unabhängig von der Zerlegung von A in eine disjunkte Vereinigung von Quadern. Wir erhalten damit eine wohldefinierte Abbildung

$$\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty].$$

Satz 2.24. *λ ist ein positives Maß auf $\mathcal{A}$ und λ ist σ-endlich.*

Beweis: 1) Nach Definition gilt $\lambda(\emptyset) = 0$.
2) σ-Additivität. Trivialerweise ist λ endlich additiv. Insbesondere ist λ auch monoton, d.h., für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ ist $\lambda(A) \leq \lambda(B)$. Es sei jetzt (A_j) keine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ und es sei

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Dann ist

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(A_j).$$

Weiter ist

$$\bigcup_{j>k} A_j = A - \bigcup_{j=1}^{k} A_j \in \mathcal{A}$$

und

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) + \lambda\left(\bigcup_{j>k} A_j\right).$$

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\lim_{k\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{j>k} A_j\right) = 0$$

gilt. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Folge $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $\cap_{k\geq} B_k = \emptyset$.
Beh.: $\lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) = 0$.
Wir nehmen an, daß dies nicht gilt und führen diese Annahme zum Widerspruch. Die Folge $(\lambda(B_k))$ ist monoton fallend und ≥ 0. Daher ist die Folge konvergent. Es sei

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) > 0.$$

Wir wählen $C_k \in \mathcal{A}$ mit $\overline{C}_k \subset A_k$ und $\lambda(B_k) - \lambda(C_k) \leq \delta/2^k$. Es ist leicht zu sehen, daß eine solche Folge (C_k) existiert. Sei

$$D_k = C_1 \cap \cdots \cap C_k.$$

Dann ist $D_1 \supset D_2 \supset \cdots$ und $\overline{D}_k \subset B_k$. Daher gilt auch $\overline{D}_1 \supset \overline{D}_2 \supset \cdots$ und $\cap_{k\geq 1} \overline{D}_k \subset \cap_{k\geq 1} B_k$. Wir zeigen durch Induktion, daß

$$\lambda(D_k) \geq \lambda(B_k) - \delta + \frac{\delta}{2^k} \tag{2.4}$$

gilt. Für $k = 1$ ist $D_1 = C_1$ und daher gilt (2.5) offensichtlich. Es gelte (2.5) für $k \geq 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lambda(D_{k+1}) &= \lambda(D_k) + \lambda(C_{k+1}) - \lambda(D_k \cup C_{k+1}) \\ &\geq \left(\lambda(B_k) - \delta + \frac{\delta}{2^k}\right) + \left(\lambda(B_{k+1}) - \frac{\delta}{2^{k+1}}\right) - \lambda(B_k) \\ &= \lambda(B_{k+1}) - \delta + \frac{\delta}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Damit folgt (2.5). Nach Voraussetzung ist $\lambda(B_k) \geq \delta$. Daher ist $\lambda(D_k) > 0$ für alle $k \geq 1$. Insbesondere ist $D_k \neq \emptyset$ für alle $k \geq 1$. Da $\overline{D}_k$ kompakt ist, ist $\cap_{k\geq 1}\overline{D}_k \neq \emptyset$ und damit $\cap_{k\geq 1} B_k \neq \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
3) *σ-endlich.* Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$Q_m = [-m, m)^n.$$

Dann ist $\mathbb{R}^n = \cup_{m\geq 1} Q_m$ und $\lambda(Q_m) = (2m)^n < \infty$.

□

Es sei $\mathcal{A}_\sigma$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra. Aus Satz 2.17 folgt, daß λ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Maß $\lambda : \mathcal{A}_\sigma \to [0, \sigma]$ besitzt.

Bestimmung von $\mathcal{A}_\sigma$

Satz 2.25. *Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten halboffenen Quadern.*

Beweis: Für $h > 0$ sei

$$\Gamma_h^n = \{(m_1 h, \dots, m_n h) \mid m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\}.$$

Dann ist $\Gamma_h^n \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Weiter sei Ω_h die Menge aller halboffenen Quader mit Eckpunkten aus Γ_h^n. Wir betrachten die Gitter

$$\Gamma_1^n, \Gamma_{\frac{1}{2}}^n, \Gamma_{\frac{1}{4}}^n, \dots, \Gamma_{\frac{1}{2^m}}^n, \dots$$

und die zugehörigen Mengen von Quadern

$$\Omega_1, \Omega_{\frac{1}{2}}, \Omega_{\frac{1}{4}}, \dots, \Omega_{\frac{1}{2^m}}, \dots$$

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei T_1 die Menge aller Quader aus Ω_1, die in U enthalten sind. Für $k \geq 2$ definieren wir T_k induktiv als die Menge aller Quader aus $\Omega_{\frac{1}{2^{k-1}}}$, die in U enthalten sind und die in keinem der Quader aus $T_1, \dots, T_{k-1}$ enthalten sind. Dann gilt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{Q\in T_k} Q \subset U.$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, sei $x \in U$. Da U offen ist existiert $m \in \mathbb{N}$ und $Q \in \Omega_{\frac{1}{2^m}}$ mit $x \in Q \subset U$. Daraus folgt

$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{Q\in T_k} Q.$$

Nach Konstruktion sind die Q paarweise disjunkt. Jede der Mengen $\Omega_{\frac{1}{2^m}}$ ist abzählbar. Daher sind alle T_k abzählbar. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist wieder abzählbar. Daraus folgt, daß $\cup_{k\in\mathbb{N}} T_k$ abzählbar ist.

□

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Nach Satz 2.25 existiert eine Folge $Q_1, Q_2, \dots$ von halboffenen Quadern mit

$$Q_i \subset U,\ i \in \mathbb{N},\ \text{und } U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k.$$

Es sei

$$A_k = Q_1 \cup \cdots \cup Q_k.$$

Dann ist $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots U$ eine Ausschöpfung von U durch endliche Polyeder:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

und es gilt

$$\lambda(U) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k).$$

Damit stimmt das Lebesgue-Maß für offene Mengen mit unserer bisherigen Definition von Inhalten überein.

Sei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$, d.h., $\mathcal{B}$ ist die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra.
Folgerung 2.26 Es gilt $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{B}$.

Beweis: Auf Grund von Satz 2.25 enthält $\mathcal{A}_\sigma$ alle offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ und daher auch die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}$, d.h., $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\sigma$. Andernseits ist jeder halboffene Quader darstellbar als Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Quadern:

$$[a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a_1 - \frac{1}{k}, b_1) \times \cdots (a_n - \frac{1}{k}, b_n).$$

Faher ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, und nach Definition $\mathcal{A}_\sigma$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{A}$ enthält, folgt $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{B}$.

□

Definition 2.26. *Das Maß $\lambda_n : \mathcal{B} \to [0, \infty]$, das von $\lambda_n : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ erzeugt wird, heißt* **Lebesguesches Maß**.

Beispiele: 1) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abzählbar.
Beh.: A ist Borelsch und $\lambda(A) = 0$.
Beweis: Sei $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine Abzählung der Elemente von A. Es sei

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zu $\epsilon > 0$ sei

$$Q_k(\epsilon) = [x_{k1} - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_{k1} + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\ ) \times \cdots \times [x_{kn} - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, x_{kn} + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\ ).$$

Dann ist $Q_k(\epsilon)$ ein halboffener Quader und es gilt

$$\lambda(Q_k(\epsilon)) = \left(\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)^n.$$

Weiter ist $x_k \in Q_k(\epsilon)$. Daher ist

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k(\epsilon).$$

Da λ ein Maß auf der Borelschen σ-Algebra ist, folgt

$$\lambda(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k(\epsilon)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{2^{kn}} \le \epsilon^n.$$

Dies gilt für alle $\epsilon > 0$. Also ist $\lambda(A) = 0$.

2) Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum der Dimension $k < n$. Dann ist $\lambda(V) = 0$.

Beweis: Q.B.d.A. können wir annehmen, daß

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

Dann existieren Quader $Q_1, Q_2, \ldots \subset V \simeq \mathbb{R}^k$ mit

$$V = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad \lambda_k(Q_i) = 1,\ i \in \mathbb{N}.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$. Dann ist

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(Q_i \times \left[-\frac{\epsilon^i}{2}, \frac{\epsilon^i}{2} \right]^{n-k} \right).$$

Daraus folgt

$$\lambda_n(V) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\epsilon^{n-k})^i = \frac{\epsilon^{n-k}}{1 - \epsilon^{n-k}}.$$

□

Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Satz 2.27. *(Translationsinvarianz)*
Es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $A + a := \{x + a \mid x \in A\}$. Dann ist A Borelsch genau dann, wenn $A + a$ Borelsch ist und es gilt

$$\lambda(A + a) = \lambda(A).$$

Beweis: Die Abbildung

$$\phi_a : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto x + a \in \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus. Daher sind ϕ_a und ϕ_a^{-1} meßbar. Daraus folgt, daß A Borelsch ist genau dann, wenn $A + a$ Borelsch ist. Für einen halboffenen Quader $Q(c, d)$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$Q(c, d) + a = Q(c + a, d + a).$$

Weiter ist

$$\lambda(Q(c+a,d+a)) = \prod_{i=1}^{n}(d_i + a_i - (c_i + a_i)) = \prod_{i=1}^{n}(d_i - c_i) = \lambda(Q(c,d)).$$

Daraus folgt

$$\lambda(A+a) = \lambda(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Da die Fortsetzung von $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}$ eindeutig ist, folgt

$$\lambda(B+a) = \lambda(B) \text{ für alle } B \in \mathcal{B}.$$

$\square$

Satz 2.28. *Es sei $\mu : B \to [0,\infty]$ ein translationsinvariantes Maß auf der Borelschen σ-Algebra von $\mathbb{R}^n$ und es gelte $\mu([0,1]^n) = \alpha \in [0,\infty]$. Dann ist $\mu = \alpha\lambda$.*

Beweis: Übung.

Satz 2.29. *(Rotationsinvarianz)*
Es sei $R \in O(n)$ eine orthogonale lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ Borelsch genau dann, wenn $R(A)$ Borelsch ist und für jede Borel-Menge A gilt $\lambda(A) = \lambda(R(A))$.

Beweis: Es sei $R \in O(n)$. Dann ist R invertierbar und daher ein Homöpmorphismus des $\mathbb{R}^n$. Damit ist A Borelsch genau dann, wenn $R(A)$ Borelsch ist.
Wir definieren die Abbildung $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) := \lambda(R(A)), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Dann ist μ ein Maß. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt aus Satz 2.27:

$$\mu(A+a) = \lambda(R(A+a)) = \lambda(R(A) + R(a)) = \lambda(R(A)) = \mu(A),$$

d.h., μ ist tranlationsinvariant. Nach Satz 2.28 existiert $\alpha \geq 0$ mit

$$\mu = \alpha\lambda.$$

Um α zu bestimmen, wählen wir eine geeignete Menge A. Es sei $A = U_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Kugel vom Radius 1 um den Nullpunkt. Dann ist $A = R(A)$ und daher

$$\alpha\lambda(A) = \mu(A) = \lambda(R(A)) = \lambda(A).$$

Da $\lambda(A) \in \mathbb{R}^+$, folgt daraus $\alpha = 1$.

$\square$

Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Euklidische Bewegung, wenn $R \in O(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ existieren so, daß $T(x) = R(x) + a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Korollar 2.30. *Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Euklidische Bewegung. Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Borelsch, wenn $T(A)$ Borelsch ist und es gilt*

$$\lambda(T(A)) = \lambda(A)$$

für alle Borelschen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 2.31. *Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Tranformation. Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ Borelsch genau dann, wenn $T(A)$ Borelsch ist, und es gilt*

$$\lambda(T(A)) = |\det T|\lambda(A)$$

für alle Borelschen Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist, ist A Borelsch genau dann, wenn $T(A)$ Borelsch ist.
Wir definieren $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) = \lambda(T(A)), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Dann ist μ ein Maß. Es sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt wegen der Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes:

$$\mu(A + a) = \lambda(T(A + a)) = \lambda(T(A) + T(a)) = \lambda(T(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}$, d.h., μ ist translationsinvariant. Auf Grund von Satz 2.28 existiert $\alpha \geq 0$ mit $\mu = \alpha\lambda$.
Um α zu bestimmen, bemerken wir, daß eine symmetrische, positiv definite lineare Abbildung S und $R \in O(n)$ existieren so, daß

$$T = R \cdot S$$

Und zwar ist $S = (TT^*)^{1/2}$ und $R = TS^{-1}$. Aus Satz 2.29 folgt

$$\lambda(T(A)) = \lambda(R(S(A))) = \lambda(S(A))$$

für alle $A \in \mathcal{B}$. Außerdem ist

$$|\det T| = \det S. \tag{2.5}$$

Es genügt daher, den Satz für $T = S$ zu beweisen. Da $S > 0$, existiert eine Orthonormalbasis $f_1, \dots, f_n$ von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von S besteht. Es seien $\beta_1, \dots, \beta_n > 0$ die Eigenwerte:

$$Sf_i = \beta_i f_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.6}$$

Weiter sei

$$E = [0,1]^n \quad und \quad Q = [0,\beta_1] \times \ldots \times [0,\beta_n].$$

Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $U \in O(n)$ sei die Übergangsmatrix der Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(f_1, \dots, f_n)$. Dann ist

$$U(E) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n x_i f_i,\ 0 \le x_i \le 1\}$$

und

$$U(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n x_i f_i,\ 0 \le x_i \le \beta_i\}.$$

Aus (2.6) folgt daher

$$S(U(E)) = U(Q).$$

Aus Satz 2.29 und (2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha = \alpha\lambda(E) &= \alpha\lambda(U(E)) = \mu(U(E)) \\ &= \lambda(S(U(E))) = \lambda(U(Q)) = \lambda(Q) \\ &= \prod_{i=1}^n \beta_i = \det S = |\det T|.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.32. *Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Tranformation des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ Borelsch genau dann, wenn $T(A)$ Borelsch ist und es gilt*

$$\lambda(T(A)) = |\det T|\lambda(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}$.

Korollar 2.33. *Es sei $\alpha > 0$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borelmenge. Dann ist $\alpha A := \{\alpha x \mid x \in A\}$ Borelsch und*

$$\lambda(\alpha A) = \alpha^n \lambda(A).$$

Beispiele: 1) Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ und es sei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad 0 \le x_i \le 1\}$$

das von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannte Parallelepiped. Dann ist

$$\lambda(P) = \left|\det\left((\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n\right)\right|.$$

Beweis: Es sei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung, die definiert ist durch $T(e_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$P = T([0,1]^n).$$

Bezüglich $(e_1, \ldots, e_n)$ ist die Matrix von T gleich $(\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n$. Aus Satz 2.31 folgt damit

$$\begin{aligned} \lambda(P) &= |\det T|\lambda([0,1]^n) \\ &= |\det T| = \left|\det\left((\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^n\right)\right|. \end{aligned}$$

2) Es seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

Dann ist

$$\lambda(E) = \pi ab.$$

Beweis: Wegen der Tanlationsinvarianz von λ können wir $x_0 = y_0 = 0$ annehmen. Es sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei denfiniert durch $T(x, y) = (ax, by)$. Dann ist $E = T(K)$. Aus Satz 2.31 folgt

$$\lambda(E) = \lambda(T(K)) = a \cdot b\lambda(K) = ab\pi.$$

□

Charakterisierung der Lebesgue-meßbaren Mengen

Sei

$$\mathcal{L}^* = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist } \lambda_n^* \text{ -meßbar}\}.$$

Nach Lemma 2.19 ist $\mathcal{L}^*$ eine σ-Algebra. Im Beweis von Satz 2.17 haben wir gezeigt, daß $\mathcal{B}$ in $\mathcal{L}^*$ enthalten ist und die Einschränkung des äußeren Maßes λ_n^* auf $\mathcal{L}^*$ ein Maß $\lambda_n : \mathcal{L}^* \to [0, \infty]$ induziert. Es sei weiterhin

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist } \lambda - \text{meßbar}\}$$

die Menge der Lebesgue-meßbaren Mengen im Sinne von Abschnitt 2.4. Nach Definition ist $A \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn eine Borelmenge B und eine Nullmenge N existieren mit

$$A = B \cup N.$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ ist die Komplettierung von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \lambda)$. Da $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}^*$ ist, ist B λ^*-meßbar. Eine Nullmenge ist ebenfalls λ^*-meßbar. Daher ist $A \in \mathcal{L}^*$, d.h., es gelten die folgenden Inklusionen

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^*.$$

Wir möchten zeigen, daß $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ gilt. Dazu geben wir eine andere Charakterisierung von $\mathcal{L}^*$ an.

Satz 2.34. *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ λ^*-meßbar.*
Dann gilt
1) $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) \mid U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $A \subset U\}$.
2) $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K$ *kompakt und* $K \subset A\}$.

Beweis: 1) Da A Lebesgue-meßbar ist, ist $\lambda(A)$ gleich dem äußeren Maß von A bezüglich der halboffenen Quader. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Folge $Q_1, Q_2, \dots$ von halboffenen Quadern mit $A \subset \cup_j Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q_j) \leq \lambda(A) + \epsilon$. Wir können Q_j vergrößern zu einem offenen Quader Q'_j mit

$$\lambda(Q'_j) \leq \lambda(Q_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Dann ist $U = \cup_{j=1}^{\infty} Q'_j$ offen, $A \subset U$ und

$$\lambda(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(Q_j) + \frac{\epsilon}{2^j}) \leq \lambda(A) + 2\epsilon.$$

2) Sei zunächst $A \subset U_r(0)$ für ein $r > 0$. Nach 1) ist

$$\lambda(\overline{U_r(0)} \setminus A) = \inf \lambda(U),$$

wobei das Infimum über alle offenen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\overline{U_r(0)} \setminus A \subset U$ zu nehmen ist. Für solche U ist $V = U \cap \overline{U_r(0)} \supset \overline{U_r(0)} \setminus A$, also

$$\lambda(\overline{U_r(0)} \setminus A) = \inf \lambda(V),$$

wobei V offen in $\overline{U_r(0)}$ ist mit $V \supset \overline{U_r(0)} \setminus A$. In $\overline{U_r(0)}$ sind diese V aber genau die Komplemente der abgeschlossenen und damit kompakten Mengen K mit $K \subset A$. Nun ist

$$\lambda(\overline{U_r(0)}) = \lambda(A) + \lambda(\overline{U_r(0)} \setminus A),$$

also ist $\lambda(A) = \sup \lambda(K)$ mit $K \subset A$ kompakt. Der allgemeine Fall folgt daraus, da

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \geq 1} U_m(0) \quad \text{und} \quad \lambda(A) = \lim_{m \to \infty} \lambda(A \cap \overline{U_m(0)}).$$

□

Es sei $A \in \mathcal{L}^*$. Aus Satz 2.34 folgt, daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ existieren mit

$$K \subset A \subset U \quad \text{und} \quad \lambda(U \setminus K) < \epsilon.$$

Daher existieren eine Folge (U_i) offener Mengen und eine Folge (K_i) kompakter Mengen mit

$$K_i \subset A \subset U_i \quad \text{und} \quad \lambda(U_i \setminus K_i) < \frac{1}{i}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \quad \text{und} \quad B_2 = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Dann ist $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, und es gilt

$$B_1 \subset A \subset B_2 \quad \text{und} \quad \lambda(B_2 \setminus B_1) = 0.$$

Insbesondere ist

$$A = B_1 \cup (A \setminus B_1) \quad \text{und} \quad \lambda(A \setminus B_1) = 0.$$

Damit ist $A \in \mathcal{L}$, d.h., wir haben gezeigt, daß $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ gilt.

Wir können deshalb Lebesgue-meßbare Mengen auch wie folgt charakterisieren

Korollar 2.35. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn gilt:*

$$\sup\{\lambda(K) \mid K \subset A \textit{ kompakt}\} = \inf\{\lambda(U) \mid U \supset A \textit{ offen}\}.$$

Aus Korollar 2.35 erhalten wir noch eine andere Möglichkeit, das Lebesgue-Maß zu konstruieren. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann folgt aus Satz 2.25, daß eine Folge von Quadern (Q_i) existiert mit

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i.$$

Wir können daher das Maß $\lambda(U)$ von U definieren als

$$\lambda(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i).$$

Es sei jetzt $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert $r > 0$ mit $K \subset U_r(0)$ und es gilt

$$U_r(0) = K \sqcup (U_r(0) \setminus K).$$

Daher können wir das Maß von K definieren durch

$$\lambda(K) = \lambda(U_r(0)) - \lambda(U_r(0) \setminus K).$$

Für eine beliebige Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir dann das äußere Maß $\lambda^*(A)$ durch

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(U) \mid A \subset U,\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}\},$$

und das innere Maß $\lambda_*(A)$ durch

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir dann Lebesgue-meßbar, wenn

$$\lambda^*(A) = \lambda_*(A)$$

gilt.

Das Korollar 2.33 gilt entsprechend für λ-meßbare Mengen.

Satz 2.36. *Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ λ-meßbar genau dann, wenn $T(A)$ λ-meßbar ist und es gilt*

$$\lambda(T(A)) = |\det T| \lambda(A)$$

für alle λ-meßbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen: 1) $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Wir definieren auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, ist die Menge der Äquivalenzklassen überabzählbar. Jede Klasse enthält ein Element aus $E = [0,1]^n$. Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse ein Element aus E aus. Die Menge der Repräsentanten aller Äquivalenzklassen sei Ω. An dieser Stelle haben wir das Auswahlaxiom benutzt! Es gilt $\Omega \subset E$. Weiter sei

$$\mathbb{Q}^n \cap [0,1]^n = \{q_1, q_2, \dots\}$$

eine Abzählung von $\mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$. Wir setzen

$$\Omega_j = \Omega + q_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ für } i \neq j,$$

denn für $x = q_i + a = q_j + b$ mit $a, b \in \Omega$ folgt $b - a = q_i - q_j$, d.h., $b \sim a$. Daher gilt $b = a$ und $q_i = q_j$. Es sei $x \in E$. Nach Definition von Ω existiert ein $a \in \Omega \subset E$ mit $x - a \in \mathbb{Q}^n$. Da x und a beide in $E = [0,1]^n$ liegen, ist $x - a \in [-1,1]^n$. Daher existiert $i \in \mathbb{N}$ so, daß $x - a = q_i$. Daraus folgt $x \in \Omega_i$ und damit

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j.$$

Aus der Tranlationsinvarianz von λ^* folgt $\lambda^*(\Omega_j) = \lambda^*(\Omega)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Weiter gilt

$$1 = \lambda^*(E) \leq \lambda^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(\Omega_j).$$

Daher ist $\lambda^*(\Omega) > 0$. Andererseits ist $\Omega_j \subset [-2,2]^n$. Wäre Ω meßbar, so wäre jedes Ω_j meßbar. Außerdem müßte gelten

$$\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(\Omega_j) = \lambda^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \right).$$

Andererseits ist aber

$$\lambda^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j \right) \leq ([-2,2]^n) = 4^n.$$

2) $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$.

Beweis: Es sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine Menge, die nicht λ_{n-1}-meßbar ist. Mittels der Inklusion $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ fassen wir A als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ auf. Da nach Beispiel 2) $\lambda_n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$ ist, ist A eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ und daher λ_n-meßbar. Da aber $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nicht meßbar ist, ist A keine Borel-Menge in $\mathbb{R}^{n-1}$ und daher auch keine Borel-Menge in $\mathbb{R}^n$.

2.7. **Integration.** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Mit $\overline{\mathcal{A}}$ bezeichnen wir die σ-Algebra der μ-meßbaren Teilmengen von X (siehe 2.4). Dann ist $(X, \overline{\mathcal{A}}, \mu)$ die Lebesgue-Komplettierung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Für $A \subset X$ sei χ_A die charakteristische Funktion von A, die definiert ist als

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Definition 2.37. *Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ heißt* **Treppenabbildung**, *wenn es paarweise disjunkte μ-meßbare Mengen $A_1, \dots, A_k \subset X$ von endlichem Maß und Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ gibt mit*

$$f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} v_i. \tag{2.7}$$

Mit anderen Worten, eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ ist eine Treppenabbildung, wenn gilt:
1) f nimmt nur endlich viele Werte an.
2) Für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $f^{-1}(v)$ μ-meßbar und $\mu(f^{-1}(v)) < \infty$.

Beispiele: Es sei jetzt $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$.
1) Die üblichen Treppenfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die wir in Infini I kennengelernt haben, sind Treppenfunktionen im erweiterten Sinne.
2) $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist eine Treppenfunktion, denn für $a \neq 1$ ist $\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(a) = \phi$ und $\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(1) = \mathbb{Q}$ ist meßbar mit Maß Null.

Die Menge der Treppenabbildungen $f : X \to \mathbb{R}^m$ bildet einen reellen Vektorraum $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$.

Definition 2.38. *Sei $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$, $f = \sum_{i=1}^{k} v_i \chi_{A_i}$. Dann sei das* **Integral** *von f definiert durch*

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^{k} v_i \mu(A_i).$$

Wir müssen noch nachprüfen, daß die Definition unabhängig ist von der Darstellung von f als Treppenabbildung. Seien also

$$f = \sum_{i=1}^{k} v_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{l} w_j \chi_{B_j}$$

zwei Darstellungen von f. Für $x \in A_i \cap B_j$ gilt

$$v_i = f(x) = w_j.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß $v_i \neq 0$ ist für alle i und $w_j \neq 0$ für alle j. Dann sind

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{l} (A_i \cap B_j) \quad \text{und} \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B_j)$$

disjunkte Zerlegungen von A_i bzw. B_j, und es gilt

$$\sum_i v_i\mu(A_i) = \sum_{i,j} v_i\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j,i} w_j\mu(A_i \cap B_j) = \sum_j w_j\mu(B_j).$$

Also ist das Integral wohldefiniert. Für eine μ-meßbare Teilmenge $A \subset X$ setzen wir

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^k v_i\mu(A_i \cap A).$$

Wir bemerken, daß

$$f\mid_A = \sum_{i=1}^k v_i\chi_{A_i\cap A}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir auch

$$\int_X fd\mu \quad \text{oder} \quad \int_X f,$$

wenn das Maß μ fixiert ist.

Lemma 2.39. *Das Integral hat folgende Eigenschaften:*
1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\int_X (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha\int_X fd\mu + \beta\int gd\mu.$$

2) Für alle $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\| \int_X fd\mu \| \leq \int_X \| f \| \, d\mu.$$

3) Für alle $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ und alle μ-meßbaren Teilmengen $A \subset X$ ist

$$\int_X fd\mu = \int_A fd\mu + \int_{X\setminus A} fd\mu.$$

4) Für alle $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ und μ-meßbaren $A \subset X$ mit $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset A$ gilt

$$\| \int_X fd\mu \| \leq \| f \|_\infty \mu(A),$$

wobei $\| f \|_\infty = \sup\{\| f(x) \| | x \in X\}$.

5) Wenn $m = 1$ *und* $f \leq g$*, so ist*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

In dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ führen wir die L^1-Seminorm ein durch

$$\| f \|_1 = \int_X \| f(x) \| \, d\mu(x), \quad f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m).$$

Eigenschaften der Seminorm

1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$.
2) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{T}\ (X, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\| \lambda f \|_1 = |\lambda| \, \| f \|_1 .$$

3) Für alle $f, g \in \mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1 .$$

Zur Norm fehlt die Eigenschaft $\| f \|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$.
Wir möchten jetzt die Vervollständigung von $\mathcal{T}((X, \mathbb{R}^m)$ bezüglich der L^1-Seminorm untersuchen.

Definition 2.40. *Es sei* $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ *die Menge der Abbildungen* $f : X \to \mathbb{R}^m$*, für die eine* L^1*-Cauchyfolge* (f_n) *in* $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ *existiert, die fast überall punktweise gegen* f *konvergiert.*

Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Wir möchten jetzt das Integral auf Abbildungen aus $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ erweitern. Dazu benötigen wir einige Lemmas.

Lemma 2.41. *Es sei* (f_n) *eine* L^1*-Cauchyfolge in* $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$*. Dann existiert eine Teilfolge* (f_{n_k})*, die fast überall punktweise gegen eine Abbildung* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *konvergiert, und zwar so, daß zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine* μ*-meßbare Menge* A *mit* $\mu(A) < \epsilon$ *existiert, so daß* (f_{n_k}) *auf* $X \setminus A$ *gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

Beweis: Da (f_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\| f_i - f_j \|_1 < 2^{-2k} \text{ für alle } i, j \geq n_k.$$

Die Folge (n_k) wählen wir streng monoton wachsend und setzen $g_k = f_{n_k}$. Dann gilt für alle k, l mit $l \geq k$.

$$\| g_k - g_l \|_1 < 2^{-2k}.$$

Wir bemerken, daß

$$g_k = g_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (g_{i+1} - g_i)$$

ist. Deshalb genügt es, die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (g_{i+1} - g_i)$ auf punktweise Konvergenz zu untersuchen. Dazu betrachten wir die Menge

$$Y_k = \{x \in X \mid \| g_{k+1}(x) - g_k(x) \| \geq 2^{-k}\}.$$

Da g_k und g_{k+1} Treppenabbildungen sind, ist Y_k μ-meßbar und $\mu(Y_k) < \infty$. Da auf Y_k die Ungleichung

$$\frac{1}{2^k} \leq \| g_{k+1}(x) - g_k(x) \|$$

gilt, ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k} \mu X(Y_k) &= \int_{Y_k} \frac{1}{2^k} d\mu \leq \int_{Y_k} \| g_{k+1}(x) - g_k(x) \| \, d\mu \\ &\leq \| g_{k+1} - g_k \|_1 \leq 2^{-2k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mu(Y_k) \leq 2^{-k}.$$

Sei

$$A_k = Y_k \cup Y_{k+1} \cup \cdots$$

Dann ist A_k μ-meßbar und es gilt

$$\mu(A_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(Y_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k+1}.$$

Für $x \notin A_k$ gilt

$$\| g_{l+1}(x) - g_l(x) \| \leq 2^{-l} \quad \text{für alle } l \geq k.$$

Daraus folgt, daß

$$\sum_{j=k}^{\infty}(g_{j+1}-g_j)$$

auf $X \setminus A_k$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt die letzte Behauptung des Lemmas. Es sei

$$A=\bigcap_{k\geq 1} A_k.$$

Dann hat A das Maß 0. Wenn $x \in X \setminus A$ ist, so existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in X \setminus A_k$. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| g_{j+1}(x)-g_j(x) \| .$$

Wir haben damit gezeigt, daß diese Reihe für jedes $x \in X \setminus A$ konvergiert.

□

Wenn (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{T}(X,\mathbb{R}^m)$ ist, so ist

$$\| \int_X f_n d\mu - \int_X f_m d\mu \| \leq \int_X \| f_n(x)-f_m(x) \| d\mu = \| f_n - f_m \|_1 .$$

Daher ist $(\int_X f_n d\mu)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen und es existiert

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Lemma 2.42. *Es seien (f_n) und (g_n) L^1-Cauchyfolgen in $\mathcal{T}(X,\mathbb{R}^m)$, die punktweise fast überall gegen dieselbe Abbildung $f: X \to \mathbb{R}^m$ konvergieren. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \| f_n - g_n \|_1 = 0.$$

Beweis: Sei $h_n = f_n - g_n,\ n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert (h_n) fast überall punktweise gegen 0. Weiter ist

$$\| h_n - h_m \|_1 = \| (f_n - g_n) - (f_m - g_m) \|_1 \leq \| f_n - f_m \|_1 + \| g_n - g_m \|_1 .$$

Daher ist (h_n) eine L^1-Cauchyfolge. Wegen

$$\| \int_X h_n(x) d\mu \| \leq \int_X \| h_n(x) \| d\mu$$

genügt es,

$$\int_X \| h_n(x) \| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

zu zeigen. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\| h_n - h_m \|_1 < \epsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Sei

$$Z = \{x \in X \mid h_N(x) = 0\}.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_Z \| h_n(x) \| d\mu &= \int_Z \| h_n(x) - h_N(x) \| d\mu \\ &\leq \int_X \| h_n(x) - h_N(x) \| d\mu < \epsilon. \end{aligned}$$

Weiter ist $\mu(X \setminus Z) < \infty$, da h_N eine Treppenabbildung ist. Nach Lemma 2.41 existiert eine Teilfolge (h_{n_k}) und zu ϵ eine μ-meßbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\mu(A) < \epsilon/(\| h_N \|_\infty + 1)$ so, daß (h_{n_k}) auf $X \setminus A$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Daher existiert zu ϵ ein $K \in \mathbb{N}$ so, daß $n_k \geq N$ für alle $k \geq K$, und für alle $k \geq K$ und $x \in X \setminus A$ ist

$$\| h_{n_k}(x) \| < \frac{\epsilon}{\mu(X \setminus Z) + 1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_X \parallel h_n(x) \parallel d\mu &\leq \int_X \parallel h_n(x) - h_{n_k}(x) \parallel d\mu + \int_X \parallel h_{n_k}(x) \parallel d\mu \\
&< \epsilon + \int_{X \setminus (A \cup Z)} \parallel h_{n_k}(x) \parallel d\mu + \int_Z \parallel h_{n_k}(x) \parallel d\mu \\
&+ \int_A \parallel h_{n_k}(x) \parallel d\mu \\
&\leq \epsilon + \frac{\mu(X \setminus (A \cup Z))}{\mu(X \setminus Z) + 1}\epsilon + \epsilon + \int_A \parallel h_N(x) \parallel d\mu \\
&+ \int_A \parallel h_N(x) - h_{n_k}(x) \parallel d\mu \\
&\leq 3\epsilon + \int_A \parallel h_N \parallel_\infty d\mu + \int_X \parallel h_N(x) - h_{n_k}(x) \parallel d\mu \\
&\leq 3\epsilon + \parallel h_N \parallel_\infty \cdot \mu(A) + \epsilon = 5\epsilon.
\end{aligned}$$

□

Definition 2.43. *Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Dann definieren wir das Integral von f durch*

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Die Elemente von $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ nennen wir μ-**integrabel** *oder einfach* **integrabel**.

Aus Lemma 2.42 folgt, daß der Grenzwert auf der rechten Seite nicht von der Auswahl der L^1-Cauchyfolge (f_n) abhängt und daher ist das Integral eindeutig definiert.
Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Dann sind die Funktionen

$$x \in X \longmapsto \parallel f_n(x) \parallel \in \mathbb{R}$$

Treppenfunktionen und für fast alle $x \in X$ konvergiert $(\parallel f_n(x) \parallel)$ gegen $\parallel f(x) \parallel$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\big\| \parallel f_n \parallel - \parallel f_m \parallel \big\|_1 &\int_X \big| \parallel f_n(x) \parallel - \parallel f_m(x) \parallel \big| d\mu \\
&\leq \int_X \parallel f_n(x) - f_m(x) \parallel d\mu = \parallel f_n - f_m \parallel_1 .
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß ($\| f_n \|$) eine L^1-Cauchyfolge ist. Wir können daher die L^1-Seminorm $\| f \|_1$ von f definieren durch

$$\| f \|_1 := \int_X \| f(x) \| \, d\mu.$$

Wir benutzen wieder die verkürzte Schreibweise

$$\int_X f(x) d\mu \text{ oder } \int_X f d\mu$$

für das Integral.

Sei $A \subset X$ μ-meßbar und $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Wenn (f_n) eine L^1-Cauchyfolge von Treppenabbildungen ist, die punktweise fast überall gegen f konvergiert, so ist $(f_n \mid A)$ eine L^1-Cauchyfolge von Treppenabbildungen auf A, die auf A punktweise fast überall gegen f konvergiert. Wir definieren dann

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x) d\mu(x).$$

Eigenschaften des Integrales

Satz 2.44. *1) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ gilt*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\mu = \alpha \int_X f(x) d\mu + \beta \int_X g(x) d\mu.$$

2) Für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ ist $\| f \| \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ und

$$\| \int_X f(x) d\mu \| \leq \int_X \| f(x) \| \, d\mu = \| f \|_1 .$$

3) Für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und alle μ-meßbaren $A \subset X$ ist

$$\int_X f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{X \setminus A} f d\mu.$$

4) Die L^1-Norm

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m) \longmapsto \| f \|_1 \in [0, \infty)$$

ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und das Integral ist stetig für diese Seminorm.

5) Für alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und μ-meßbaren $A \subset X$ mit $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset A$ gilt

$$\| \int_X f(x) d\mu \| \leq \| f \|_\infty \cdot \mu(A),$$

wobei $\| f \|_\infty$ die Suprenumsnorm von f ist.

Beweis: 1) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Seien $(f_n), (g_n)$ L^1-Cauchyfolgen von Treppenabbildungen, die fast überall punktweise gegen f bzw. g konvergieren. Dann konvergiert $(\alpha f_n + \beta g_n)$ fast überall punktweise gegen $\alpha f + \beta g$, und

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_X (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu \\ &= \alpha \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu + \beta \lim_{nj \to \infty} \int_X g_n d\mu \\ &= \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

2) Sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(\| f_n \|)$ fast überall punktweise gegen $\| f \|$, und wegen

$$\Big\| \| f_n \| - \| f_m \| \Big\|_1 \leq \| f_n - f_m \|_1,$$

ist auch $(\| f_n \|)$ eine L^1-Cauchyfolge. Dies zeigt, daß $\| f_n \|$ integrabel ist und die behauptete Ungleichung folgt aus der entsprechenden Ungleichung für Treppenabbildungen durch Grenzübergang.

Die Eigenschaften 3) - 5) beweist man analog.

Satz 2.45. *Der Raum $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ ist vollständig bezüglich der Seminorm $\| \cdot \|_1$.*

Beweis: 1) Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Dann existiert eine L^1-Cauchyfolge (f_n) von Treppenabbildungen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Aus der Definition der L^1-Seminorm folgt

$$\| f_n - f \|_1 = \lim_{k \to \infty} \| f_n - f_k \|_1 .$$

Da (f_n) eine Cauchyfolge ist, folgt daraus

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_1 = 0.$$

2) Es sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$. Aus 1) folgt, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in \mathcal{T}(X,\mathbb{R}^m)$ existiert mit

$$\| f_n - g_n \|_1 < \frac{1}{n}.$$

Für die Folge (g_n) gilt

$$\| g_n - g_m \|_1 \leq \| g_n - f_n \|_1 + \| f_n - f_m \|_1 + \| g_m - f_m \|_1 .$$

Daraus folgt, daß (g_n) eine Cauchyfolge ist. Nach Lemma 2.41 existiert eine Teilfolge (g_{n_k}) und eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ mit

$$g_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x) \quad \text{für fast alle} \quad x \in X.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$ und es gilt

$$\| f_{n_k} - f \|_1 \leq \| f_{n_k} - g_{n_k} \|_1 + \| g_{n_k} - f \|_1 .$$

Nach 1) ist $\lim_{k\to\infty} \| g_{n_k} - f \|_1 = 0$. Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$1/N < \epsilon/2 \quad \text{und} \quad \| g_{n_k} - f \|_1 < \epsilon/2 \quad \text{für} \quad n_k \geq N.$$

Dann ist

$$\| f_{n_k} - f \| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n_k \geq N.$$

Da (f_n) eine L^1-Cauchyfolge ist, existiert $N_1 \geq N$ mit

$$\| f_n - f \|_1 \leq \| f_n - f_{n_k} \|_1 + \| f_{n_k} - f \|_1 < 2\epsilon \quad \text{für} \quad n, n_k \geq N_1.$$

$\square$

Satz 2.46. *Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{R}^m)$. Dann gilt*

1) f ist μ-meßbar und $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist σ-endlich.

2) Für alle $c > 0$ ist $A_c = \{x \in X \mid \| f(x) \| \geq c\}$ μ-meßbar und $\mu(A_c) \leq \| f \|_1 / c$.

3) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \quad \int_A \| f(x) \| \, d\mu < \epsilon$ für alle μ-meßbaren A mit $\mu(A) < \delta$.

Beweis: 1) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Dann existiert eine Folge (f_n) in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$ und eine Teilmenge $N \subset X$ mit

$$\mu(N) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \setminus N.$$

Da f_n eine Treppenabbildung ist, ist f_n μ-meßbar. Aus Satz 2.9 folgt, daß f μ-meßbar ist. Sei $A_n = \{x \in X \mid f_n(x) \neq 0\}$. Dann ist

$$A \subset \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \right) \cup N.$$

Die Mengen A_n sind μ-meßbar mit $\mu(A_n) < \infty$.

2) Sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{T}(X, \mathbb{R}^m)$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Nach Lemma 2.41 existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) und zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $Z \subset X$ mit $\mu(Z) < \epsilon$ so, daß f_{n_k} auf $X \setminus Z$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Daher existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\| f_{n_k}(x) \| \geq \frac{c}{2} \quad \text{für alle} \quad x \in A_c \setminus Z \quad \text{und alle} \quad n_k \geq N_0.$$

Da f_{n_k} eine Treppenabbildung ist, folgt, daß A_c μ-meßbar ist und $\mu(A_c) < \infty$. Weiter ist

$$c\mu(A_c) = \int_{A_c} c \leq \int_{A_c} \| f(x) \| \, d\mu \leq \| f \|_1 .$$

3) Für $n \geq 0$ sei

$$B_n = \{x \in X \mid n \leq \| f(x) \| < n+1\}.$$

Die B_n sind μ-meßbar, paarweise disjunkt und $X = \cup_{n\geq 0} B_n$. Daher gilt

$$\| f \|_1 = \sum_{n\geq 0} \int_{B_n} \| f(x) \| \, d\mu \geq \sum_{n\geq 0} n\mu(B_n).$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) < \infty.$$

Für $n \geq 1$ sei

$$C_n = B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1}.$$

Dann gilt

$$\int_{X \setminus C_n} \| f(x) \| \, d\mu \leq \sum_{k \geq n} (k+1)\mu(B_k) < \infty,$$

denn $X \setminus C_n = B_n \cup B_{n+1} \cup \cdots$ und $\| f(x) \| \leq k+1$ für $x \in B_{k+1}$. Sei $\epsilon > 0$. Zu ϵ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\sum_{k \geq N} (k+1)\mu(B_k) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei $\delta = \epsilon/2N$. Sei A eine μ-meßbare Teilmenge von X mit $\mu(A) < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_A \| f(x) \| \, d\mu &= \int_{A \cap C_n} \| f(x) \| \, d\mu + \int_{A \setminus C_N} \| f(x) \| \, d\mu \\ &< \mu(A)N + \frac{\epsilon}{2} < \delta N + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Korollar 2.47. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $\| f \|_1 = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für fast alle $x \in X$.*

Beweis: $\Leftarrow$) Sei $N = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Dann ist $\mu(N) = 0$. Weiter ist

$$\int_X f(x) d\mu = \int_N f(x) d\mu,$$

und aus Satz 2.46,3) folgt $\int_N f(x) d\mu = 0$.
$\Rightarrow$) Für $c > 0$ sei

$$A_c = \{x \in X \mid \| f(x) \| \geq c\}.$$

Weiter sei $N = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Dann ist

$$N = \bigcup_{k \geq 1} A_{\frac{1}{k}}.$$

Aus Satz 2.46,2) folgt

$$\lambda(A_{\frac{1}{k}}) = 0.$$

Daher ist $\lambda(N) = 0$.

□

Bemerkung: Es sei $f : X \to \mathbb{R}^m$ μ-meßbar und $g : X \to \mathbb{R}^m$ sei eine Abbildung mit $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann ist f integrabel genau dann, wenn g integrabel ist, und in diesem Falle ist

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu$$

für alle μ-meßbaren Mengen $A \subset X$.

Satz 2.48. *Es sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ so, daß $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0$. Dann existiert eine Teilfolge f_{n_k}, die punktweise fast überall gegen f konvergiert, und zwar so, daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine μ-meßbare Teilmenge $A \subset X$ mit $\mu(A) < \epsilon$ existiert so, daß f_{n_k} auf $X \setminus A$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis: Indem wir f_n durch $f_n - f$ ersetzen, können wir $f = 0$ annehmen. Weiterhin können wir durch Übergang zu einer Teilfolge annehmen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\| f_n \|_1 < \frac{1}{2^{2n}}.$$

Durch Abänderung von f_n auf einer Menge vom Maß 0 können wir annehmen, daß alle f_n meßbar sind. Wir verfahren wie im Beweis von Lemma 2.41. Es sei

$$Y_n = \left\{ x \in X \mid \| f_n(x) \| \geq 2^{-n} \right\}.$$

Dann ist Y_n meßbar und es gilt

$$\frac{1}{2^n}\mu(Y_n) \leq \int_{Y_n} \| f_n(x) \| \, d\mu \leq \int_X \| f_n(x) \| \, d\mu \leq \frac{1}{2^{2n}},$$

und daher

$$\mu(Y_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Sei $Z_n = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \cdots$. Dannn gilt

$$\mu(Z_n) \leq 2^{-n+1}.$$

Wenn $x \notin Z_n$, dann gilt für alle $k \geq n$

$$\| f_k(x) \| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Daher konvergiert (f_k) auf $X \setminus Z_n$ gleichmäßig gegen 0. Sei

$$Z = \bigcap_{n \geq 1} Z_n.$$

Dann gilt $\mu(Z) = 0$ und (f_k) konvergiert auf $X \setminus Z$ punktweise gegen 0.

□

Korollar 2.49. *Es sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$, die punktweise fast überall gegen eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0$.*

Beweis: Da $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ vollständig ist, existiert $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - g \|_1 = 0$$

und aus Satz 2.48 folgt, daß eine Teilfolge (f_{n_k}) punktweise fast überall gegen g konvergiert. Da (f_{n_k}) nach Voraussetzung fast überall gegen f konvergiert, ist

$$f(x) = g(x) \quad \text{für fast alle} \quad x \in X.$$

□

Es sei

$$\mathcal{N}^1(X, \mathbb{R}^m) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m) \mid \| f \|_1 = 0 \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{N}^1 \subset \mathcal{L}^1$ ein Unterraum. Sei

$$L^1(X, \mathbb{R}^m) = \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m) / \mathcal{N}^1(X, \mathbb{R}^m).$$

Für $[f] \in L^1(X, \mathbb{R}^m)$ sei

$$\| [f] \|_1 := \| f \|_1 .$$

Diese Defintion ist unabhängig vom Repräsentanten.
$(L^1(X,\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1)$ ist ein vollständiger normierter Raum.
Bez.: $[f] \in L^1(X,\mathbb{R}^m)$ wird einfach mit f bezeichnet.

$$L^1 - \lim_{n\to\infty} f_n = f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0.$$

2.8. **Konvergenzsätze.** Das Lebesgue-Integral ist unter ziemlich schwachen Voraussetzungen mit Grenzwertbildung vertauschbar. Das ist ein goßer Vorzug des Lebesgueintegrals.

Satz 2.50. *(monotone Konvergenz, Satz von Beppo Levi)*
Es sei $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, eine monoton wachsende (bzw. monoton fallende) Folge integrabler Funktionen, so daß die Folge $(\int_X f_n d\mu)$ beschränkt ist. Dann konvergiert (f_n) punktweise fast überall und in der L^1-Seminorm gegen eine integrable Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Insbesondere gilt

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

Beweis: Wir betrachten den Fall einer monoton wachsenden Folge. Die Folge der Integrale $\int_X f_n(x)d\mu$ ist nach Voraussetzung monoton wachsend und beschränkt. Nach dem Satz über monotone beschränkte Folgen ist die Folge $(\int_X f_n d\mu)$ konvergent. Daher existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_X f_k(x)d\mu - \int_X f_n(x)d\mu < \epsilon$$

für alle $k \geq n \geq N$. Für solche Paare k, n gilt aber auf Grund der Monotonie

$$\| f_k - f_n \|_1 = \int_X (f_k(x) - f_n(x))d\mu < \epsilon.$$

Damit ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge. Aus Satz 2.45 folgt, daß ein $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathbb{R})$ existiert mit $f = L^1 - \lim_{n\to\infty} f_n$. Aus Satz 2.48 folgt, daß eine Teilfolge (f_{n_k}) existiert, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Da (f_n) eine monoton wachsende Folge ist, konvergiert daher auch (f_n) punktweise fast überall gegen f.

□

Lemma 2.51. *(Lemma von Fatou).*
Es sei $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, eine Folge nichtnegativer integrabler Funktionen mit $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu < \infty$. Dann existiert

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

fast überall, f ist integrabel und es gilt

$$\int_X f(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$g_{k,n} = \inf(f_k, \dots, f_{k+n}), \quad n \geq 1.$$

Die Folge $(g_{k,n})$ ist monoton fallend und $g_{k,n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist die Folge $(\int_X g_{k,n} d\mu)$ beschränkt. Es sei

$$h_k = \inf_{n\geq k} f_n = \lim_{n\to\infty} g_{k,n}.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\int_X h_k(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_{k,n}(x)\ d\mu.$$

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$g_{k,n} \leq f_{k+j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Daher ist

$$\int_X h_k(x)d\mu \leq \inf_{l\geq k} \int_X f_l(x)d\mu.$$

Weiter ist

$$\inf_{l\geq k} \int_X f_l(x)\ d\mu \leq \lim_{l\to\infty} \inf_{n\geq l} \int_X f_n(x)\ d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu < \infty.$$

Daraus folgt, daß $(\int_X h_k(x)\ \ d\mu)$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge ist. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt, daß

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

fast überall existiert und integrabel ist mit

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\; d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k(x)\; d\mu.$$

Zusammen mit obiger Ungleichung folgt daraus

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\; d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\; d\mu.$$

□

Satz 2.52. *(Satz von Lebesgue, dominante Konvergenz)*
Es sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$, die punktweise fast überall gegen eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^m$ konvergiert. Es sei $g : X \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion mit $\| f_n(x) \| \leq g(x)$ für alle $x \in X$ und $n \geq 1$. Dann ist f integrabel und $f = L^1 - \lim_{n\to\infty} f_n$.
Insbesondere gilt

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

Beweis: Es sei $k \geq 1$ fest. Wir definieren $g_n : X \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, durch

$$g_n(x) = \sup\{\| f_i(x) - f_j(x) \| \mid k \leq i, j \leq k + n\}.$$

Dann ist g_n integrabel und (g_n) ist monoton wachsend. Weiter ist

$$g_n(x) \leq 2g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi existiert daher

$$h_k(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

fast überall und h_k ist integrabel. Nach Definition gilt

$$h_k(x) = \sup\{\| f_i(x) - f_j(x) \| \mid \quad i, j \geq k\}.$$

Dann ist $h_k \geq 0$ und die Folge (h_k) ist monoton fallend und konvergiert nach Voraussetzung fast überall gegen 0. Aus dem Satz von Beppo Levi folgt daher

$$\lim_{k\to\infty}\int_X h_k(x)\,d\mu = 0.$$

Für $n \geq k$ ist nach Definition von h_k

$$\| f_k - f_n \|_1 \leq \int_X h_k(x) d\mu.$$

Daraus folgt, daß (f_n) eine L^1-Cauchyfolge ist. Die Behauptung des Satzes folgt aus Korollar 2.49.

□

Korollar 2.53. *Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ so, daß*

$$\sum_{n\geq 1}\int_X \| f_n(x) \| \,d\mu < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ für fast alle $x \in X$ und es gilt

$$\int_X \left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right) d\mu = \sum_{n\geq 1}\int_X f_n(x) d\mu.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \| f_k(x) \| \,.$$

Dann ist (g_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ und (g_n) ist monoton wachsend.

Nach Voraussetzung ist die Folge $(\int_X g_n(x) d\mu)$ beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi konvergiert die Folge (g_n) fast überall gegen die Funktion

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k(x) \|$$

und $g : X \to \mathbb{R}$ ist integrabel. Daraus folgt, daß $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fast überall konvergiert. Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert daher $\sum_{k=1}^{n} f_k$ in der L^1-Seminorm. Insbesondere gilt dann

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k(x) d\mu.$$

□

Korollar 2.54. *Es sei $f : X \to \mathbb{R}^m$ μ-meßbar. Dann ist f genau dann integrabel, wenn eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ existiert mit $\| f(x) \| \leq g(x)$ für fast alle $x \in X$. Insbesondere gilt auch: f ist genau dann integrabel, wenn $\| f \|$ integrabel ist.*

Beweis: $\Rightarrow$) Es sei f integrabel. Nach Satz 2.44, 2), ist dann $\| f \|$ integrabel und wir können $g = \| f \|$ wählen.
$\Leftarrow$) Sei $g : X \to \mathbb{R}$ integrabel mit $\| f(x) \| \leq g(x)$ für fast alle $x \in X$. Da f μ-meßbar ist, existiert nach Satz 2.10 eine Folge (f_n) elementarer Abbildungen (bezüglich der μ-Meßbarkeit), die punktweise gegen f konvergiert. Wir definieren die Abbildungen $h_n : X \to \mathbb{R}^m$ durch

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{falls } \| f_n(x) \| \leq 2g(x) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nimmt f_n nur endlich viele Werte an. Das gleiche gilt daher für h_n. Daraus folgt, daß h_n eine einfache Abbildung ist. Es sei

$$h_n(X) = \{c_1, \ldots, c_k\}.$$

Auf $A_i = h_n^{-1}(c_i)$ gilt dann

$$\| c_i \| \mu(A_i) \leq \int_{A_i} \| f_n(x) \| d\mu \leq 2 \int_{A_i} g(x) d\mu < \infty.$$

Also ist h_n eine Treppenabbildung und daher integrabel. Weiter ist $h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ für fast alle $x \in X$. Nach Defintion ist $\| h_n \| \leq 2g$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt, daß f integrabel ist.

□

Korollar 2.55. *Seien $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ μ-meßbar. Dann ist $f \cdot g$ integrabel, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.*
1) f ist integrabel und g ist beschränkt.
2) f ist beschränkt und g ist integrabel.

Korollar 2.56. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Zu $\epsilon > 0$ existiert eine μ-meßbare Menge $A \subset X$ mit $\mu(A) < \infty$ so, daß*

$$\left\| \int_X f(x)d\mu - \int_A f(x)d\mu \right\| < \epsilon.$$

Beweis: Sei $B = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Dann ist nach Satz 2.46 B μ-meßbar und σ-endlich. Sei $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ eine Folge von μ-meßbaren Mengen mit $\mu(B_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, und $B = \cup_{n \geq 1} B_n$. Dann konvergiert $\chi_{B_n} \cdot f$ punktweise gegen f. Weiter ist

$$\| \chi_{B_n} \cdot f \| \leq \| f \| .$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\| \int_X f(x)d\mu - \int_{B_n} f(x)d\mu \| = \| \int_X f(x)d\mu - \int_X (\chi_{B_n} \cdot f)(x)d\mu \| \to 0$$

für $n \to \infty$.

$\square$

Satz 2.57. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$. Wir nehmen an, daß eine Konstante $\kappa \geq 0$ existiert, so daß für alle μ-meßbaren Teilmengen $A \subset X$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ gilt*

$$\left\| \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x)d\mu \right\| \leq \kappa.$$

Dann ist $\| f(x) \| \leq \kappa$ für fast alle $x \in X$. Insbesondere ist $f(x) = 0$ für fast alle $x \in X$ genau dann, wenn $\int_A f(x)d\mu = 0$ für alle μ-meßbaren $A \subset X$ mit endlichem, positivem Maß.

Beweis: Die Menge $A = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ist μ-meßbar. Wir müssen zeigen, daß $\| f(x) \| \leq \kappa$ für fast alle $x \in A$. Sei $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A$ eine Folge mit $\mu(A_i) < \infty$ und $A = \cup_{n \geq 1} A_n$. Dann ist $\mu(A) = \lim_{n \to \infty}(A_n)$. Sei $v \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $\| v \| > \kappa$. Sei $\epsilon > 0$ so, daß $\epsilon < \| v \| - \kappa$. Dann gilt $\| w \| > \kappa$ für alle $w \in U_\epsilon(v)$. Sei

$$B_v = \{x \in X \mid f(x) \in U_\epsilon(v)\}.$$

Dann ist $B_v \subset A$. Da $B_v = \cup_{n \geq 1}(B_v \cap A_n)$ ist, gilt

$$\mu(B_v) = \lim_{n \to \infty}(B_v \cap A_n).$$

Sei $\mu(B_v) > 0$. Dann ist $\mu(B_v \cap A_n) > 0$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist $\mu(B_v \cap A_n) < \infty$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\epsilon < \| v \| - \kappa &\leq \| v \| - \left\| \frac{1}{\mu(B_v \cap A_n)} \int_{B_v \cap A_n} f(x) d\mu \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\mu(B_v \cap A_n)} \int_{B_v \cap A_n} (v - f(x)) d\mu \right\| \\ &\leq \frac{1}{\mu(B_v \cap A_n)} \int_{B_v \cap A_n} \| v - f(x) \| \, d\mu < \epsilon.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Deshalb ist $\mu(B_v) = 0$.
Sei (v_n) eine Folge in $\mathbb{R}^m$ und $\epsilon_n > 0$ wie oben mit

$$\{v \in \mathbb{R}^m \mid \| v \| > \kappa\} = \bigcup_{n \geq 1} U_{\epsilon_n}(v_n).$$

Aus dem gerade Bewiesenen folgt, daß die Mengen $B_{v_n} = f^{-1}(B_{\epsilon_n}(v_n))$ das Maß 0 haben. Daraus folgt, daß die Menge

$$\bigcup_{n \geq 1} B_{v_n} = \{x \in X \mid \| f(x) \| > \kappa\}$$

das Maß 0 hat.

□

2.9. **Das Integral positiver Funktionen.** Es sei μ σ-endlich. In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : X \to [0, \infty].$$

Solchen Funktionen kann man ebenfalls sinnvoll ein Integral zuordnen. Sei zunächst $\varphi : X \to [0, \infty]$ eine Stufenfunktion. Dann setzen wir

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \sum_{c \in \mathbb{R}} c \cdot \mu(\varphi^{-1}(c)).$$

Dies ist eine endliche Summe. Für eine beliebige μ-meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ setzen wir

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi(x) d\mu \mid 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty],$$

wobei das Suprenum über alle Stufenfunktionen $\varphi : X \to [0, \infty]$ mit $0 \leq \varphi \leq f$ genommen wird. Wir können $\int_X f d\mu$ auch wie folgt definieren

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X g(x) d\mu \mid g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Wir nennen weiterhin nur $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ integrabel. Mittels dieser Definition kann man Maße durch Integrale definieren.

Definition 2.58. *Eine Menge $A \subset X$ heißt μ-meßbar, wenn die charakteristische Funktion χ_A von A integrierbar ist*

$$\mu(A) = \int_X \chi_A(x) d\mu = \int_A d\mu.$$

Lemma 2.59. *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine μ-meßbare Funktion. Wenn die μ-meßbare Teilmenge $A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ positives Maß hat, so ist $\int_X f(x) d\mu > 0$.*

Beweis: Sei $\mu(A) > 0$. Wir wählen eine monoton wachsende Folge $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ von meßbaren Mengen in X mit $\mu(A_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$, und

$$X = \bigcup_{k \geq 1} A_k.$$

Dann ist

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap A_n).$$

Da $\mu(A) > 0$ ist, existiert ein $n \geq 1$ mit $\mu(A \cap A_n) > 0$. Sei

$$g = \min(f, \chi_{A_n}).$$

Dann ist $0 \leq g \leq f$ und $g > 0$ auf $A \cap A_n$. Weiter ist g integrabel, da g μ-meßbar, $\mu(A_n) < \infty$ und $0 \leq g \leq \chi_{A_n}$ ist. Angenommen, es wäre $\int_X g(x) d\mu = 0$. Dann ist

$$\| g \|_1 = \int_X g(x) d\mu = 0.$$

Nach Korollar 2.47 ist dann $g(x) = 0$ für fast alle $x \in X$. Dies ist ein Widerspruch zu $g > 0$ auf $A \cap A_n$. Daraus folgt $\int_X f(x)d\mu > 0$.

□

Lemma 2.60. *Es sei $f : X \to [0, \infty]$ eine μ-meßbare Funktion mit $\int_X f(x)d\mu < \infty$. Dann hat die μ-meßbare Teilmenge $P = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$ das Maß 0 und nach Änderung auf P, so daß f nur Werte in $\mathbb{R}$ annimmt, ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$.*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ mit $0 \leq f_n \leq f$ und

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

O.B.d.A. können wir (f_n) als monoton wachsend voraussetzen. Andernfalls betrachten wir die Folge

$$h_n = \max(f_1, \ldots, f_n).$$

Nach Voraussetzung ist $(\int_X f_n(x)d\mu)$ eine beschränkte Folge. Nach dem Satz von Beppo Levi existiert ein $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ so, daß f_n punktweise fast überall und in der L^1-Seminorm gegen g konvergiert. Es gilt weiterhin

$$\int_X g(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu.$$

Nun ist $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$. Deshalb ist $h = f - g$ eine nicht-negative μ-meßbare Funktion mit $\int_X h(x)d\mu = 0$. Aus Lemma 2.59 folgt dann $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in X$.

□

Satz 2.61. *(monotone Konvergenz)*
Sei $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \geq 1$, eine monoton wachsende Folge μ-meßbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu.$$

Beweis: Falls alle f_n integrabel sind und $(\int_X f_n(x)d\mu)$ eine beschränkte Folge ist, so ist dies der Satz von Beppo Levi. Andernfalls sind beide Seiten gleich ∞.

□

Bemerkung: Wenn $f : X \to [0, \infty]$ eine μ-meßbare Funktion ist, so existiert eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : X[0, \infty)$, die punktweise gegen f konvergiert. Dies kann man wie folgt zeigen. Zuerst bemerken wir, daß es eine Folge $g_n : X \to [0, \infty)$ von elementaren Funktionen gibt, die punktweise gegen f konvergiert. Sei $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ eine Folge von meßbaren Mengen mit $\mu(A_i) < \infty$ und $\cup_{n \geq 1} A_n = X$. Sei $f_n = \chi_{A_n} \cdot g_n$. Dann ist f_n eine Treppenfunktion und die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen f.

2.10. **Vergleich mit anderen Integralbegriffen.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Grenzen a, b, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ist. Wir erinnern daran, daß eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ Regelfunktion heißt, wenn für jedes $x \in (a, b)$ der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f in x existiert und der links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte in a falls $a \in I$ bzw. b falls $b \in I$ ist.

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt, und sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ von I. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion bezüglich $\mathcal{Z}$, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ von I gibt, so daß f auf (x_{i-1}, x_i) konstant ist, $1 \leq i \leq n$. Treppenfunktionen bezüglich $\mathcal{Z}$ sind Regelfunktionen. Sie sind auch Treppenfunktionen bezüglich des Lebesgueschen Maßes und daher integrierbar. Wir erinnern an folgenden Satz

Approximationssatz. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn eine Folge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ von $\mathcal{Z}$-Treppenfunktionen existiert mit $\| f_n - f \|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.*

Satz 2.62. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von $\mathcal{Z}$-Treppenfunktionen mit $\| f - f_n \|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R})$, (f_n) ist eine L^1-Cauchyfolge und $\| f - f_n \|_1 \to 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere ist*

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Hierbei ist das Integral auf der linken Seite das Lebesgue-Integral und das Integral auf der rechten Seite das Integral für Regelfunktionen.

Beweis: Es gilt

$$\| f_n - f_m \|_\infty \leq \| f_n - f \|_\infty + \| f - f_m \|_\infty .$$

Daher ist (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\| \cdot \|_\infty$. Weiter gilt

$$\| f_n - f_m \|_1 = \int_{[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| d\lambda \leq \| f_n - f_m \|_\infty (b-a).$$

Daher ist (f_n) eine L^1-Cauchyfolge. Nach Voraussetzung konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
Aus Korollar 2.49 folgt, daß $f \in \mathcal{L}^1([a,b], \mathbb{R})$ ist und

$$f = L^1 - \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Daher ist

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Bemerkung: Ebenso kann man zeigen, daß eine Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist und die beiden Integrale übereinstimmen.

Satz 2.63. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $f \geq 0$. Wenn das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ existiert, so ist $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\int_I f(x) d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis: Sei z.B. $I = [a, b)$. Wir wählen eine monoton wachsende Folge (b_n) mit $a < b_n \to b$. Nach Definition des uneigentlichen Integrals ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(x) dx.$$

Sei $\chi_n = \chi_{[a,b_n]}$ und $f_n = \chi_n \cdot f$. Dann ist (f_n) eine monoton wachsende Folge und es gilt

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Aus Satz 2.62 erhalten wir

$$\int_I f_n(x)d\lambda = \int_{[a,b_n]} f(x)d\lambda = \int_a^{b_n} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt, daß f integrierbar ist und

$$\int_I f(x)d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

ist. Die anderen Fälle $I = (a, b]$ und $I = (a, b)$ behandelt man analog.

□

Bemerkung: Die Voraussetzung $f \geq 0$ in Satz 2.63 kann nicht weggelassen werden. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (-1)^n/n$ für $x \in [n-1, n)$. Dann ist f eine Regelfunktion und das uneigentliche Integral existiert. Und zwar ist

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}.$$

Aber f ist nicht integrabel, denn in diesem Falle wäre auch $|f|$ integrabel.

□

2.11. **Produktmaße.** In diesem Abschnitt konstruieren wir aus zwei σ-endlichen Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ einen Produktraum

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu).$$

Seien X und Y Mengen, $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra in X und $\mathcal{B}$ eine Mengenalbegra in Y. Ein **Rechteck** (bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$) ist eine Teilmenge von $X \times Y$ der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Es sei $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Menge aller Teilmengen von $X \times Y$, die die Vereinigung von endlich vielen paarweise disjunkten Rechtecken sind.

Lemma 2.64. *$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist eine Mengenalbegra in $X \times Y$.*

Beweis: Für Teilemengen $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$ gilt

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

und

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = ((A_1 \setminus A_2) \times B_1) \cup ((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)).$$

Daraus folgt, daß mit $P, Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ auch $P \cap Q$ und $P \setminus Q$ in $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ enthalten sind. Nach Definition ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ abgeschlossen unter endlichen disjunkten Vereinigungen. Weiter ist

$$P \cup Q = P \sqcup (Q \setminus P).$$

Daraus folgt, daß mit $P, Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ auch $P \cup Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist.

□

Wir nehmen von jetzt an, daß es Folgen $(A_n) \subset \mathcal{A}$ und $(B_n) \subset \mathcal{B}$ gilt mit $\cup_{n \geq 1} A_n = X$ und $\cup_{n \geq 1} B_n = Y$.

Lemma 2.65. *Es gilt*

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma = (\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma)_\sigma.$$

Beweis: Es gilt

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma \subset (\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma)_\sigma.$$

Da $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ enthält, folgt daraus

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma \subset (\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma)_\sigma.$$

Es bleibt die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Für $B \in \mathcal{B}$ betrachten wie die σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \times \{B\}$ in $X \times B$, die von allen Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ erzeugt wird. Offensichtlich ist $\mathcal{A}_\sigma \times \{B\}$ in $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$ enthalten für jedes $B \in \mathcal{B}$.

Für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ folgt dann ebenso, daß $\{A\} \times \mathcal{B}_\sigma$ in $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$ enthalten ist. Daraus folgt schließlich

$$\mathcal{A}_\sigma \times \mathcal{B}_\sigma \subset (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma.$$

□

Definition 2.66. *Es sei*
$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma.$$

Lemma 2.67. *Es sei $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Für $x \in X$ sei*
$$Q_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in Q\}.$$
Dann ist $Q_x \in \mathcal{B}_\sigma$ für alle $x \in X$.

Beweis: Es sei $\mathcal{S}$ die Menge aller $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so daß $Q_x \in \mathcal{B}_\sigma$ für alle $x \in X$. Dann enthält $\mathcal{S}$ alle Rechtecke der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Daher ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$. Wir bemerken weiterhin, daß die Abbildung $Q \to Q_x$ mit allen Operationen der Mengentheorie kommutiert. Erstens ist $X \times Y \in \mathcal{S}$. Wenn $Q \in \mathcal{S}$, so ist auch $X \times Y \setminus Q \in \mathcal{S}$, da
$$((X \times Y) \setminus Q)_x = Y \setminus Q_x.$$
Weiter gilt für $Q, P \in \mathcal{S}$
$$(P \cap Q)_x = P_x \cap Q_x.$$
Es sei $\{Q_n\}$ eine Folge in $\mathcal{S}$. Dann ist $(\cup Q_n)_x = \cup (Q_n)_x$. Daraus folgt, daß $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Da $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$, ist $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma \subset \mathcal{S}$.

□

Lemma 2.68. *Es sei P ein Meßraum und $f : X \times Y \to P$ eine meßbare Abbildung. Für $x \in X$ sei $f_x : Y \to P$ diejenige Abbildung, die definiert ist durch $f_x(y) = f(x, y)$. Dann ist f_x meßbar für alle $x \in X$.*

Beweis: Für $Q \subset P$ und $x \in X$ ist
$$f_x^{-1}(Q) = \{y \in Y \mid f(x, y) \in Q\} = (f^{-1}(Q))_x.$$
Die Behauptung folgt aus Lemma 2.67.

□

Wir setzen jetzt voraus, daß μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und ν ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{B}$ ist mit $\nu(A) < \infty$, $\mu(B) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A} und B \in \mathcal{B}$.

Bemerkung: Es sei μ ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{R}$ und ν ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{S}$. Weiter sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $\mathcal{B}$ die Menge aller $B \in \mathcal{B}$ mit $\nu(B) < \infty$. Dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Mengenalgebren und obige Voraussetzungen gelten für die Einschränkung von μ und ν auf $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$.

Für Rechtecke $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, definieren wir

$$(\mu \times \nu)(A \times B) := \mu(A)\nu(B).$$

Wir setzen $\mu \times \nu$ zu einer endlich additiven Funktion $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, \infty)$ fort.

Lemma 2.69. *Sei $A \times B$ ein Rechteck und sei $(A_n \times B_n)$ eine Folge paarweise disjunkter Rechtecke mit $\cup_{n \geq 1}(A_n \times B_n) = A \times B$. Dann ist*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \sum_{n \geq 1} (\mu \times \nu)(A_n \times B_n).$$

Beweis: Sei $x \in A$. Dann ist B die disjunkte Vereinigung der B_n mit $x \in A_n$. Daraus folgt

$$\sum_{n \geq 1} \nu(B_n)\chi_{A_n}(x) = \nu(B)\chi_A(x).$$

Aus dem Satz von Beppo Levi folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\nu(B_k) &= \int_X \sum_{k=1}^{n} \nu(B_k)\chi_{A_k}(x) d\mu \\ &\xrightarrow[n \to \infty]{} \int_X \nu(\mathcal{B})\chi_A(x) d\mu = \mu(A)\nu(B). \end{aligned}$$

□

Aus diesem Lemma folgt,daß $\mu \times \nu$ ein Maß auf der Mengenalgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist. Außerdem ist $\mu \times \nu$ σ-endlich, denn nach Voraussetzung ist $X = \cup_{n \geq 1} A_n$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $Y = \cup_{n \geq 1} B_n$ mit $\nu(B_n) < \infty$. Daher ist

$$X \times Y = \bigcup_{m,n \geq 1} (A_m \times B_n)$$

mit $(\mu \times \nu)(A_m \times B_n) < \infty$. Aus dem Fortsetzungssatz von Hahn erhalten wir eine eindeutige Fortsetzung von $\mu \times \nu$ zu einem Maß $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B})_\sigma$.

Definition 2.70. *$\mu \otimes \nu$ heißt das* **Produktmaß** *von μ und ν.*

Satz 2.71. *Seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $n = k + m$. Seien λ_k, λ_m und λ_n die Lebesgueschen Maße auf $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$. Bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ gilt $\lambda_n = \lambda_k \otimes \lambda_m$.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}_n$ die Mengenalgebra in $\mathbb{R}^n$, die aus endlichen Vereinigungen von paarweise disjunkten halboffenen Quadern besteht. Entsprechend seien $\mathcal{A}_k$ und $\mathcal{A}_m$ definiert. Aus der Definition der Quader folgt

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_m.$$

Weiter ist $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_m$ auf $\mathcal{A}_n$.

□

Lemma 2.72. *Sei $Z \subset X \times Y$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge. Für fast alle $x \in X$ ist dann Z_x eine ν-Nullmenge.*

Beweis: Wir zeigen, daß das äußere Maß $\nu^*(Z_x)$ von Z_x für fast alle $x \in X$ verschwindet. Sei

$$S = \{x \in X \mid \nu^*(Z_x) > 0\}$$

und sei $\epsilon > 0$. Da Z eine Nullmenge ist, existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Rechtecken $Q_k = A_k \times B_k$, $A_k \in \mathcal{A}$ und $B_k \in \mathcal{B}$, so daß

$$\bigcup_{k \geq 1} Q_k \supset Z \quad \text{und} \quad \sum_{k \geq 1} (\mu \times \nu)(A_k \times B_k) < \frac{\epsilon}{n 2^n}.$$

Dann ist

$$Z_x \subset \bigcup_{k \geq 1} Q_{k,x}.$$

Sei

$$R_n = \{x \in X \mid \sum_{k \geq 1} \nu(Q_{k,x}) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Da

$$\sum_{k \geq 1} \nu(Q_{k,x}) = \sum_{k \geq 1} \nu(B_k) \chi_{A_k}(x)$$

ist, ist R_n meßbar. Weiter ist

$$S_n = \{x \in X \mid \nu^*(Z_x) \geq \frac{1}{n}\} \subset R_n.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\mu(R_n) &\leq \sum_{k\geq 1} \int_X \nu(Q_{k,x}) d\mu(x)\\ &= \sum_{k\geq 1} \int_X \nu(B_k)\chi_{A_k}(x) d\mu(x)\\ &= \sum_{k\geq 1} \mu(A_k)\nu(B_k) < \frac{\epsilon}{n2^n}.\end{aligned}$$

Daher ist $\mu(R_n) < \epsilon/2^n$. Da $S = \cup_{n\geq 1} S_n$ ist, folgt

$$\mu^*(S) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(S_n) < \epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, ist S eine Nullmenge.

□

Satz 2.73. *Es sei $Q \subset X \times Y$ eine $(\mu \otimes \nu)$-meßbare Menge. Dann ist für fast alle $x \in X$ die Menge Q_x μ-meßbar, die (nur fast überall definierte) Funktion $x \longmapsto \nu(Q_x)$ ist μ-meßbar und es gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x).$$

Beweis: Nach Definition existiert eine $(\mu \otimes \nu)$-Nullmenge Z, so daß $P = Q \cup Z$ meßbar ist, d.h., $P \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Nach Lemma 2.67 ist P_x meßbar für alle $x \in X$, und nach Lemma 2.72 ist Z_x eine ν-Nullmenge für fast alle $x \in X$. O.B.d.A. können wir deshalb annehmen, daß Q meßbar ist.
Es sei $\mathcal{C}$ das System aller meßbaren $Q \subset X \times Y$, für die die Funktion $x \longmapsto \nu(Q_x)$ μ-meßbar ist und

$$(\mu \otimes \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x) d\mu(x)$$

gilt. Es sei $Q = A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Dann ist

$$\nu(Q_x) = \nu(B)\chi_A(x).$$

Daher ist $A \times B \in \mathcal{C}$. Daraus folgt, daß $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Wir zeigen jetzt, daß $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra ist.

Offenbar ist $X \times Y \in \mathcal{C}$. Nach Satz 2.61 ist $\mathcal{C}$ abgeschlossen bezüglich abzählbarer disjunkter Vereinigungen. Um die Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung zu zeigen, betrachten wir zunächst den Fall $\mu(X) < \infty$ und $\nu(Y) < \infty$. Es sei $Q \in \mathcal{C}$ und $P = X \times Y \setminus Q$. Dann ist

$$\nu(P_x) = \nu(Y) - \nu(Q_x).$$

Daher ist $P \in \mathcal{C}$. In diesem Falle ist also $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra und die Behauptung des Satzes gilt daher.

Im allgemeinen Fall betrachten wir Folgen meßbarer Mengen $A_1 \subset A_2 \subset \cdots X$ und $B_1 \subset B_2 \subset \cdots Y$ mit

$$\mu(A_i) < \infty, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \nu(B_j) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}$$

sowie

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \quad \text{und} \quad Y = \bigcup_{n \geq 1} B_n.$$

Für eine meßbare Teilmenge $Q \subset X \times Y$ ist dann

$$\nu(Q_x) = \lim_{n \to \infty} \nu(Q_x \cap B_n)\chi_{A_n}(x).$$

Da χ_{A_n} meßbar ist, ist $x \longmapsto \nu(Q_x)$ μ-meßbar. Aus dem Satz über monotone Konvergenzen folgt

$$(\mu \otimes \nu)(Q) = \lim_{n \to \infty} (\mu \otimes \nu)(Q \cap (A_n \times B_n)).$$

Wie wir oben gezeigt haben, gilt die Behauptung des Satzes, wenn wir X durch A_n, Y durch B_n und Q durch $Q \cap (A_n \times B_n)$ ersetzen. Daher ist

$$(\mu \otimes \nu)(Q \cap (A_n \times B_n)) = \int_X \nu(Q_x \cap B_n)\chi_{A_n}(x) d\mu.$$

Diese beiden Gleichungen zusammengenommen ergibt

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(Q) &= \lim_{n \to \infty} (\mu \otimes \nu)(Q \cap (A_n \times B_n)) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_X \nu(Q_x \cap B_n)\chi_{A_n}(x) d\mu \\ &= \int_X \nu(Q_x) d\mu.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.74. *(Prinzip von Cavalieri)*
Seien $Q, P \subset X \times Y (\mu \otimes \nu)$-meßbare Teilmengen und es gelte $\nu(Q_x) = \nu(P_x)$ für fast alle $x \in X$. Dann ist

$$(\nu \otimes \nu)(Q) = (\mu \otimes \nu)(P).$$

Beispiel: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossenen Menge und sei

$$K = \{(t, (1-t)x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [0,1],\ x \in A\}.$$

Dann ist $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ abgeschlossen, also meßbar, und $K_t = (1-t)A$ für $0 \leq t \leq 1$. Daher ist

$$\lambda_n(K_t) = (1-t)^n \lambda_n(A)$$

Daraus folgt

$$\lambda_{n+1}(K) = \int_0^1 (1-t)^n \lambda_n(A) dt = \frac{\lambda_n(A)}{n+1}.$$

Satz 2.75. *(Approximationssatz)*
Für jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ existiert eine monoton wachsende Folge $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$.

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ konstruieren wir eine Partition $\{B_k, k \in \mathbb{N}, U\}$ wie folgt. Es sei

$$U = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$$

und für $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$B_k = \{x \in X \mid \epsilon k \leq f(x) < \epsilon(k+1)\}.$$

Zu dieser Partition definieren wir die elementare Funktion $\varphi_\epsilon : X \to [0, \infty]$ durch

$$\varphi_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \chi_{B_k} + \infty \chi_U, \quad \text{mit } m_k = \inf f(B_k).$$

Für diese Funktion gilt

$$0 \leq \varphi_\epsilon \leq f \leq \varphi_\epsilon + \epsilon.$$

Wir führen dieselbe Konstruktion für $\epsilon/2$ aus und erhalten eine Partition $\{C_k, k \in \mathbb{N}_0, U\}$, wobei

$$C_k = \{x \in X \mid \frac{\epsilon}{2} k \leq f(x) < \frac{\epsilon}{2}(k+1)\}.$$

Wegen

$$B_k = C_{2k} \cup C_{2k+1}$$

folgt

$$\varphi_\epsilon \leq \varphi_{\epsilon/2}.$$

Sei $g_p = \varphi_{2^{-p}}, \quad p \in \mathbb{N}$. Dann ist (g_p) eine Folge von elementaren Funktionen mit $g_p \leq g_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\lim_{p\to\infty} g_p(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Es sei $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$ eine Folge μ-meßbarer Mengen mit $\mu(A_k) < \infty$ und $\cup_{k\geq 1} A_k = X$. Sei

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(n, g_n(x)), & \text{für } x \in A_n; \\ 0, & \text{für } x \in X \setminus A_n. \end{cases}$$

Dann ist (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen $f_n : X \to [0, \infty)$ mit den geforderten Eigenschaften, d.h., (f_n) ist eine monotone Folge von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert.

□

Satz 2.76. *(Satz von Tonelli)*
Es sei $f : X \times Y \to [0, \infty]$ eine $(\mu \otimes \nu)$-meßbare Funktion. Dann gilt
1) $f_x : Y \to [0, \infty]$ ist ν-meßbar für fast alle $x \in X$.
2) Die Funktion $x \in X \longmapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ ist μ-meßbar.
3) Es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x,y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Beweis:
Sei $Q \subset X \times Y$ $(\mu \otimes \nu)$-meßbar mit $(\mu \otimes \nu)(Q) < \infty$ und sei χ_Q die charakteristische Funktion von Q. Aus Satz 2.73 folgt

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} \chi_Q(x,y) d(\mu \otimes \nu) = (\mu \otimes \nu)(Q) &= \int_X \nu(Q_x) d\mu \\ &= \int_X \int_Y \chi_Q(x,y) \nu(y) d\mu(x).\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes für Treppenfunktionen. Nach Satz 2.75 existiert eine Folge $f_n : X \times Y \to [0, \infty)$ von Treppenfunktionen, die punktweise und monoton gegen f konvergiert. Aus dem Satz 2.61 folgt

$$\int_{X \times Y} f(x,y) d(\mu \otimes \nu) = \lim_{n \to \infty} \int_{X \times Y} f_n(x,y) d(\mu \otimes \nu).$$

Es sei $Q \subset X \times Y$ eine $(\mu \otimes \nu)$-meßbare Menge mit $(\mu \otimes \nu)(Q) < \infty$. Aus Satz 2.73 folgt, daß eine Menge $Z \subset X$ mit $\mu(Z) = 0$ existiert so, daß für alle $x \in X \setminus Z$ die Menge Q_x μ-meßbar ist. Weiterhin folgt aus Satz 2.73, daß die Funktion $x \in X \setminus Z \longmapsto \nu(Q_x)$ μ-meßbar ist und

$$\int_{X \setminus Z} \nu(Q_x) d\mu(x) = (\mu \otimes \nu)(Q) < \infty$$

ist. Aus Lemma 2.60 folgt dann, daß eine Nullmenge $Z' \supset Z$ existiert so, daß $\nu(Q_x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus Z'$. Daraus folgt insbesondere, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $Z_n \subset X$ existiert, so daß $f_n(x, \cdot)$ für alle $x \in X \setminus Z_n$ eine Treppenfunktion ist. Es sei

$$Z = \bigcup_{n \geq 1} Z_n.$$

Dann ist $f_n(x, \cdot)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X \setminus Z$ eine Treppenfunktion. Da $f_n(x, \cdot)$ für alle $x \in X \setminus Z$ punktweise gegen $f(x, \cdot)$ konvergiert, ist $f(x, \cdot)$ μ-meßbar. Da $(f_n(x, \cdot))$ eine monoton wachsende Folge ist, folgt aus Satz 2.61, daß

$$\int_Y f(x,y) d\nu(y) = \lim_{n \to \infty} \int_Y f_n(x,y) d\nu(y)$$

gilt für $x \in X \setminus Z$. Es sei

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$$

und

$$g_n = \int_Y f_n(x,y)d\nu(y).$$

Nach Satz 2.73 folgt, daß die (g_n) μ-meßbar sind. Weiter ist $g_n \geq 0$, (g_n) ist monoton und für alle $x \in X \setminus Z$ konvergiert $g_n(x)$ gegen $g(x)$. Also ist g μ-meßbar und aus dem Satz 2.61 folgt

$$\begin{aligned}\int_X g(x)d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_X\int_Y f_n(x,y)d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{X\times Y} f_n(x,y)d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu).\end{aligned}$$

□

Satz 2.77. *(Satz von Fubini)*
Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ integrabel bezüglich $\mu \otimes \nu$. Dann gilt:
1) $f(x,\cdot) : Y \to \mathbb{R}^m$ ist integrabel für fast alle $x \in X$;
2) Die Abbildung $x \in X \longmapsto \int_X f(x,y)d\nu(y)$ ist integrabel;
3) Es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu) = \int_X\int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x).$$

Beweis: Wie im Beweis von Satz 2.76 folgt, daß die Behauptung des Satzes für Treppenabbildungen gilt. Es sei $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}^m$ eine L^1-Cauchyfolge von Treppenabbildungen, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Indem wir eventuell f_n durch die Treppenabbildung

$$g_n(x,y) = \begin{cases} f_n(x,y), & \| f_n(x,y) \| \leq 2 \| f(x,y) \| \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ersetzen, können wir annehmen, daß

$$\| f_n(x,y) \| \leq 2 \| f(x,y) \|$$

für alle $n \geq 1$ und $(x,y) \in X \times Y$ gilt. Aus Lemma 2.72 folgt, daß für fast alle $x \in X$, $\| f_n(x,\cdot) \|$ außerhalb einer Nullmenge $Z_x \subset Y$ punktweise gegen $\| f(x,\cdot) \|$ konvergiert. Daraus folgt, daß $\| f(x,\cdot) \|$ für fast alle $x \in X$ eine ν-meßbare Funktion ist. Nach dem Satz von Tonelli ist $x \longmapsto \int_Y \| f(x,y) \| d\nu$ μ-meßbar und

$$\int_X \int_Y \| f(x,y) \| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} \| f(x,y) \| d(\mu \otimes \nu) < \infty.$$

Aus Lemma **??** folgt, daß $\int_Y \| f(x,y) \| d\nu < \infty$ für fast alle $x \in X$. Insbesondere ist $f(x,\cdot)$ für fast alle $x \in X$ integrabel. Weiter ist

$$\| f_n(x,\cdot) \| \leq 2 \| f(x,\cdot) \| .$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt, daß für fast alle $x \in X$, $(f_n(x,\cdot))$ eine L^1-Cauchyfolge ist. Daher ist

$$\int_Y f(x,y) d\nu(y) = \lim_{n \to \infty} \int_Y f_n(x,y) d\nu(y)$$

für fast alle $x \in X$. Es sei

$$h_n(x) = \int_Y f_n(x,y) d\nu(y)$$

und

$$h(x) = \int_Y f(x,y) d\nu(y).$$

Dann folgt, daß (h_n) eine Folge integrabler Abbildungen ist,die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Weiter ist

$$\begin{aligned} \| h_n - h_m \|_1 &= \int_X \| h_n(x) - h_m(x) \| d\mu(x) \\ &= \int_X \| \int_Y (f_n(x,y) - f_m(x,y)) d\nu(y) \| d\mu(x) \\ &\leq \int_X \int_Y \| f_n(x,y) - f_m(x,y) \| d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_{X \times Y} \| f_n(x,y) - f_m(x,y) \| d(\mu \otimes \nu) \\ &= \| f_n - f_m \|_1 . \end{aligned}$$

Deshalb ist (h_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int_X \int_Y f(x,y)d\nu(y)d\mu(x) &= \int_X h(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x)d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n(x,y)d(\mu\otimes\nu) \\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu).\end{aligned}$$

□

Beispiele: 1) Sei $Q = [-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $f : Q \to [0,\infty]$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{|x| + |y|}.$$

Dann ist f meßbar. Für $y \neq 0$ ist $f(\cdot, y)$ integrabel und es gilt

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]} f(x,y)d\lambda_1(x) &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{|x|+|y|} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x+|y|} \\ &= 2\int_{|y|}^{|y|+1} \frac{d\xi}{\xi} = 2\ln\frac{|y|+1}{|y|}.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 \ln\frac{y+1}{y}dy &= [(1+y)\ln(1+y) - y\ln y]_\epsilon^1 \\ &= 2\ln 2 - (1+\epsilon)\ln(1+\epsilon) + \epsilon\ln\epsilon \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 2\ln 2.\end{aligned}$$

Daher existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \ln\frac{y+1}{y}dy = 2\ln 2.$$

Aus dem Satz von Tonelli folgt damit

$$\begin{aligned}\int_Q f(x,y)d\lambda_2 &= \int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x,y)d\lambda_1(x)d\lambda_1(y) \\ &= 2\int_{[-1,1]} \ln\frac{|y|+1}{|y|}dy = 4\int_0^1 \ln\frac{1+y}{y}dy = 8\ln 2.\end{aligned}$$

□

2.12. **Die Tranformationsformel.** Ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung eindimensionaler Integrale ist die Tranformationsformel. Es sei $\varphi : [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation und $f : [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt.$$

Allgemein für Transformationen $\varphi : I \to J$ mit $\varphi' \neq 0$ ist

$$\int_I (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|dt = \int_{\varphi(I)} f(x)dx.$$

Eine entsprechende Formel gibt es für das Lebesgue-Integral in höheren Dimensionen. Als erstes beweisen wir das folgende Teilresultat.

Satz 2.78. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\varphi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Wenn $A \subset U$ Lebesgue-meßbar ist, so ist $\varphi(A) \subset V$ ebenfalls Lebesgue-meßbar und es gilt*

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_A |\det \varphi'(x)| d\lambda(x),$$

wobei $\varphi'(x) = d\varphi(x)$ das Differential von φ in x ist.

Beweis: Auf $\mathbb{R}^n$ verwenden wir die Norm

$$\| x \| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verwenden wir die Operatornorm

$$\| L \| = \max_{\|x\|=1} \| L(x) \| .$$

Sei zunächst $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter, halboffener Würfel mit $\overline{Q} \subset U$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir unterteilen Q in gleichgroße, halboffene Würfel Q_j, $1 \leq j \leq k^n$, so daß

$$\| \varphi'(x) - \varphi'(y) \| < \epsilon \quad \text{und} \quad |\det(\varphi'(x)) - \det(\varphi'(y))| < \epsilon$$

für alle $x, y \in Q_j$, $1 \leq j \leq k^n$. Sei $x_j \in Q_j$ das Zentrum von Q_j. Auf Grund der Wahl unserer Norm existiert $r > 0$, so daß

$$Q_j = B_r(x_j) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x - x_j \| < r\}$$

für alle j, $1 \leq j \leq k^n$. Sei

$$S_j := \varphi'(x_j)^{-1} \circ \varphi.$$

Dann gilt

$$S_j'(x_j) = \varphi'(x_j)^{-1} \circ \varphi'(x_j) = Id$$

und

$$\begin{aligned} \| S_j'(x) - S_j'(x_j) \| &= \| \varphi'(x_j)^{-1} \circ \varphi'(x) - \varphi'(x_j)^{-1} \circ \varphi'(x_j) \| \\ &= \| \varphi'(x_j)^{-1} \circ (\varphi'(x) - \varphi'(x_j)) \| \leq \| \varphi'(x_j)^{-1} \| \cdot \epsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in Q_j$. Es sei

$$\kappa = \max_{y \in \overline{Q}} \| \varphi'(y)^{-1} \| .$$

Dann ist für $x \in Q_j$

$$\| S_j'(x) \| \leq 1 + \epsilon \| \varphi'(x_j)^{-1} \| \leq 1 + \kappa\epsilon,$$

Aus dem Schrankensatz folgt damit

$$\| S_j(x) - S_j(x_j) \| \leq (1 + \kappa\epsilon) r \quad \text{für alle} \quad x \in Q_j.$$

Es sei $z_j = S_j(x_j)$. Dann ist also

$$S_j(Q_j) \subset B_{(1+\kappa\epsilon)r}(z_j) = (1 + \kappa\epsilon) B_r(z_j).$$

Daher gilt

$$\lambda(S_j(Q_j)) \leq (1 + \kappa\epsilon)^n \lambda(Q_j).$$

Da $\varphi'(x_j)$ eine lineare Abbildung ist, erhalten wir aus Satz 2.31 zusammen mit dieser Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda\varphi(Q_j)) &= \lambda(\varphi'(x_j) \circ S_j(Q_j)) = \lambda(\varphi'(x_j)(S_j(Q_j))) \\ &= |\det \varphi'(x_j)| \lambda(S_j(Q_j)) \leq |\det \varphi'(x_j)| (1 + \kappa\epsilon)^n \lambda(Q_j). \end{aligned}$$

Es sei

$$\delta = \max_{y \in \overline{Q}} |\det \varphi'(y)|^{-1}.$$

Dann ist auf Grund der Wahl von Q_j und ϵ

$$|\det \varphi'(x_j)| |\det \varphi'(x)|^{-1} \leq (1 + \delta\epsilon)$$

für $x \in Q_j$. Damit erhalten wir aus dieser Ungleichung

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi(Q_j)) &\leq (1+\kappa\epsilon)^n \int_{Q_j} |\det \varphi'(x_j)| d\lambda \\ &\leq (1+\delta\epsilon)(1+\kappa\epsilon)^n \int_{Q_j} |\det \varphi'(x)| d\lambda.\end{aligned}$$

Wegen der Additivität

$$\lambda(Q) = \sum \lambda(Q_j) \quad \text{und} \quad \lambda(\varphi(Q)) = \sum \lambda(\varphi(Q_j))$$

gilt diese Abschätzung auch für Q, d.h.,

$$\lambda(\varphi(Q)) \leq (1+\delta\epsilon)(1+\kappa\epsilon)^n \int_Q |\det \varphi')| d\lambda.$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt

$$\lambda(\varphi(Q)) \leq \int_Q |\det \varphi'(x)| d\lambda(x). \tag{2.8}$$

Mit geeigneter Unterteilung folgt, daß diese Ungleichung auch für halboffene Quader mit rationalen Seitenlängen gilt. Da jeder Quader die Vereinigung einer aufsteigenden Folge von halboffenen Quadern mit rationalen Seitenlängen ist, gilt die obige Ungleichung für jeden Quader.

Da $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, ist $A \subset U$ genau dann Borelsch, wenn $\varphi(A)$ Borelsch ist. Aus (2.8) folgt, daß das Bild einer Nullmenge in U eine Nullmenge in V ist. Daher ist für eine Lebesgue-meßbare Menge $A \subset U$ das Bild $\varphi(A)$ Lebesgue-meßbar in V. Jede offene Teilmenge von U ist die Vereinigung von abzählbar vielen paarweise disjunkten Quadern. Daher gilt (2.8) auch für jede offene Teilmenge $Q \subset U$. Sei $K \subset U$ kompakt. Es sei $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ eine absteigende Folge von relativ kompakten offenen Mengen mit

$$\overline{U}_n \subset U \quad \text{und} \quad \bigcap_{n\geq 1} U_n = K.$$

Es sei $V_i = \varphi(U_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist (V_i) eine absteigende Folge relativ kompakter offener Mengen mit

$$\overline{V}_n \subset V \quad \text{und} \quad \bigcap_{n\geq 1} V_n = \varphi(K).$$

Da $\det \varphi'(x)$ stetig ist, ist $|\det \varphi'(x)|$ auf U_n durch

$$\Delta = \max\{|\det \varphi'(x)||x \in \overline{U}_1\}$$

beschränkt, und daher integrabel auf jedem U_n. Weiter ist

$$\lambda(\varphi(K)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V_n) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} |\det \varphi'(x)| d\lambda.$$

Andererseits gilt $\lambda(U_n \setminus K) \to 0$. Daher ist

$$\int_{U_n} |\det \varphi'(x)| d\lambda - \int_K |\det \varphi'(x)| d\lambda \leq \Delta \cdot \lambda(U_n \setminus K) \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit folgt, daß

$$\lambda(\varphi(K)) \leq \int_K |\det \varphi'(x)| d\lambda.$$

gilt für alle kompakten $K \subset U$. Aus Satz 2.34 folgt schließlich

$$\lambda(\varphi(A)) \leq \int_A |\det \varphi'(x)| d\lambda \tag{2.9}$$

für alle Lebesgue-meßbaren Teilmengen $A \subset U$. Sei jetzt $f : V \to [0, \infty)$ eine Treppenfunktion. Aus (2.9) folgt dann

$$\int_V f(y) d\lambda(y) \leq \int_U f(\varphi(x)) \mid \det \varphi'(x) \mid d\lambda(x).$$

Mit Hilfe des Satzes über monotone Konvergenz folgt, daß diese Ungleichung für alle Lebesgue-meßbaren Funktionen $f : V \to [0, \infty]$ gilt. Die ananloge Ungleichung gilt auch für φ^{-1}. Sei $B = \varphi(A)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(A) &\leq \int_B |\det(\varphi^{-1})'(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \int_A |\det(\varphi^{-1})'(\varphi(x))| \cdot |\det \varphi'(x)| d\lambda(x) = \int_A 1 \; d\lambda = \lambda(A).\end{aligned}$$

Die obigen Ungleichungen sind Gleichungen und damit ist die behauptete Gleichung bewiesen.

□

Bezeichnung: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar. Anstelle von $\int_A f(x) d\lambda(x)$ schreiben wir $\int_A f(x) dx$.

Aus dem Beweis von Satz (2.78) folgt unmittelbar der folgenden Satz.

Satz 2.79. *Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Es sei $f : V \to [0, \infty]$ Lebesgue-meßbar. Dann ist auch $f \circ \varphi : U \to [0, \infty]$ Lebesgue-meßbar und es gilt*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx.$$

Satz 2.80. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Wenn $f : V \to \mathbb{R}^m$ integrabel ist, so ist $f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| : U \to \mathbb{R}^m$ integrabel und es gilt*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx.$$

Beweis: Es sei zunächst

$$f = \sum_{i=1}^m v_i \chi_{A_i}$$

eine Treppenabbildung mit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ und $A_1, \dots, A_m$ Lebesgue-meßbar mit $\lambda(A_i) < \infty$. Nach Satz 2.78 ist $B_i = \varphi^{-1}(A_i)$ Lebesgue-meßbar und es gilt

$$\int_U \chi_{B_i} |\det \varphi'(x)|dx = \int_{B_i} |\det \varphi'(x)|dx = \lambda(A_i).$$

Insbesondere ist

$$\chi_{B_i} \cdot |\det \varphi'| = (\chi_{A_i} \circ \varphi)|\det \varphi'|$$

integrabel und daher auch

$$\sum_{i=1}^m v_i(\chi_{A_i} \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_V f(y)dy = \sum_{i=1}^m v_i \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^m \int_U (v_i \chi_{A_i}(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx \\ = \int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx.\end{aligned}$$

Es sei nun $f \in \mathcal{L}^1(V, \mathbb{R}^m)$ und es sei (f_n) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{T}(V, \mathbb{R}^m)$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.
Dann konvergiert $(f_n \circ \varphi)|\det \varphi'|$ punktweise fast überall gegen $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$. Weiter folgt aus Satz 2.79

$$\| (f_n \circ \varphi)|\det \varphi'| - (f_m \circ \varphi)|\det \varphi'| \|_1 = \| f_n - f_m \|_1 .$$

Daher ist $((f_n \circ \varphi)|\det \varphi'|)$ eine L^1-Cauchyfolge und deshalb ist $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ integrabel und es gilt

$$\int_V f(y)dy = \int_U f(\varphi(x))|\det \varphi'(x)|dx.$$

□

In manchen Fällen ist $\varphi : U \to V$ nur außerhalb einer Menge vom Maß 0 invertierbar. Dann gilt die Tranformationsformel ebenfalls.

Korollar 2.81. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Es sei $A \subset U$ eine meßbare Teilmenge, so daß der Rand von A das Maß 0 hat und φ C^1-invertierbar ist im Inneren von A. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\varphi(A))$. Dann ist $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathcal{L}^1(A)$ und es gilt*

$$\int_{\varphi(A)} f(y)dy = \int_A (f \circ \varphi)(x)|\det \varphi'(x)|dx$$

Beweis: Es sei U_0 das Innere von A. Da φ eine C^1-Abbildung und ∂A eine Nullmenge ist, ist $\varphi(\partial A)$ ebenfalls eine Nullmenge und es gilt

$$\varphi(A) = \varphi(U_0) \cup \varphi(\partial A).$$

Daher ist $f \in \mathcal{L}^1(\varphi(U_0))$. Nach Voraussetzung ist $\varphi | U_0$ ein C^1-Diffeomorphismus. Aus Satz 2.80 folgt

$$\int_{\varphi(U_0)} f(y)dy = \int_{U_0} (f \circ \varphi)(x)|\det \varphi'(x)|dx.$$

Da $\varphi(U_0)$ und U_0 sich von $\varphi(A)$ bzw. A nur um Nullmengen unterscheiden, gilt die Transformationsformel auch, wenn wir $\varphi(U_0)$ und U_o durch $\varphi(A)$ und A ersetzen.

□

2.13. **Zylinder-, Polar- und Kugelkoordinaten.** Wir behandeln in diesem Abschnitt einige wichtige Fälle von Koordinatentransformationen.

Wir betrachten zuerst einen Drehkörper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit der z-Achse als Drehachse, d.h., es gilt

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \varphi \in (-\pi,\pi),\ (r,z) \in A\},$$

wobei $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine vorgegebene Lebesgue-meßbare Teilmenge ist. Die hier auftretenden Koordinaten (r,φ,z) heißen Zylinderkoordinaten (bezüglich der z-Achse). Wir haben es also mit der Koordinatentransformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu tun, die definiert ist durch

$$T(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Die Einschränkung von T auf $(0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \mathbb{R}$ ist ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^3 \setminus H$, wobei H die Halbebene

$$H = \{(x,y,z) \mid x \leq 0, y = 0\}$$

ist. Dann ist $H \subset \mathbb{R}^3$ eine Nullmenge. Wir können daher Korollar 2.81 anwenden. Daraus folgt, daß wir das Volumen des Drehkörpers K wie folgt berechnen können

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(K) = \lambda_3(K) &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_K(x,y,z)d\lambda(x,y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}} \chi_K(T(r,\varphi,z))r\, d\lambda(r,\varphi,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}} \chi_A(r,z)r\, d(r,\varphi,z) \\
&= 2\pi \int_A r\, d(r,z) = 2\pi\lambda_2(A)R
\end{aligned}$$

wobei R der Abstand des **Schwerpunktes**

$$S = S(A) = \frac{1}{\lambda(A)} \int_A x dx$$

von der z-Achse ist. Daraus erhalten wir die **Guldinsche Regel**

$$\mathrm{Vol}(K) = \lambda_3(K) = 2\pi R \lambda_2(A).$$

Für $n \geq 2$ definieren wir **Polarkoordinaten** $P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$P_2(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

und für $n \geq 3$ rekursiv durch

$$P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = (P_{n-1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-2}) \cos \varphi_{n-1}, r \sin \varphi_{n-1}).$$

Im Falle $n = 3$ nennt man die Polarkoordinaten auch **Kugelkoordinaten**.

Lemma 2.82. *Es gilt*
1) $\| P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \| = r$;
2) $\det P_n'(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = r^{n-1} \cos^0 \varphi_1 \cdot \cos^1 \varphi_2 \cdots \cos^{n-2} \varphi_{n-1}$;
3) Es sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0,\ x_2 = 0\}$.
Dann ist

$$P_n : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \to \mathbb{R}^n \setminus H$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis: 1) ist klar.
2) Zunächst zeigt man

$$P_n' = \begin{pmatrix} P_{n-1}' \cos \varphi_{n-1} & & -P_{n-1} \sin \varphi_{n-1} \\ \sin \varphi_{n-1} & 0 \ldots 0 & r \cos \varphi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln die Determinante dieser Matrix nach der letzten Zeile. Dabei benutzen wir, daß P_{n-1} und die erste Spalte $\partial_r P_{n-1}$ von P_{n-1}' die Gleichung $r \partial_r P_{n-1} = P_{n-1}$ erfüllen.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \det P_n' &= (-1)^{n+1} \sin^2 \varphi_{n-1} (-1)^{n-1} \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \det P_{n-1}' \cdot r \\ &\quad + (-1)^{2n} r \cos^n \varphi_{n-1} \det P_{n-1} = r \det P_{n-1}' \cos^{n-2} \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

2) folgt damit durch Induktion.
3) Sei $n \geq 3$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus H$. Da $x_1^2 + x_2^2 > 0$ ist, ist $r = \| x \| > 0$ und $|x_n / r| < 1$. Daher ist

$$\varphi_{n-1} = \arcsin\left(\frac{x_n}{r}\right), \quad r = \| x \| .$$

Sei

$$x' = \frac{1}{\cos \varphi_{n-1}} (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Dann ist $\| x' \| = r$ und x' hat genau ein Urbild (unter P_{n-1}) in

$$\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-3}.$$

Der Beweis folgt wiederum durch Induktion.

□

Es sei M eine Menge. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to M$ **rotationssymmetrisch**, wenn $f = f(\| x \|)$ ist.

Satz 2.83. *Sei $I \subset [0, \infty]$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrabel. Weiter sei*

$$K = K_I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \in I\}.$$

Dann ist $x \in K \longmapsto f(\| x \|)$ integrabel und es gilt

$$\int_K f(\| x \|) dx = n\kappa_n \int_I f(r) r^{n-1} dr,$$

wobei κ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Beweis: Nach Korollar 2.81 gilt

$$\begin{aligned}
&\int_K f(\| x \|) dx \\
&= \int_{I \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}} f(r)^{n-1} \cos^0 \varphi_1 \dots \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \, d(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \\
&= \int_I f(r) r^{n-1} \, dr \\
&\qquad \times \int_{(-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}} \cos^0 \varphi_1 \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_{n-1} \, d(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})
\end{aligned}$$

Wenn wir insbesondere $I = [0, 1]$ und $f = 1$ wählen, so folgt, daß das letzte Integral gleich $n\kappa_n$ ist.

□

Beispiel: Berechnung von κ_n. Für $s \in \mathbb{R}^+$ sei

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

die **Gamma-Funktion**.
Dann ist nach Satz 2.83

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\, dx = n\kappa_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr = \frac{n}{2}\kappa_n \int_0^\infty e^{-t} t^{n/2-1} dt$$
$$= \frac{n}{2} k_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \kappa_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Nach dem Satz von Fubini ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^n.$$

Insbesondere ist damit

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \kappa_2 \Gamma(2) = \kappa_2 = \pi.$$

Daraus folgt $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ und daher

$$\pi^{n/2} = \kappa_n \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

d.h.

$$\kappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Für $n = 2k$ ist

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \Gamma(k+1) = k! = \left(\frac{n}{2}\right)!.$$

Für $n = 2k+1$ ist

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdots \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\kappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)} \quad \text{und} \quad \kappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}.$$

2.14. **Die L^p-Räume.** Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.84. *Für $1 \le p \le \infty$ sei $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ die Menge aller μ meßbaren Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}^m$ so, daß $\| f \|^p$ in $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}^m)$ liegt. Für $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ sei*

$$\| f \|_p = \left(\int_X \| f(x) \|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Satz 2.85. *Für alle p, $1 \le p < \infty$, ist $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ ein reeller Vektorraum und $\| \cdot \|_p$ ist eine Seminorm in $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$. Es seien $p, q > 1$ so, daß*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wenn $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathbb{R}^m)$ so, ist $\| f \| \| g \| \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\int_X \| f(x) \| \| g(x) \| \, d\mu \le \| f \|_p \| g \|_q .$$

Beweis: Für $a, b \ge 0$ gilt die elementare Ungleichung

$$(a+b)^p \le 2^p (a^p + b^p).$$

Es seien $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$. Dann folgt aus dieser Ungleichung

$$\| f(x) + g(x) \|^p \le 2^p (\| f(x) \|^p + \| g(x) \|^p) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Daher ist auch $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$. Damit haben wir gezeigt, daß $\mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ ein reeller Vektorraum ist.

Als nächstes beweisen wir die Höldersche Ungleichung. Es seien $p, q > 1$ und es gelte

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sei $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R}^m)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathbb{R}^m)$. Wenn $\| f \|_p = 0$ oder $\| g \|_q = 0$, so ist f bzw. g fast überall 0. Daher ist $\| f(x) \| \| g(x) \| = 0$ für fast alle $x \in X$ und die Höldersche Ungleichung gilt offensichtlich. Wir können daher annehmen, daß $\| f \|_p \neq 0$ und $\| g \|_q \neq 0$ ist. Es seien $a, b > 0$. Dann gilt

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Für $x \in X$ setzen wir

$$a = \frac{\| f(x) \|^p}{\| f \|_p^p} \quad \text{und} \quad b = \frac{\| g(x) \|^q}{\| g \|_q^q}.$$

Dann folgt aus der Ungleichung

$$\frac{\| f(x) \|}{\| f \|_p} \frac{\| g(x) \|}{\| g \|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\| f(x) \|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\| g(x) \|^q}{\| g \|_q^q}.$$

Daraus folgt aus Korollar 2.53, daß $\| f(x) \| \| g(x) \|$ integrabel ist und es gilt

$$\begin{aligned} \int_X \| f(x) \| \| g(x) \| \, d\mu \leq \| f \|_p \| g \|_q \Bigg(& \frac{1}{p} \frac{\int_X \| f(x) \|^p \, d\mu}{\| f \|_p^p} \\ & + \frac{1}{q} \frac{\int_X \| g(x) \|^q \, d\mu}{\| g \|_q^q} \Bigg) = \| f \|_p \| g \|_q . \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß $\| \cdot \|_p$ eine Seminorm ist, müssen wir die Dreiecksungleichung beweisen. Es gilt

$$\| f(x) + g(x) \|^p \leq \| f(x) \| \| f(x) + g(x) \|^{p-1} + \| g(x) \| \| f(x) + g(x) \|^{p-1} .$$

Es sei $q = p/p - 1$. Dann ist

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Weiter ist $\| f(x) + g(x) \|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X, \mathbb{R})$. Wir können daher die Höldersche Ungleichung auf $\| f(x) \|, \| g(x) \| \in \mathcal{L}^p(X, \mathbb{R})$ und $\| f(x) + g(x) \|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X, \mathbb{R})$ anwenden. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_X \| f(x)+g(x) \|^p \, d\mu &\leq \int_X \| f(x) \| \| f(x)+g(x) \|^{p-1} \, d\mu \\ &+ \int_X \| g(x) \| \| f(x)+g(x) \|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq (\| f \|_p + \| g \|_p) \left(\int_X \| f(x)+g(x) \|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} .\end{aligned}$$

Wenn wir beide Seiten der Ungleichung mit $(\int_X \| f(x)+g(x) \|^p d\mu)^{(p-1)/p}$ multiplizieren, so erhalten wir

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p .$$

□

3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Dafür gibt es verschiedene Gründe. Wir möchten z.B. den Inhalt gekrümmter Flächen im Raum bestimmen. Allgemeiner bedeutet dies, daß wir Volumina von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ messen möchten. Ein weiterer wesentlicher Grund ist die Verallgemeingerung des **Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung**. Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, daß

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

ist. Wir möchten diesen Satz auf den Fall von Funktionen von n Variablen verallgemeineren. Das n-dimensionale Analogon eines kompakten Intervalles ist eine offene beschränkte Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Es sei ∂U der Rand von U. Für ein Intervall $[a, b]$ ist $\partial U = \{a, b\}$. Im einfachsten Falle ist $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Z.B. ist der Rand der n-dimensionalen Einheitskugel $B_n \subset \mathbb{R}^n$ die Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| = 1\}$, von der wir aus Infini II wissen, daß sie eine Untermannigfaltigkeit ist. Im allgemeinen ist dies natürlich nicht erfüllt. Z.B. ist der Rand eines Würfels $Q \subset \mathbb{R}^3$ keine Untermannigfaltigkeit mehr. Die Kanten und Ecken des Würfels bilden die "singulären"

Randpunkte, d.h., die Menge der Punkte, in deren Umgebung ∂Q keine Untermannigfaltigkeit ist.

Eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist der **Gaußsche Integralsatz**. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Menge, deren Rand ∂U eine Untermannigfaltigkeit ist. Weiter sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf U, das stetig auf $\overline{U}$ und stetig differenzierbar auf U ist. Die **Divergenz** von F ist definiert als

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x), \quad x \in U,$$

wobei $F = (F_1, \dots, F_n)$ ist. Es sei $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ das nach außen gerichtete **Einheitsnormalenvektorfeld**. Dann besagt der Satz von Gauß

$$\int_U \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS.$$

Dabei ist dS das Maß auf ∂U, das durch die Einbettung $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ induziert wird. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in der Hydrodynamik und der Potentialtheorie. Um diesen Satz zu verstehen, müssen wir das Maß dS und das entsprechende Integral über ∂U erklären. Der Satz von Gauß gilt für allgemeinere offene Mengen U, sogenannte C^1-Polyeder, bei denen der Rand ∂U eine stückweise differenzierbare Hyperfläche ist, d.h., beim Rand sind gewisse Singularitäten zugelassen. Eine allgemeinere Version des Satzes von Gauß ist der **Satz von Stokes**. Dazu müssen wir den Differentialformenkalkül einführen.

Wir erinnern uns zuerst an die Definition einer Untermannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt d-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und C^1-Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existieren so, daß

$$\varphi(X \cap U) = \mathbb{R}^d_0 \cap V$$

gilt. Dabei ist

$$\mathbb{R}^d_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

O.B.d.A. können wir annehmen, daß V die Gestalt $V = \Omega \times W$ hat, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ offene Teilmengen sind und

$$\varphi(X \cap U) = \Omega \times \{0\}$$

ist. Es sei

$$\gamma : \Omega \to U \cap X$$

definiert durch

$$\gamma(x) = \varphi^{-1}(x, 0), \quad x \in \Omega.$$

Dann ist $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung und (Ω, γ) können wir als lokale Parametrisierung von X auffassen, da $\gamma : \Omega \to \gamma(\Omega) \subset X$ ein Homöomorphismus ist. Außerdem ist $d\gamma(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv für alle $x \in \Omega$. Es sei $\varphi_1 : U_1 \to \Omega_1 \times W_1$ eine weitere Karte von X, wobei $\varphi_1(U_1 \cap X) = \Omega_1 \times \{0\}$. Daraus erhalten wir durch Einschränkung eine lokale Parametrisierung

$$\gamma_1 : \Omega_1 \to X \cap U_1$$

von X. Es sei $U \cap U_1 \neq \emptyset$. Wir setzen $V_1 = \Omega_1 \times W_1$. Nach Voraussetzung ist

$$\varphi_1 \circ \varphi^{-1} : V \cap V_1 \to V \cap V_1$$

ein C^1-Diffeomorphismus der offenen Menge $V \cap V_1 \subset \mathbb{R}^n$. Da

$$\gamma_1 \circ \gamma^{-1} : \Omega \cap \Omega_1 \to \Omega \cap \Omega_1$$

die Einschränkung von $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$ auf $\Omega \cap \Omega_1 \times \{0\} \subset (\Omega \times W) \cap (\Omega_1 \times W_1)$ ist, ist $\gamma_1 \circ \gamma^{-1}$ ein C^1-Diffeomorphismus.

Wir nennen eine Familie

$$\{(\Omega_\alpha, \gamma_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

von lokalen Parametrisierungen $\gamma_\alpha : \Omega_\alpha \to X \cap U_\alpha$ einen Atlas von X, wenn

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} (X \cap U_\alpha)$$

ist. Dann wird X durch die Kartenumgebungen $\gamma_\alpha(\Omega_\alpha) = X \cap U_\alpha$über-deckt und für alle $\alpha, \beta \in I$ ist

$$\gamma_\beta^{-1} \circ \gamma_\alpha : \ \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \to \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$$

ein C^1-Diffeomorphismus.

Lemma 3.1. *Jeder Atlas von X enthält einen Teilatlas mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I.*

Beweis: Es sei $\{(\Omega_\alpha, U_\alpha, \gamma_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ ein Atlas von X. Die Menge der offenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$ mit rationalem Zentrum und rationalem Radius ist abzählbar. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist Vereinigung solcher Kugeln. Es sei $B_1, B_2 \ldots$ eine Abzählung dieser Kugeln so, daß zu jedem B_k ein $\alpha \in I$ existiert mit $B_k \subset U_\alpha$. Wir wählen nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $\alpha(k) \in I$ mit $B_k \subset U_{\alpha(k)}$ und setzen $J = \{\alpha(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Da jedes U_α Vereinigung von Kugeln der Folge (B_k) ist, ist

$$X = \bigcup_{\alpha \in J} (X \cap U_\alpha).$$

□

Aus Kapitel 2 wissen wir: Um auf X integrieren zu können, müssen wir eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X und ein positives Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ konstruieren. Da wir insbesondere offene Teilmengen von X messen möchten, ist klar, daß wir als σ-Algebra die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}$ wählen, die von den offenen Mengen von X erzeugt wird. Nach Konstruktion des Maßes $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ komplettieren wir die σ-Algebra und erhalten die σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Lebesgue-meßbaren Mengen in X. Der wesentliche Punkt ist also die Konstruktion des Maßes λ.

3.1. Der Maßtensor einer Untermannigfaltigkeit.

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Jeder Borelschen Teilmenge $A \subset X$ möchten wir ein Maß $\lambda(A)$ zuordnen. Wir betrachten dazu zuerst Teilmengen, die in einer Karte enthalten sind.

Definition 3.2. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend. Eine C^1-Abbildung $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt parametrisierte d-Fläche, wenn folgendes gilt:*
1) $\gamma : \Omega \to \gamma(\Omega)$ ist ein Homöomorphismus.
2) $\forall x \in \Omega : d\gamma(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv.

Für $d = 1$ ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Einer solchen Kurve haben wir in Abschnitt 10.17 von Infini II die Länge $L(\gamma)$ zugeordnet. Wir erinnern an die Konstruktion. Es sei $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ mit

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b$$

eine Zerlegung des Intervalles $[a,b]$. Diese Zerlegung bestimmt den Polygonzug, der durch die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$ geht. Die Länge dieses Polygonzuges ist

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| \,.$$

Wir haben dann die Länge $L(\gamma)$ der Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$L(\gamma) = \sup_Z \{L_Z(\gamma)\}.$$

Für eine C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ haben wir gezeigt, daß die Länge $L(\gamma)$ existiert und mittels der Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$

berechnet werden kann. Weiterhin haben wir gezeigt, daß $L(\gamma)$ nicht von der Parametrisierung von $\gamma([a,b]) = \Gamma$ abhängt, d.h., wenn $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ ein C^1-Diffeomorphismus ist und $\tilde\gamma = \gamma \circ \varphi$ die neue Parametrisierung von Γ ist, so ist $L(\gamma) = L(\tilde\gamma)$. Wir können also $\| \dot\gamma(t) \| \, dt$ als das infinitesimale Längenelement auf Γ bezüglich der Parametrisierung $\gamma[a,b] \to \Gamma$ ansehen. Dies legt nahe, daß wir für eine meßbare Menge $A \subset [a,b]$ das Maß $\lambda(\gamma(A))$ definieren duch

$$\lambda(\gamma(A)) = \int_A \| \dot\gamma(t) \| \, dt.$$

Es liegt nun nahe, im Falle einer parametrisierten d-Fläche

$$\gamma : \Omega \tilde{\to} X \subset \mathbb{R}^n$$

analog vorzugehen, um ein d-dimensionales Volumen

$$\lambda_d(X) = \mathrm{Vol}_d(X)$$

der Menge X zu definieren, d.h., X durch Polyeder der Dimension d zu approximieren und $\mathrm{Vol}_d(X)$ als den Grenzwert der Volumina der approximierenden Polyeder zu definieren, wenn man die maximale Kantenlänge der Simplexe gegen Null streben läßt. Dies führt aber schon in der Dimension 2 bei einfachen Flächen zu Problemen. Siehe dazu das Beispiel von H.A. Schwarz in G.M. Fichtenholz, "Differential- und Integralrechnung III", 3, S. 242 ff. Eine Möglichkeit, das d-dimensionale Volumen $\mathrm{Vol}_d(X)$ zu definieren, ist die Verwendung des **Hausdorff-Maßes**. Darauf gehen wir hier aber nicht ein. Eine andere Möglichkeit ist folgendes Verfahren. Für $x \in X$ sei $N_x(X) = T_x(X)^\perp$ der Normalenraum im Punkte x. Für $\epsilon > 0$ sei

$$B_x(\epsilon) = \{y \in N_x(X) \mid \| x - y \| < \epsilon\}.$$

Da $N_x(X) \cong \mathbb{R}^{n-d}$, ist $B_x(\epsilon)$ isomorph zu einer Kugel vom Radius ϵ in $\mathbb{R}^{n-d}$. Es sei $V \subset \Omega$ offen mit $\overline{V} \subset \Omega$. Dann ist $\gamma(V) = K \subset X$ relativ kompakt und es existiert $\epsilon > 0$ so, daß für alle $x, y \in K$, $x \neq y$, gilt

$$B_x(\epsilon) \cap B_y(\epsilon) = \emptyset.$$

Wir betrachten die Tube

$$T_\epsilon(K) = \bigcup_{x \in K} B_\epsilon(K)$$

um K. Dann ist es naheliegend, $\mathrm{Vol}_d(K)$ zu definieren durch

$$\mathrm{Vol}_d(K) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_{n-d}(0))} \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-(n-d)} \mathrm{Vol}_n(T_\epsilon(K)).$$

Auf diesem Wege kann man das d-dimensionale Volumen $\lambda_d(X) = \mathrm{Vol}_d(X)$ definieren. Wir führen dies aber auch nicht aus.

Unter der Annahme, das wir einer parametrisierten d-Fläche $\gamma : \Omega \xrightarrow{\simeq} X$ tatsächlich ein Maß $\lambda_d(X)$ in sinnvoller Weise zuordnen können, berechnen wir $\lambda_d(X)$ durch die Parametrisierung. Wir nehmen an, daß $\lambda_d(X)$ additiv ist bezüglich disjunkter Vereinigung. Es sei $\Omega = Q \subset \mathbb{R}^d$ ein Würfel. Wir unterteilen die Kanten von Q in k Intervalle gleicher Länge und erhalten so eine Zerlegung.

$$Q = \bigsqcup_{i=1}^{k^d} Q_i$$

von Q in k^d gleichgroße paarweise disjunkte halboffene Würfel Q_i. Es sei $x_i \in Q_i$ das Zentrum von Q_i. Die Taylorapproximation von γ auf Q_i ergibt

$$\gamma(x) = \gamma(x_i) + \gamma'(x_i)(x - x_i) + \rho_i(x), \tag{3.1}$$

wobei

$$\lim_{x \to x_i} \frac{\rho_i(x)}{\| x - x_i \|} = 0$$

ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu ϵ können wir $k \in \mathbb{N}$ so wählen, daß für alle $i, i = 1, \ldots, k^d$, gilt

$$\| \rho_i(x) \| \leq \epsilon \| x - x_i \| \text{ für alle } x \in Q_i. \tag{3.2}$$

Nun ist

$$\lambda_d(\gamma(Q)) = \sum_{i=1}^{k^d} \lambda(\gamma(Q_i)).$$

Es sei $\psi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\psi_i(x) = \gamma(x_i) - \gamma'(x_i)(x_i) + \gamma'(x_i)(x).$$

Dann ist ψ_i eine affine Transformation und aus (3.1) und (3.2) folgt

$$| \lambda_d(\gamma(Q_i)) - \lambda_d(\psi_i(Q_i)) | \leq \epsilon \lambda_d(Q_i).$$

Dabei haben wir wieder angenommen, daß sich das Volumen bei einer Approximation der Form

$$\gamma(x) = \psi(x) + \rho(x), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\rho(x)}{\| x \|} = 0,$$

stetig verhält und damit

$$| \lambda_d(\gamma(Q)) - \sum_{i=1}^{k^d} \lambda_d(\psi_i(Q)) | \leq \epsilon \lambda_d(Q) \tag{3.3}$$

gilt. Wir berechnen jetzt $\lambda_d(\psi_i(Q_i))$. Da λ_d translationsinvariant ist, genügt es, folgende Situation zu betrachten. Es sei $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ injektiv und $Q = [0,1]^d$. Es sei $e_1, \ldots, e_d \in \mathbb{R}^d$ die Standardbasis. Wir setzen

$$v_i = A(e_i), \quad i = 1, \dots, d.$$

Dann ist

$$A(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{d} t_i v_i, \ t_i \in [0,1], i = 1, \dots, n\}$$

das von $v_1, \dots, v_d$ aufgespannte **Parallelotop** oder d**-Spat** $P(v_1, \dots, v_d)$.

Satz 3.3. *Es gilt*

$$Vol_d(P(v_1, \dots, v_d)) = \sqrt{\det(A^t A)}.$$

Beweis: Es sei $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Wenn wir A in den Standardbasen darstellen, so ist $A = (a_{ij})$ eine $n \times d$ Matrix vom Rang d mit

$$a_{ij} = \langle e_i, A(e_j) \rangle = \langle e_i, v_j \rangle.$$

Daraus folgt

$$A^t A = \left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^{d}. \tag{3.4}$$

Es seien

$$f_d, g_d : \mathbb{R}^n \times \underset{\text{d-mal}}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f_d(v_1, \dots, v_d) = \mathrm{Vol}_d(P(v_1, \dots, v_d))$$

und

$$g_d(v_1, \dots, v_d) = \sqrt{\det(\left(\langle v_i, v_j \rangle \right)_{i,j=1}^{d})}.$$

Auf Grund von (3.4) genügt es zu zeigen, daß $f_d = g_d$ für alle $d \in \mathbb{N}$. Wir bemerken als erstes, daß f_d folgende Eigenschaften hat:

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ f_d(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_d) = |\lambda| f_d(v_1, \dots, v_d)$

2) $f_d(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_d) = f_d(v_1, \dots, v_i, \dots, v_d) + f_d(v_1, \dots, w_i, \dots, v_d)$

3) Wenn $v_i = v_j$ für $i \neq j$, so ist

$$f_d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_d) = 0.$$

4) $f_d(e_1, \ldots, e_d) = 1$.

4) folgt unmittelbar aus der Definition. Wenn $v_i = v_j$, $i \neq j$, ist, so ist $P(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_d)$ ein $(d-1)$ Spat und daher ist das d-Volumen dieses Spates gleich 0. Daher gilt 3). Weiter gilt

$$\begin{aligned} P(v_1, \ldots, v_i + w_i, \ldots, v_d) = P(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_d) \\ \cup \left(P(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_d) + v_i\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt 2).
Sei $V = \oplus_{j=1}^{d} \mathbb{R} v_j$ und sei $e \in V$ mit

$$\| e \| = 1 \quad \text{und} \quad \langle e, v_j \rangle = 0, \ j \neq i.$$

Dann existieren $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, d$, $j \neq i$, so, daß

$$v_i = \lambda e + \sum_{j \neq i} a_j v_j.$$

Aus 2) und 3) folgt dann

$$f_d(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_d) = f_d(v_1, \ldots, \lambda e, \ldots, v_d).$$

Offenbar ist

$$\mathrm{Vol}_d(P(v_1, \ldots, \lambda e, \ldots, v_d)) = \lambda \mathrm{Vol}_{d-1}(P(v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_d)).$$

Nach Definition ist $\lambda = \sin(\varphi) \parallel v_i \parallel$, wobei φ der Winkel zwischen v_i und der von $v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_d$ aufgespannten Hyperebene ist. Daraus folgt unmittelbar 1). Aus den Eigenschaften der Determinante folgt, daß g_d ebenfalls die Eigenschaften 1)-4) hat. Wir zeigen jetzt mittels vollständiger Induktion, daß $f_d = g_d$ gilt. Für $d = 1$ ist $f_1(v) = \parallel v \parallel$ und $g_1(v) = \parallel v \parallel$. Es gelte $f_k = g_k$ für $k \leq d-1$. Wie oben folgt

$$f_d(v_1, \ldots, v_d) = \sin(\varphi) \parallel v_d \parallel f_{d-1}(v_1, \ldots, v_{d-1}). \tag{3.5}$$

Ebenso folgt aus 1)-4)

$$g_d(v_1, \ldots, v_d) = \sin(\varphi) \parallel v_d \parallel g_{d-1}(v_1, \ldots, v_{d-1}). \tag{3.6}$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen v_d und der von $v_1, \ldots, v_{d-1}$ aufgespannten Hyperebene. Aus (3.5), (3.6) und der Induktionsvoraussetzung folgt daher $f_d = g_d$.

□

Aus Satz 3.3 folgt

$$\lambda_d(\psi_i(Q_i)) = \sqrt{\det((\gamma'(x_i))^t\gamma'(x_i))}\lambda_d(Q_i). \tag{3.7}$$

Definition 3.4. *Für $x \in \Omega$ sei*

$$g(x) = \det((\gamma'(x))^t\gamma(x)). \tag{3.8}$$

Auf Grund von (3.4) folgt

$$g(x) = \det\left(\left(\langle\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}(x), \frac{\partial\gamma}{\partial x_l}(x)\rangle\right)_{k,l=1}^d\right).$$

Da $\sqrt{g(x)}$ auf $\overline{Q}$ gleichmäßig stetig ist, existiert $k \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $i,\ i = 1, \ldots, k^d$, gilt

$$\left|\sqrt{g(x)} - \sqrt{g(x_i)}\right| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad x \in Q.$$

Dann folgt aus (3.6)

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_i}\sqrt{g(x)}dx - \lambda_d(\psi_i(Q_i))\right| &= \left|\int_{Q_i}\sqrt{g(x)}dx - \sqrt{g(x_i)}\lambda_d(Q_i)\right| \\ &= \left|\int_{Q_i}\left(\sqrt{g(x)} - \sqrt{g(x_i)}\right)dx\right| \leq \epsilon\lambda_d(Q_i).\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.3) folgt daraus

$$\lambda_d(\gamma(Q)) = \int_Q \sqrt{g(x)}dx. \tag{3.9}$$

Dies kann wie folgt interpretiert werden. Es sei $X = \gamma(\Omega)$. Für jedes $x \in X$ induziert die Einbettung $T_xX \subset \mathbb{R}^n$ ein inneres Produkt in $\mathbb{R}^d$ durch

$$G_x^\gamma(v, w) = \langle\gamma'(x)v, \gamma'(x)w\rangle, \quad v, w \in \mathbb{R}^d.$$

Dies ist die sogenannte 1. **Fundamentalform** von γ in x. Die entsprechende Matrixdarstellung von G_x^γ in der Standardbasis hat die Einträge

$$g_{ij}^\gamma(x) = \langle \gamma'(x)e_i, \gamma'(x)e_j \rangle = \langle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}(x) \rangle.$$

Damit ist

$$g(x) = \det \left((g_{ij}^\gamma(x)) \right).$$

Man nennt (X, G) eine **Riemannsche Mannigfaltigkeit** und $\sqrt{g^\gamma(x)}dx$ die **Volumendichte** von X bezüglich $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Es sei $A \subset \Omega$ Lebesgue-meßbar. Auf Grund obiger heuristischer Überlegungen ist es naheliegend, das Maß $\lambda_d(\gamma(A))$ zu definieren als

$$\lambda_d(\gamma(A)) = \int_A \sqrt{g^\gamma(x)}dx.$$

Damit dies sinnvoll ist, müssen wir zeigen, daß die rechte Seite nicht von der gewählten Parametrisierung γ von $\gamma(\Omega) = X$ abhängt.

Es seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Es sei $\gamma_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit $X = \gamma_1(\Omega)$. Weiter sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dann ist $\gamma_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine C^1-Parametrisierung von X.

Lemma 3.5. *Es sei $A \subset \Omega_2$ Lebesgue-meßbar. Dann ist $\varphi(A) \subset \Omega_1$ Lebesgue-meßbar und es gilt*

$$\int_{\varphi(A)} \sqrt{g^{\gamma_1}(y)}dy = \int_A \sqrt{g^{\gamma_2}(x)}dx.$$

Beweis: Aus dem Transformationssatz folgt, daß $\varphi(A) \subset \Omega_1$ Lebesgue-meßbar ist und

$$\int_{\varphi(A)} \sqrt{g^{\gamma_1}(y)}dy = \int_A \sqrt{g^{\gamma_1}(\varphi(x))} |\det \varphi'(x)| dx. \tag{3.10}$$

Da $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ ist, folgt aus der Kettenregel

$$\gamma_2'(x) = \gamma_1'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x).$$

Daher ist

$$(\gamma_2'(x))^t\gamma_2'(x) = \varphi'(x)^t \circ \gamma_1'(\varphi(x))^t \circ \gamma_1'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g^{\gamma_2}(x) &= \det(\gamma_2'(x)^t\gamma_2'(x)) = \det{}^2\varphi'(x)\det(\gamma_1'(\varphi(x))^t\gamma_1(\varphi(x))) \\ &= \det{}^2\,(\varphi'(x))\,g^{\gamma_1}(\varphi(x)). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\sqrt{g^{\gamma_2}(x)} = \sqrt{g^{\gamma_1}(\varphi(x))}|\det\varphi'(x)|.$$

Zusammen mit (3.9) erhalten wir daraus die behauptete Gleichung.

□

Definition 3.6. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *offen und* $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *eine parametrisierte d-Fläche. Sei* $X = \gamma(\Omega)$. *Eine Teilmenge* $A \subset X$ *heißt Lebesgue-meßbar, wenn* $\gamma^{-1}(A) \subset \Omega$ *Lebesgue-meßbar ist. Für solche* A *sei*

$$\lambda_d(A) = \int_{\gamma^{-1}(A)} \sqrt{g^{\gamma}(x)}dx.$$

Aus Lemma **??** folgt, daß die rechte Seite unabhängig von γ ist. Damit ist $\lambda_d(A)$ eindeutig definiert.

Beispiel: Wir berechnen den Flächeninhalt $A(S^2)$ der 2-Sphäre S^2. Es sei

$$\gamma = P_3(1,\varphi_1,\varphi_2) : [-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to S^2.$$

Dann ist γ ein Diffeomorphismus

$$\gamma : (-\pi,\pi) \times \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to S^2 \setminus S^2 \cap H$$

wobei $H = \{(x,y,z) \in S^2 \mid x \leq 0, y = 0\}$. Nach Definition von P_3 ist

$$\gamma(\varphi_1,\varphi_2) = (\cos\varphi_1\cos\varphi_2, \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1} = (-\sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \cos\varphi_1 \cos\varphi_2, 0)$$

und

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_2} = (-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2, -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \cos\varphi_2)\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\left|\left|\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1}\right|\right|^2 = \cos^2\varphi_2, \left|\left|\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_2}\right|\right| = 1 \quad \text{und} \quad \langle \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_2} \rangle = 0.$$

Damit ist

$$A(S^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi_2 d\varphi_2 d\varphi_1 = 4\pi.$$

□

Wir können jetzt diese Konstruktion "globalisieren". Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige d-dimensionale Untermannigfaltigkeit und es sei (U, φ, Ω) eine Karte von X. Dies bedeutet, daß $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offene Teilmengen sind und eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ existiert so, daß gilt:

1) $\varphi : U \to \Omega \times W$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

2) $\varphi(U \cap X) = \Omega \times \{0\}$.

Dann ist $\gamma = \varphi^{-1}(\cdot, 0) :\to \Omega \cap X$ eine **lokale Parametrisierung** von X und $\gamma : \Omega \to U \cap X$ ist eine parametrisierte d-Fläche im Sinne von Definition 3.2.

Definition 3.7. *Eine Teilmenge $A \subset X$ (bzw. Nullmenge) heißt Lebesgue-meßbar, wenn für jede Karte (U, φ, Ω) von X die Menge $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-meßbar (bzw. eine Nullmenge) ist.*

Lemma 3.8. *Es sei $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Omega_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ ein Atlas von X. Dann ist $A \subset X$ Lebesgue-meßbar (bzw. eine Nullmenge) genau dann, wenn $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A)$ Lebesgue-meßbar (bzw. eine Nullmenge) ist für alle $\alpha \in I$.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall einer Lebesgue-meßbaren Menge. Es sei $A \subset X$ eine Teilmenge so, daß $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap A)$ Lebesgue-meßbar ist für alle $\alpha \in I$. Es sei $J \subset I$ eine höchstens abzählbare Teilmenge so, daß $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Omega_\alpha) \mid \alpha \in J\}$ ein Atlas von X ist. Weiter sei (U, φ, Ω) eine Karte von X. Zu zeigen ist, daß $\varphi(U \cap A)$ eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist.
Es seien $\gamma_\alpha : \Omega_\alpha \to U_\alpha \cap X$ und $\gamma : \Omega \to U \cap X$ die zu φ_α bzw. φ assoziierten lokalen Parametrisierungen von X. Weiter sei

$$\psi_\alpha = \gamma^{-1} \circ \gamma_\alpha : \Omega_\alpha \cap \Omega \to \Omega_\alpha \cap \Omega$$

die entsprechende Koordinationstransformation. Da nach Voraussetzung

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in J} (A \cap U_\alpha)$$

ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi(A \cap U) = \varphi\left(\bigcup_{\alpha \in J} (A \cap U_\alpha \cap U)\right) &= \bigcup_{\alpha \in J} \left((\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)(A \cap U_\alpha \cap U)\right) \\ &= \bigcup_{\alpha \in J} \psi_\alpha\left(\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha \cap U)\right).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$ eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von Ω_α. Da $U \cap U_\alpha$ offen in U_α ist, ist $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und daher ist

$$\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha \cap U) = \varphi_\alpha(A \cap U_\alpha) \cap \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U)$$

eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\Omega \cap \Omega_\alpha$. Da ψ_α ein C^1-Diffeomorphismus ist, ist

$$\psi_\alpha(\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha \cap U)) \subset \Omega \cap \Omega_\alpha$$

ebenfalls Lebesgue-meßbar. Da J höchstens abzählbar ist, folgt daraus, daß $\varphi(A \cap U)$ eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist. Die andere Richtung ist klar.

□

Es sei $\mathcal{A}_X$ die Menge der Lebesgue-meßbaren Mengen von X.

Satz 3.9. *$\mathcal{A}_X$ ist eine σ-Algebra.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Definition und der Tatsache, daß die Lebesgue-meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^d$ eine σ-Algebra bilden.

□

Als nächstes konstruieren wir ein Maß $\lambda : \mathcal{A}_X \to [0, \infty]$. Es sei $A \subset X$ eine Lebesgue-meßbare Teilemenge. Wit wählen einen Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Omega_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ von X mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I. Auf Grund von Lemma 3.1 existiert stets ein solcher Atlas. Es sei

$$I = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$$

eine Abzählung von I. Wir definieren rekursiv

$$A_{\alpha_1} := A \cap U_{\alpha_1} \text{ und } A_{\alpha_k} := A \cap U_{\alpha_k} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_{\alpha_i}.$$

Dann gilt:
1) $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.
2) $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von A.
3) $\forall \alpha \in I: \ A_\alpha \subset X \cap U_\alpha$ ist Lebesgue-meßbar.
Mit anderen Worten, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist eine Zerlegung von A bezüglich $\mathfrak{A}$ in paarweise disjunkte, Lebesgue-meßbare Mengen A_α.

Definition 3.10. *Es sei $A \subset X$ Lebesgue-meßbar. Dann sei*

$$\lambda_{\mathfrak{A}}(A) = \sum_{\alpha \in I} \int_{\varphi_\alpha(A_\alpha)} \sqrt{g^\alpha(x)} dx.$$

Dabei ist $g^\alpha(x)$ definiert durch (3.8) bezüglich der Parametrisieung

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\cdot, 0) : \Omega_\alpha \to U_\alpha \cap X.$$

Satz 3.11. *$\lambda_{\mathfrak{A}}(A)$ ist unabhängig vom gewählten Atlas $\mathfrak{A}$.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{A}' = \{(V_\beta, \psi_\beta, \widetilde{\Omega}_\beta) \mid \beta \in J\}$ ein weiterer Atlas von X mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge J und sei

$$A = \bigsqcup_{\beta \in J} B_\beta$$

eine Zerlegung von A wie oben in paarweise disjunkte, Lebesgue-meßbare Teilmengen B_β mit $B_\beta \subset V_\beta \cap X$, $\beta \in J$. Für alle $\alpha \in I$ gilt

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta \in J} A_\alpha \cap B_\beta$$

und die Mengen $A_\alpha \cap B_\beta$ sind paarweise disjunkt und Lebesgue-meßbar. Daher ist

$$\varphi_\alpha(A_\alpha) = \bigsqcup_{\beta \in J} \varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta)$$

die Vereinigung der paarweise disjunkten, Lebesgue-meßbaren Mengen $\varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta)$. Aus dem Satz über monotone Konvergenz fogt

$$\int_{\varphi_\alpha(A_\alpha)} \sqrt{g^\alpha(x)}dx = \sum_{\beta \in J} \int_{\varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta)} \sqrt{g^\alpha(x)}dx.$$

Eine entsprechende Formel gilt für $\psi_\beta(B_\beta)$, $\beta \in J$. Da

$$\varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta) = \varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(\psi_\beta(A_\alpha \cap B_\beta))$$

und die Einschränkung von $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ auf $\Omega_\alpha \cap \widetilde{\Omega}_\beta$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, folgt aus Lemma 3.5

$$\int_{\varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta)} \sqrt{g^\alpha(x)}dx = \int_{\varphi_\beta(A_\alpha \cap B_\beta)} \sqrt{g^\beta(y)}dy.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathfrak{A}}(A) &= \sum_{\alpha \in I} \int_{\varphi_\alpha(A_\alpha)} \sqrt{g^\alpha(x)}dx = \sum_{\alpha,\beta} \int_{\varphi_\alpha(A_\alpha \cap B_\beta)} \sqrt{g^\alpha(x)}dx \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\psi_\beta(A_\alpha \cap B_\beta)} \sqrt{g^\beta(y)}dy = \sum_{\beta \in J} \int_{\psi_\beta(B_\beta)} \sqrt{g^\beta(y)}dy = \lambda'_{\mathfrak{A}}(A).
\end{aligned}$$

□

Es sei $A \subset X$ Lebesgue-meßbar und $\mathfrak{A}$ ein Atlas von X mit höchstens abzählbarer Indexmenge. Wir setzen

$$\lambda(A) := \lambda_{\mathfrak{A}}(A).$$

Auf Grund von Satz 3.11 ist $\lambda(A) \in [0, \infty]$ eindeutig definiert.

Satz 3.12. *Die Abbildung $\lambda : \mathcal{A}_X \to [0, \infty]$ ist ein σ-endliches Maß.*

Beweis: Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt, daß λ eine σ-additive Abbildung ist.
Es seien $B_k(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \| x \| \leq k\}$. Dann ist

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_k(0) \cap X).$$

Die Mengen $B_k(0) \cap X$ sind kompakt und Lebesgue-meßbar mit endlichem Maß.

□

Damit steht uns die gesamte Integrationstheorie aus Kapitel 2 zur Verfügung.
Das Integral einer Funktion kann man auf die entsprechenden Integrale im $\mathbb{R}^d$ wie folgt zurückführen. Es sei $A \subset X$ Lebesgue-meßbar und sei

$$A = \bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

eine Zerlegung wie oben von A in paarweise disjunkte, Lebesgue-meßbare Teilmengen A_α bezüglich eines Atlases $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Omega_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ mit höchstens abzählbarer Indexmenge I so, daß $A_\alpha \subset U_\alpha \subset X$ für alle $\alpha \in I$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann λ-meßbar genau dann, wenn $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(A_\alpha) \to \mathbb{R}$ λ-meßbar ist für alle $\alpha \in I$. Es sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ integrierbar. Dann ist

$$\int_A f(x) d\lambda = \sum_{\alpha \in I} \int_{\varphi_\alpha(A_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) \sqrt{g^\alpha(x)} dx.$$

Beispiele: 1) *Graphen.* Es sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Dann ist der Graph von f

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y = f(x),\ x \in U\}$$

eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, die definiert ist durch $\varphi(x) = (x, f(x))$, definiert eine Parametrisierung von M. Um die Volumendichte $\sqrt{g^\varphi(x)}$, $x \in U$, zu bestimmen, müssen wir das Volumen des von $\partial_1\varphi(x), \dots, \partial_{n-1}\varphi(x)$ aufgespannten Parallelotopes P bestimmen. Es sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = e_i + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_n, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Es sei

$$V = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x), 1 \right).$$

Dann folgt, daß V senkrecht zu den Vektoren $\partial\varphi/\partial x_i; (x)$, $i = 1, \dots, n-1$, ist. Es sei Q das von P und V aufgespannte Parallelotop. Dann folgt

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(P) \parallel V \parallel = \mathrm{Vol}_n(Q).$$

Das Volumen von Q ist aber gleich dem Betrag der Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -\partial_1 f \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -\partial_2 f \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\partial_{n-1} f \\ \partial_1 f & \partial_2 f & \cdots & \partial_{n-1} f & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Determinante dieser Matrix nach der letzten Zeile entwickeln, erhlalten wir

$$\begin{aligned} &-(-1)^{n+1}(-1)^{n-2}(\partial_1 f)^2 - (-1)^{n+2}(-1)^{n-3}, (\partial_2 f)^2 + \cdots + (-1)^{2n} \cdot 1 \\ &= 1 + \sum (\partial_i f)^2 = 1 + \parallel \mathrm{grad}\, f \parallel^2 . \end{aligned}$$

Da $\parallel V \parallel = \sqrt{1 + \parallel \mathrm{grad}\, f(x) \parallel^2}$ ist, folgt

$$\sqrt{g^\varphi(x)} = \sqrt{1 + \parallel \mathrm{grad}\, f(x) \parallel^2}.$$

Ein spezielles Beispiel ist die **obere Hemishäre** $S^{n-1}_+ \subset S^{n-1}$ mit $U = B_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \parallel x \parallel < 1\}$ und $f(x) = \sqrt{1 - \parallel x \parallel^2}$. Es gilt

$$\mathrm{grad}\, f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - \parallel x \parallel^2}}$$

und damit

$$1 + \parallel \mathrm{grad}\, f(x) \parallel^2 = 1 + \frac{\parallel x \parallel^2}{1 - \parallel x \parallel^2} = \frac{1}{1 - \parallel x \parallel^2}.$$

Daher ist

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_{n-1}} \frac{dx}{\sqrt{1-\parallel x \parallel^2}} = (n-1)\mathrm{Vol}(B_{n-1}) \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} dr.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\kappa_n = \mathrm{Vol}_n(B_n).$$

Weiter sei

$$B_n^+ = \{(x,y) \in B_n \mid y > 0\}$$

die obere n-dimensionale Halbkugel. Da $\{(x,y) \in B_n \mid y = 0\}$ eine Nullmenge in B_n ist und

$$B_n^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid x \in B_{n-1},\ 0 < y < f(x)\},$$

folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_n}{2} &= \mathrm{Vol}_n(B_n^+) = \int_{B_{n-1}} f(x)dx = (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-2}\sqrt{1-r^2}dr \\
&= (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}(1-r^2)dr \\
&= (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}dr - (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_+^{n-1}\right) + (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1}(\sqrt{1-r^2})'dr \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_+^{n-1}\right) - (n-1)^2\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-2}\sqrt{1-r^2}dr \\
&= \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_+^{n-1}\right) - \frac{n-1}{2}\kappa_n.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$\mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_+^{n-1}\right) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(B_n).$$

Es sei

$$S_-^{n-1} = \left\{(x,y) \in S^{n-1} \mid y < 0\right\}.$$

Dann ist offenbar $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_+^{n-1}\right) = \mathrm{Vol}_{n-1}\left(S_-^{n-1}\right)$. Außerdem ist der Äquator $\{(x,y) \in S^{n-1} \mid y = 0\}$ eine Nullmenge in S^{n-1} bezüglich des Lebesgue-Maßes von S^{n-1}. Daraus folgt

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(S^{n-1}) = n\mathrm{Vol}(B_n).$$

3.2. **Der Integralsatz von Gauß.** Der Integralsatz von Gauß ist eine Verallgemeinergung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^n$. Um diesen Satz formulieren zu können, benötigen wir zunächst einige Begriffe.

Definition 3.13. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, d.h., eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Ein* **Einheitsnormalenvektorfeld** *ν auf M ist eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ so, daß für alle $x \in M$ gilt:*
1) $\nu(x) \in N_x(M) = (T_xM)^\perp$;
2) $\| \nu(x) \| = 1$.

Beispiele: 1) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und sei $M = f^{-1}(0)$. Für alle $x \in M$ gelte $\mathrm{grad}f(x) \neq 0$. Dann ist nach dem Satz vom regulären Wert M eine C^1-Hyperfläche. Es sei

$$\nu(x) := \frac{\mathrm{grad}f(x)}{\| \mathrm{grad}f(x) \|} \quad , x \in M. \tag{3.11}$$

Der Normalenraum $N_x(M)$ in $x \in M$ wird von $\mathrm{grad}f(x)$ aufgespannt. Daher ist $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektorfeld.
2) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei eine C^1-Einbettung, d.h., γ ist eine Parametrisierung von $M = \gamma(\Omega)$. Es sei $u \in \Omega$, $x = \gamma(u)$ und

$$N(x) = \frac{\partial \gamma}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}}(u).$$

Dabei bezeichnet $a \wedge b$ das äußere Produkt von zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$. (siehe Skript LA I oder Abschnitt über Differentialformen). Es sei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Nach den Regeln für das innere Produkt gilt

$$\langle N(x), \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}(u) \rangle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \frac{\partial \gamma}{\partial u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}}(u) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}(u) = 0$$

für alle $i = 1, \dots, n-1$. Da die Vektoren $\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial\gamma}{\partial u_{n-1}}(u)$ eine Basis von T_xM sind, ist $N(x) \perp T_xM$. Es sei

$$\nu(x) := \frac{N(x)}{\| N(x) \|} \quad , x \in M. \tag{3.12}$$

Dann ist $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M.

Lemma 3.14. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende C^1-Hyperfläche. Dann existieren auf M entweder zwei Einheitsnormalenvektorfelder oder keins.*

Beweis: 1) Es sei ν ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M, dann ist auch $-\nu$ ein Einheitsnormalenvektorfeld.
2) Es seien ν und $\widetilde{\nu}$ zwei Einheitsnormalenvektorfelder auf M. Dann ist $\nu(x), \widetilde{\nu}(x) \in N_x(M)$ für alle $x \in M$. Da M eine Hyperfläche ist, ist $\dim N_x(M) = 1$ für alle $x \in M$. Daher existiert eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ so, daß

$$\widetilde{\nu}(x) = f(x)\nu(x) \quad , x \in M.$$

Da $\| \nu(x) \| = 1$ und $\| \widetilde{\nu}(x) \| = 1$ gilt, ist $|f(x)| = 1$ für alle $x \in M$. Da f stetig ist, ist entweder $f \equiv 1$ oder $f \equiv -1$. Wenn also $\nu \neq \widetilde{\nu}$ ist, so folgt $f \equiv -1$ und daher $\widetilde{\nu} = -\nu$.

□

Definition 3.15. *Eine C^1-Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **orientierbar***, wenn es auf M ein Einheitsnormalenvektorfeld gibt. Es sei $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M. Dann heißt (M, ν) eine* **orientierte Hyperfläche***.*

Beispiele: 1) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in M = f^{-1}(0)$. Dann ist M orientierbar, da (3.11) ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M ist. Insbesondere ist also die n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ orientierbar.
2) Die Spur einer Einbettung $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ist ebenfalls orientierbar, da (3.12) ein Einheitsnormalenvektorfeld auf M ist.
3) Eine nicht orientierbare Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist das Möbiusband.

Als nächstes müssen wir die Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ festlegen, über die wir beim Satz von Gauß integrieren können. Der einfachste Fall ist eine offene, beschränkte Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, deren Rand ∂U eine C^1-Hyperfläche ist. Wir wissen bereits, daß wir Funktionen über solche Hyperflächen integrieren können. Für die Anwendung des Satzes von

Gauß ist es aber wichtig, allgemeinere Teilmengen als Integrationsgebiete zuzulassen. Der Würfel ist ein einfaches Beispiel eines solchen Integrationsgebietes. Der Rand des Würfels ist eine stückweise differenzierbare C^1-Hyperfläche.

Definition 3.16. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Ein Punkt $x \in \partial G$ heißt* **regulärer Randpunkt** *von G, wenn es eine Umgebung U von x in $\mathbb{R}^n$ gibt und eine C^1-Funktion $q : U \to \mathbb{R}$ mit*
1) $\forall x \in U : \ dq(x) \neq 0$.
2) $G \cap U = \{x \in U \mid q(x) < 0\}$.
Die Menge

$$\partial_r G = \{x \in \partial G \mid x \text{ regulär}\}$$

heißt der **reguläre** *oder* **glatte Rand** *von G. Die Menge*

$$\partial_s G = \partial G \setminus \partial_r G$$

heißt der **singuläre Rand** *von G und die Punkte von $\partial_s G$ heißen singuläre Randpunkte von G.*

Damit wir über den Rand ∂G einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ integrieren können, ist es erforderlich, daß der singuläre Rand $\partial_s G$ eine Nullmenge im Rand ∂G ist. Dies können wir aber mit unseren bisherigen Methoden nicht definieren, da wir die Maßtheorie nur auf glatten Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ entwickelt haben. Ein geeigneter Begriff, um $\partial_s G$ als Nullmenge in ∂U zu charakterisieren, ist die Hausdorff-Dimension.

Definition 3.17. *Es sei $d \in \mathbb{R}^+$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **Hausdorff-Nullmenge der Dimension** *d* **(d-Nullmenge)***, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von achsenparallelen Würfeln W_i mit Kantenlänge r_i gibt so, daß*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} r_k^d < \epsilon.$$

Bemerkungen: 1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Lebesgue-Nullmenge genau dann, wenn A eine Hausdorff-Nullmenge der Dimension n ist.
2) Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \leq n$. Dann ist A als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ eine Hausdorff-Nullmenge der Dimension d genau dann, wenn A eine Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}^d$ ist.

Definition 3.18. *Eine offene Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **C^1-Polyeder***, wenn $\partial_s G$ eine Hausdorff-Nullmenge der Dimension $n-1$ ist.*

Beispiel: Es sei

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3],$$

$a_i < b_i$, $i = 1, 2, 3$, ein Quader im $\mathbb{R}^3$. Der singuläre Rand $\partial_s Q$ ist dann die Vereinigung der Kanten $\{a_1\} \times \{a_2\} \times [a_3, b_3]$, ... Jede Kante ist ein Intervall und daher eine Hausdorff-Nullmenge der Dimension 2.

Lemma 3.19. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und y sei ein regulärer Randpunkt. Dann existiert eine offene Umgebung Q von y mit folgenden Eigenschaften:*
1) Es existiert ein offener Quader $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und ein offenes Intervall I so, daß

$$Q = Q' \times I.$$

2) Es existiert eine C^1-Funktion $h : Q' \to I$ derart, daß entweder gilt

$$G \cap Q = Z^+ := \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n > h(x')\}$$

oder

$$G \cap Q = Z^- := \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n < h(x')\},$$

sowie

$$\partial G \cap Q = \{(x', h(x')) \mid x' \in Q'\}.$$

Beweis: Da y ein regulärer Randpunkt ist, so existieren nach Definition eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von y und eine C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ so, daß $df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ und

$$G \cap U = \{x \in U \mid f(x) < 0\}.$$

Daher ist

$$\partial G \cap U \subset N := \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß es eine Quaderumgebung $Q = Q' \times I \subset U$ von y und eine C^1-Funktion $h : Q' \to I$ gibt, so daß

$$N \cap Q = \{(x', h'(x') \mid x' \in Q'\}. \tag{3.13}$$

Es sei

$$Z^+ = \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n > h(x')\}$$

und

$$Z^- = \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n < h(x')\}\,.$$

Nach (3.13) gilt für $(x', x_n) \in Q' \times I$:

$$f(x', x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = h(x').$$

Aus der Definition von Z^+ und Z^- folgt daher, daß f auf Z^+ und Z^- keine Nullstellen hat. Da Z^+ und Z^- zusammenhängend sind, hat f auf beiden Mengen ein festes Vorzeichen. Diese Vorzeichen müssen verschieden sein, da andernfalls f in jedem Punkt $x \in N \cap Q$ ein lokales Maximum oder Minimum haben würde. Dies bedeutet aber $df(x) = 0$ für $x \in N \cap Q$ und steht somit im Widerspruch zu der Voraussetzung $df(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Daher stimmt $Q \cap G = \{x \in Q \mid f(x) < 0\}$ entweder mit Z^+ oder mit Z^- überein.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\partial G \cap Q$ der Graph von h ist. Da $\partial G \cap U \subset N$ ist, folgt nach Definition von Q und h, daß

$$\partial G \cap Q \subset \{x \in Q \mid f(x) = 0\} = \{(x', h(x')) \mid x' \in Q'\}$$

gilt. Es sei umgekehrt $x' \in Q'$ und $x_0 = (x', h(x'))$. Dann enthält jede Umgebung von x_0 Punkte sowohl aus Z^+ als auch Z^-. Daher ist $x_0 \in \partial G$ und es folgt

$$\{(x', h(x')) \mid x' \in Q'\} \subset \partial G \cap Q.$$

□

Lemma 3.20. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Polyeder. Dann ist $\partial_r G$ eine orientierte Hyperfläche. Auf $\partial_r G$ existiert genau ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld ν so, daß für alle $x \in \partial_r G$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit:*

$$\forall t \in (0, \epsilon) : x + t\nu(x) \in \mathbb{R}^n \setminus G \text{ und } x - t\nu(x) \in G. \tag{3.14}$$

Wählt man zu $y \in \partial_r G$ eine Umgebung U von y und eine C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ wie in Definition 3.16 so, daß gilt für alle $x \in \partial G \cap U$

$$\nu(x) = \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\| \operatorname{grad} f(x) \|}. \tag{3.15}$$

Beweis: Aus dem Beweis von Lemma 3.19 folgt

$$\partial_r G \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Daher wird durch (3.15) eine stetiges Einheitsvektorenfeld auf $\partial_r G \cap U$ definiert. Es bleibt zu zeigen, daß (3.14) gilt. Sei $x \in \partial_r G \cap U$. Zu x existiert $\epsilon > 0$ so, daß $x + t\nu(x) \in U$ für alle $t \in (0, \epsilon)$. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(t) = f(x + t\nu(x)),\ t \in (0, \epsilon).$$

Dann gilt $\varphi(0) = f(x) = 0$ und

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \frac{d}{dt} f(x + t\nu(x)) \mid_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\nu_i(x) \\ &= \langle \operatorname{grad} f(x), \nu(x) \rangle = \| \operatorname{grad} f(x) \| > 0. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $t > 0$ ist daher $f(x + t\nu(x)) > 0$ und $f(x - t\nu(x)) < 0$. Daraus folgt (3.14).

□

Die Divergenz eines Vektorfeldes

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung, d.h., F ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Es sei $F = (F_1 \dots, F_n)$, wobei $F_i : U \to \mathbb{R}$ die i-te Komponente von F ist.

Definition 3.21. *Die Divergenz* $\operatorname{div} F$ *von* F *ist definiert durch*

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Die Divergenz $\operatorname{div} F$ ist also eine stetige Funktion auf U.

Satz 3.22. *(Gaußscher Integralsatz)*
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes* C^1*-Polyeder und* $F : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ *ein Vektorfeld mit folgenden Eigenschaften:*
1) F *ist stetig auf* $\overline{G}$ *und stetig differenzierbar auf* G*;*
2) Die Funktion $\operatorname{div} F : G \to \mathbb{R}$ *ist integrierbar;*

3) Die Funktion

$$x \in \partial_r G \longmapsto \langle F(x), \nu(x)\rangle \in \mathbb{R}$$

ist integrierbar bezüglich des auf $\partial_r G$ induzierten Maßes $dS := d\lambda_{\partial_r G}$. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} F(x)dx = \int_{\partial_r G} \langle F(y), \nu(x)\rangle dS.$$

Der Beweis des Integralsatzes geschieht in mehreren Schritten. Zunächst beweist man den Satz für Vektorfelder, deren Träger in einem offenen Quader Q liegt. Dann erweitert man den Satz auf Vektorfelder, deren Träger in einer beliebigen kompakten Teilmenge von $\overline{G} \setminus \partial_s G$ enthalten ist. Den allgemeinen Fall reduziert man darauf, indem man $\overline{G} \setminus \partial_s G$ durch kompakte Teilmengen ausschöpft und den Satz von Lebesgue anwendet.
Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze. Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}}$$

der Träger der Funktion f.

Lemma 3.23. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Weiter seien f, g stetig differenzierbare Funktionen auf U und der Träger* $\operatorname{supp} g$ *von g sei kompakt. Dann gilt für alle $k = 1, \ldots, n$:*

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) g(x)dx = -\int_U f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)dx.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $g = 0$ außerhalb einer kompakten Teilmenge von U. Wir können deshalb $(\partial_k f)g$, $f(\partial_k g)$ durch Null zu stetigen und fg zu einer stetig differenzierbaren Funktion fortsetzen. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) g(x)dx_k = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)dx_k.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) g(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x)dx.$$

Daraus folgt die Behauptung.

□

Lemma 3.24. *Es sei $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein offener Quader, $h : Q' \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion, Γ der Graph von h und Z eine der beiden offenen Mengen*

$$\{(x', x_n) \in Q' \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x')\}$$

oder

$$\{(x', x_n) \in Q' \times \mathbb{R} \mid x_n > h(x')\}\,.$$

Weiter sei $F = (F_1, \dots, F_n)$ ein Vektorfeld auf $\overline{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:
1) F ist stetig auf $\overline{Z}$ und stetig differenzierbar auf Z;
2) $\operatorname{div} F$ ist über Z integrierbar;
3) Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset Z \cup F$ so, daß $F(x) = 0$ für alle $x \in Z \setminus K$. Dann gilt

$$\int_Z \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial Z} \langle F(y), \nu(y) \rangle dS.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für den Fall, daß

$$Z = \{(x', x_n) \in Q' \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x')\}.$$

Es sei $\epsilon > 0$ und

$$Z_\epsilon := \{(x', x_n) \in Z \mid x_n < h(x') - \epsilon\}.$$

Dann wird Z durch die offenen Mengen Z_ϵ, $\epsilon > 0$, ausgeschöpft und nach Voraussetzung ist F auf jeder dieser offenen Mengen stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} \int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\, dx &= \sum_{k=1}^n \int_{Z_\epsilon} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x', x_n)\, dx_n \right) dx'. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Wir bezeichnen den k-ten Summanden in der rechten Summe mit I_k. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n = F(x', h(x') - \epsilon),$$

und daher ist

$$I_n = \int_{Q'} F_n(x', h(x') - \epsilon)\, dx'. \tag{3.17}$$

Es sei $k \leq n-1$. Wenn wir die Kettenregel auf die Funktion

$$\phi_k(x') = \int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} F_k(x', x_n)\, dx_n$$

anwenden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} F_k(x', x_n)\, dx_n\right) &= \int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x', x_n)\, dx_n \\ &\quad + F_k(x', h(x') - \epsilon)\frac{\partial h}{\partial x_k} x'. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Es sei $g : Q' \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x') = \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} F_k(x', x_n)\, dx_n\right).$$

Nach Voraussetzung ist $F_k(x', x_n) = 0$ für (x', x_n) außerhalb einer kompakten Menge $K \subset Q' \times \mathbb{R}$. Daher ist $g(x') = 0$ für x' außerhalb einer kompakten Menge $K' \subset Q'$. Es sei $f \equiv 1$. Aus Lemma 3.23 folgt dann

$$\int_{Q'} \frac{\partial g}{\partial x_k}(x')\, dx' = \int_{Q'} f(x')\frac{\partial g}{\partial x_k}(x')\, dx' = -\int_{Q'} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x') g(x')\, dx' = 0.$$

Daher ist

$$\int_{Q'} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} F_k(x', x_n)\, dx_n\right) dx' = 0$$

und aus (3.18) folgt

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{Q'} \left(\int_{-\infty}^{h(x')-\epsilon} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x', x_n)\, dx_n\right) dx' \\ &= -\int_{Q'} F_k(x', h(x') - \epsilon)\frac{\partial h}{\partial x_k}(x')\, dx'. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Es sei

$$N(x') := \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(x'), ..., -\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(x'), 1\right).$$

Durch Einsetzen von (3.17) und (3.18) in (3.16) erhalten wir

$$\int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{Q'} \langle F(x', h(x') - \epsilon), N(x')\rangle\; dx'. \tag{3.20}$$

Wir bilden jetzt den Grenzwert für $\epsilon \to 0$ beider Seiten dieser Gleichung. Wir beginnen zunächst mit der linken Seite. Nach Voraussetzung ist $\operatorname{div} F$ stetig und über Z integrierbar. Daher ist

$$\int_Z |\operatorname{div} F(x)|\; dx < \infty.$$

Es sei χ_ϵ die charakteristische Funktion von Z_ϵ in Z. Dann gilt

$$\int_Z \left|\chi_\epsilon(x) \operatorname{div} F(x)\right|\; dx = \int_{Z_\epsilon} |\operatorname{div} F(x)|\; dx \le \int_Z |\operatorname{div} F(x)|\; dx < \infty.$$

Die Folge $\left(\chi_{1/k} \operatorname{div} F\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton wachsende Folge von Funktionen auf Z, die punktweise gegen $\operatorname{div} F$ konvergiert. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über monotone Konvergenz erfüllt und es folgt

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\; dx = \int_Z \operatorname{div} F(x)\; dx.$$

Für den Grenzübergang auf der rechten Seite bemerken wir als erstes, daß $\phi(x', \epsilon) := \langle F(x', h(x') - \epsilon), N(x')\rangle$ eine stetige Funktion auf $Q' \times [0, \infty)$ ist, deren Träger kompakt ist. Daher ist der Grenzwert für $\epsilon \to 0$ mit dem Integral vertauschbar und wir erhalten

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{Q'} \langle F(x', h(x') - \epsilon), N(x')\rangle\; dx' = \int_{Q'} \langle F(x', h(x')), N(x')\rangle\; dx'.$$

Auf Grund der Definition von $N(x')$ ist $N(x') \neq 0$ für alle $x' \in Q'$. Es sei

$$\nu(x', x_n) = \frac{N(x')}{\| N(x') \|}, \quad (x', x_n) \in Q' \times [0, \infty).$$

Dann ist

$$\int_{Q'} \langle F(x', h(x')), N(x')\rangle\; dx'$$
$$= \int_{Q'} \langle F(x', h(x')), \nu(x')\rangle \;\| N(x') \|\; dx' \tag{3.21}$$

Weiter sei $f(x', x_n) = x_n - h(x')$. Dann ist $f : Q' \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und es gilt

$$\operatorname{grad} f(x', x_n) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x_1}(x'), ..., -\frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}(x'), 1 \right) = N(x')$$

für alle $(x', x_n) \in Q' \times \mathbb{R}$. Die Menge Z ist dann definiert durch

$$Z = \{(x', x_n) \in Q' \times \mathbb{R} \mid f(x', x_n) < 0\}$$

und ∂Z ist der Graph Γ von h. Damit ist $\nu(x', x_n)$ für $(x', x_n) \in \partial Z$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld an Z. Weiter folgt aus ?, daß

$$dS = \| N(x') \| \; dx'$$

ist. Damit ist die rechte Seite von (3.21) gleich

$$\int_\Gamma \langle F(x'), \nu(x') \rangle \, dS.$$

Da F in $\partial Z \setminus \Gamma$ verschwindet, können wir Γ durch ∂Z ersetzen und erhalten

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{Q'} \langle F(x'), h(x') - \epsilon), N(x') \rangle \, dx' = \int_{\partial Z} \langle F, \nu \rangle \, dS.$$

Damit haben wir gezeigt, daß aus (3.20) durch den Grenzübergang $\epsilon \to 0$ die behauptete Gleichung folgt.

□

Lemma 3.25. *Der Gaußsche Integralsatz gilt unter der zusätzlichen Voraussetung, daß eine kompakte Menge $K \subset \overline{G}$ existiert mit 1)$K \cap \partial_s G = \emptyset$ 2) $F(x) = 0$ für alle $x \in \overline{G} \setminus K$.*

Beweis: Für jedes $a \in K$ sei U_a eine offene Umgebung von a mit:
1) Wenn $a \in G$, so ist $U_a = G$.
2) Wenn $a \in \partial_r G$, so sei U_a eine Quaderumgebung wie in Lemma 3.19.
Da K kompakt ist, existieren $a_1, \dots, a_s \in K$ so, daß

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{s} U_{a_j}.$$

Es seien $\psi_1, \dots, \psi_s \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit

1) $\psi_1(x) + \cdots + \psi_s(x) = 1$ für alle $x \in K$.
2) Sei $K_i = \operatorname{supp} \psi_i$ der Träger von ψ_i. Dann ist K_i kompakt und $K_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, s$.

Sei

$$F_i := \psi_i F.$$

Die $F_i : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ sind Vektorfelder, für die gilt:

i) $F_1(x) + \cdots + F_s(x) = F(x)$ für alle $x \in \overline{G}$;
ii) $F_i(x) = 0$ für alle $x \in \overline{G} \setminus (K \cap K_i)$.

Fall 1: Sei $U_i = G$. Dann ist

$$\int_G \operatorname{div} F_i(x)\, dx = \int_{\partial G} \langle F_i, \nu \rangle \, dS, \tag{3.22}$$

denn nach Voraussetzung ist $F_i(x) = 0$ für $x \in U_i \setminus K_i$ und daher ist insbesondere $F_i(x) = 0$ für $x \in \partial G$. Daraus folgt

$$\int_{\partial G} \langle F_i, \nu \rangle \, dS = 0.$$

Andererseits folgt aus Lemma 3.23, daß $\int_G \operatorname{div} F_i(x)\, dx = 0$ ist.

Fall 2: U_i sei eine Quaderumgebung wie in Lemma 3.19 des Randpunktes $a_i \in \partial_r G$.
Dann folgt aus Lemma 3.24, daß (3.22) ebenfalls gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_G \operatorname{div} F(x)\, dx = \sum_{i=1}^{s} \int_G \operatorname{div} F_i(x)\, dx &= \sum_{i=1}^{s} \int_{\partial G} \langle F_i, \nu \rangle \, dS \\ &= \int_{\partial G} \langle F, \nu \rangle \, dS.\end{aligned}$$

□

Zum Beweis des Gaußschen Integralsatzes benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 3.26. *Es seien $W \subset W^* \subset \mathbb{R}^n$ konzentrische Würfel mit den Kantenlängen r bzw. $2r$. Dann existiert eine C^1-Funktion p auf $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $0 \le p \le 1$ *auf* $\mathbb{R}^n$*;*
2) $p = 1$ *auf* W*;*
3) $p = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n \setminus W^*$*;*
4) $\| \operatorname{grad} p \| \le \frac{c}{r} \cdot 1_{W^*}$*, wobei c eine von W unabhängige Konstante ist.*

Beweis: Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine C^1-Funktion mit $\varphi = 1$ auf $[-1,1]$ und $\varphi = 0$ in $\mathbb{R} \setminus [-2,2]$. Es sei $a = (a_1, \ldots, a_n)$ der Mittelpunkt von W. Wir setzen

$$p(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2}{r}(x_k - a_k)\right).$$

Für p gilt offenbar 1), 2) und 3). Weiter ist

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x_k}(x)\right| \leq \frac{2}{r}\left|\varphi'\left(\frac{2}{r}(x_k - a_k)\right)\right|.$$

Daraus folgt

$$\| \operatorname{grad} p(x) \|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial x_k}(x)\right)^2 \leq \frac{4n}{r} \sup_{x\in[-2,2]} |\varphi'(x)|^2.$$

□

Beweis des Integralsatzes: Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da G beschränkt ist, ist der singuläre Rand $\partial_s G$ abgeschlossen und beschränkt, d.h., $\partial_s G$ ist kompakt. Es existieren daher endlich viele offene Würfel $W_1, \ldots, W_m$ mit den Kantenlängen $r_1, \ldots, r_m$ so, daß

$$\partial_s G \subset \bigcup_{k=1}^{m} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{m} r_k^{n-1} < \epsilon. \tag{3.23}$$

Weiter sei W_k^* der zu W_k konzentrische offene Würfel mit der Kantenlänge $2r_k$. Gemäß Lemma 3.26 wählen wir C^1-Funktionen $p_1, \ldots, p_m$ auf $\mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $0 \leq p_k \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n$;
2. $p_k = 1$ auf W_k;
3. $p_k = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus W_k^*$;
4. $\| \operatorname{grad} p_k \| \leq \frac{c}{r} \cdot 1_{W_k^*}$, wobei die Konstante c nur von n abhängt.

Wir bemerken, daß $m = m(\epsilon)$, $W_1, \ldots, W_m$ und $p_1, \ldots, p_m$ von $\epsilon > 0$ abhängen. Es sei

$$\psi_\epsilon := \prod_{k=1}^{m}(1 - p_k).$$

Dann ist $\psi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gilt

i) $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$ auf $\mathbb{R}^n$;

ii) $\psi_\epsilon = 0$ auf $W_1 \cup \cdots \cup W_m$;

iii) $\psi_\epsilon = 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus (W_1^* \cup \cdots \cup W_m^*)$. Insbesondere ist $\psi_\epsilon(x) = 1$, falls

$$d(x, \partial_s G) > 2\sqrt{n}\epsilon^{1/(n-1)} \geq 2\sqrt{n} \cdot \max\{r_1, \ldots, r_m\}.$$

iv) $\| \operatorname{grad} \psi_\epsilon \| \leq c \cdot \sum_{k=1}^m \dfrac{1}{r_k} \cdot 1_{W_k^*}$.

v) $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \psi_\epsilon(x) = 1$ in jedem Punkt $x \in \overline{G} \setminus \partial_s G = G \cup \partial_r G$.

Die Eigenschaften i), ii) und iii) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften 1), 2) und 3) der p_k. Beim Zusatz in iii) muß man (3.23) berücksichtigen. Eigenschaft iv) folgt aus 4), da

$$\| \operatorname{grad} \psi_\epsilon \| = \left\| \sum_{k=1}^m \left(\operatorname{grad}(1 - p_k) \cdot \prod_{i \neq k} (1 - p_i) \right) \right\| \leq \sum_{k=1}^m \| \operatorname{grad} p_k \|$$

Eigenschaft v) folgt aus dem Zusatz in iii).

Es sei

$$F_\epsilon := \psi_\epsilon \cdot F.$$

Außerhalb der kompakten Menge $\overline{G} \setminus (W_1 \cup \cdots \cup W_m)$ in $\overline{G} \setminus \partial_s G$ ist dieses Vektorfeld Null. Aus Lemma 3.25 folgt daher

$$\int_G \operatorname{div} F_\epsilon(x)\, dx = \int_{\partial G} \langle F_\epsilon, \nu \rangle\, dS. \tag{3.24}$$

Wir bilden jetzt den Grenzwert für $\epsilon \to 0$ beider Seiten dieser Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F_\epsilon = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi_\epsilon F_i)}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_\epsilon}{\partial x_i} \cdot F_i + \psi_\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \\ &= \langle \operatorname{grad} \psi_\epsilon, F \rangle + \psi_\epsilon \operatorname{div} F. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung 2) des Integralsatzes ist $|\operatorname{div} F|$ über G integrierbar und für jedes $\epsilon > 0$ ist

$$|\psi_\epsilon \operatorname{div} F| \leq |\operatorname{div} F|.$$

Weiterhin konvergiert wegen v) die Funktion $\psi_\epsilon \operatorname{div} F$ auf G punktweise gegen $\operatorname{div} F$. Damit gilt auf Grund des Satzes über dominante Konvergenz (Satz 2.52)

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_G \psi_\epsilon(x) \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_G \operatorname{div} F(x)\, dx.$$

Da nach Voraussetzung F stetig auf $\overline{G}$ und $\overline{G}$ kompakt ist, existiert $C > 0$ mit

$$\| F(x) \| \leq C \quad \text{für alle } x \in G.$$

Aus iv) und (3.23) folgt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_G \langle \operatorname{grad} \psi_\epsilon(x), F(x) \rangle dx \right| &\leq \int_G \| \operatorname{grad} \psi_\epsilon(x) \| \| F(x) \| \, dx \\ &\leq Cc \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{r_k} \int_G 1_{W_k^*} dx \\ &= Cc \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{r_k} \operatorname{Vol}(W_k^*) \\ &= Cc2^n \sum_{k=1}^m r_k^{n-1} \leq Cc2^n \epsilon. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_G \langle \operatorname{grad} \psi_\epsilon(x), F(x) \rangle dx = 0$$

und wir erhalten

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_G \operatorname{div} F_\epsilon \, dx = \int_G \operatorname{div} F(x) \, dx.$$

Wir betrachten jetzt das Integral auf der rechten Seite von (3.24). Es ist

$$|\langle F_\epsilon, \nu \rangle| = \psi_\epsilon |\langle F, \nu \rangle|.$$

Da nach Voraussetzung 3) des Integralsatzes $|\langle F, \nu \rangle|$ über $\partial_r G$ integrierbar ist, ist $|\langle F, \nu \rangle|$ eine integrierbare Majorante für die Funktionen $\langle F_\epsilon, \nu \rangle$. Daher kann der Satz über dominante Konvergenz angewendet werden und es folgt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\partial_r G} \langle F_\epsilon(x), \nu(x) \rangle \, dS = \int_{\partial_r G} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS.$$

Damit ist der Integralsatz bewiesen.

□

3.3. **Die Greensche Formel.** Wird noch ergänzt.

4. Pfaffsche Formen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei eine differenzierbare Funktion. Für jedes $x \in U$ ist das Differential $df(x)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, d.h., $df(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$df : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Dies verallgemeinern wir wie folgt:

Definition 4.1. *Eine* **Pfaffsche Form** *oder* **Differentialform ersten Grades** *(kurz: 1-Form) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung*

$$\omega : U \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}).$$

Für jedes $x \in U$ ist $\omega(x)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}.$$

Die 1-Form ω heißt **reell**, wenn für alle $x \in U$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ die Zahl $\omega(x)(h)$ reell ist.

Beispiele von 1-Formen sind die Differentiale df differenzierbarer Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$. Für $x \in U$ ist die lineare Abbildung $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ erhält man eine eineindeutige Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und reellen 1-Formen. Wenn $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf U ist, so ordnet man v die 1-Form ω_v zu, die definiert ist durch

$$\omega_v(x)(h) = \langle v(x), h \rangle.$$

Es sei umgekehrt ω eine reelle 1-Form auf U und sei $x \in U$. Dann existiert zu der linearen Abbildung $\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmter Vektor $v_\omega(x) \in \mathbb{R}^n$ so, daß

$$\omega(x)(h) = \langle v_\omega(x), h \rangle$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$v_\omega : x \in U \longmapsto v_\omega(x) \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist das eindeutig bestimmte Vektorfeld, daß ω zugeordnet ist. Die Zuordnungen $v \longmapsto \omega_v$ und $\omega \longmapsto v_\omega$ sind invers zueinander.
Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $v = \operatorname{grad} f$ das Gradientenvektorfeld. Dann gilt

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle \operatorname{grad} f, h \rangle.$$

Daraus folgt, daß bezüglich obiger Zuordnung $\operatorname{grad} f$ und df einander entsprechen.
Es seien $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, die Koordinatenfunktionen, d.h.,

$$x_i(h_1, \ldots, h_n) = h_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

Für das Differential dx_i an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann

$$dx_i(x)(h) = h_i.$$

Es sei ω eine 1-Form auf einer offenen Menge U. Weiter sei

$$a_i(x) := \omega(x)(e_i), \quad x \in U,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standardbasis bezeichnet. Die a_i sind dann komplexwertige Funktionen und es gilt

$$\omega(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) h_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i(x)(h).$$

Dafür schreibt man

$$\boxed{\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n.}$$

Die Funktionen $a_1, \ldots, a_n$ heißen die **Koeffizienten** der 1-Form ω bezüglich $dx_1, \ldots, dx_n$.
Beispiele: 1) Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion und $\omega = df$. Dann folgt aus der Definition der Koeffizienten a_i von ω:

$$a_i(x) = df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Damit ist

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}$$

die Darstellung von df bezüglich $dx_1, \dots, dx_n$.
2) Es sei $v = (v_1, \dots, v_n) : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und ω_v die 1-Form, die v zugeordnet ist. Dann ist

$$a_i(x) = \langle v(x), e_i \rangle = v_i(x).$$

und

$$\omega_v = v_1 dx_1 + \cdots + v_n dx_n.$$

Wichtige Vektorfelder sind das Windungsfeld W auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und das Gravitationsfeld G auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} W(x,y) &= \frac{1}{r^2}(-y,x), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ G(x,y) &= -\frac{1}{r^3}(x,y,z), \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Diesen Fällen entsprechen die 1-Formen.

$$\begin{aligned} \omega_W &= \frac{1}{r^2}(-ydx + xdy) && \text{(Windungsform)} \\ \omega_G &= -\frac{1}{r^3}(xdx + ydy + zdz) && \text{(Gravitationsform).} \end{aligned}$$

Definition 4.2. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine 1-Form ω auf U heißt* **stetig** *bzw.* **von der Klasse** C^k, *wenn die Abbildung*

$$\omega : U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

stetig bzw. von der Klasse C^k ist.

Für $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ gilt dies genau dann, wenn die Koeffizienten $a_1, \dots, a_n$ stetig bzw. von der Klasse C^k sind.