

AUTOMORPHE FORMEN UND L -FUNKTIONEN[†]

WERNER MÜLLER

0. EINLEITUNG

L -Funktionen spielen gegenwärtig in der zahlentheoretischen Forschung eine zentrale Rolle. Es handelt sich dabei um analytische Funktionen, die als Euler-Produkte vom Grad $m \geq 1$

$$L(s) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s) \quad (0.1)$$

definiert sind, wobei \mathfrak{p} alle Primstellen eines Zahlkörpers F durchläuft. Die lokalen Faktoren $L_{\mathfrak{p}}(s)$ sind assoziiert mit lokalen Daten entweder eines arithmetisch-geometrischen Objektes wie z.B. einer algebraischen Varietät über \mathbb{Q} oder mit einer automorphen Form und haben im allgemeinen die Form

$$L_{\mathfrak{p}}(s) = \prod_{j=1}^m (1 - \alpha_j(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

wobei die $\alpha_j(\mathfrak{p})$ komplexe Zahlen sind und $N(\mathfrak{p})$ die Norm von \mathfrak{p} bezeichnet. Die L -Funktionen, die durch automorphe Formen definiert sind, nennt man automorphe L -Funktionen. Ein wesentlicher Grund für das Interesse an den L -Funktionen ist die (begründete) Hoffnung, daß sich aus der Untersuchung dieser Funktionen wichtige neue Erkenntnisse für die Zahlentheorie ergeben. Genauer gesagt vermutet man, daß alle arithmetischen und automorphen L -Funktionen eine analytische Fortsetzung besitzen und einer Funktionalgleichung genügen. Man erwartet dann z.B., daß das Verhalten der analytisch fortgesetzten Funktionen in speziellen Punkten wichtige globale Informationen über die zugrunde liegenden arithmetischen Objekte enthält. Wir erläutern dies genauer anhand einiger Beispiele.

[†]Vortrag gehalten anlässlich des 100. Geburtstages der Berliner Mathematischen Gesellschaft

Date: Aug., 2001.

1) Der Prototyp einer L -Funktion ist die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Bekanntlich besitzt $\zeta(s)$ eine analytische Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion auf ganz \mathbb{C} und genügt einer Funktionalgleichung. Die berühmte Riemannsche Vermutung besagt, daß alle im kritischen Streifen $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ enthaltenen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ liegen. Wie Riemann in [R] gezeigt hat, hat die Richtigkeit dieser Vermutung bedeutende Konsequenzen für die Verteilung der Primzahlen.

2) Weitere Beispiele sind Dirichletsche L -Reihen. Es sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo m , d.h., eine multiplikative Funktion $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch einen Charakter von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ definiert ist. Die mit χ assoziierte L -Reihe ist dann definiert als

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

Genauso wie die Riemannsche Zetafunktion besitzt $L(s, \chi)$ eine analytische Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} und genügt einer Funktionalgleichung. Dirichlet hat diese Reihen für den Beweis seines berühmten Satzes über die Anzahl der Primzahlen in einer arithmetischen Progression benutzt [Di, pp. 313-342]. Entscheidend für den Beweis von Dirichlets Satz ist das Nichtverschwinden der Funktionen $L(s, \chi)$ auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1$.

Dirichlets Beweis der analytischen Klassenzahlformel für reell quadratische Zahlkörper beruht ebenfalls auf der Anwendung von L -Reihen. In diesem Falle ist das Verhalten der L -Reihen im Punkte $s = 1$ von Bedeutung.

3) Ein typisches Beispiel einer arithmetischen L -Funktion ist die L -Funktion einer elliptischen Kurve E , die über \mathbb{Q} definiert ist. Es sei E gegeben durch eine Weierstraßsche Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

$a, b \in \mathbb{Q}$. Für jede Primzahl p existiert für E ein "Néronisches Modell" E_p , welches mit E über \mathbb{Q}_p birational äquivalent ist [Ne]. E_p ist gegeben durch eine Gleichung

$$Y^2 + \lambda XY + \mu Y = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

mit Koeffizienten aus \mathbb{Z}_p . Wenn man diese Gleichung modulo p reduziert, so erhält man die Gleichung einer irreduziblen Kurve \overline{E}_p über

dem Körper \mathbf{F}_p . Wenn E an der Stelle p gute Reduktion hat, d.h., \overline{E}_p ist eine nichtsinguläre elliptische Kurve, dann sei $\overline{E}_p(\mathbf{F}_p)$ die Menge der \mathbf{F}_p -rationalen Punkte der Kurve \overline{E}_p und $a_p = p + 1 - \#\overline{E}_p(\mathbf{F}_p)$. Wir setzen dann

$$L_p(s, E) = (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}.$$

An den Stellen schlechter Reduktion kann ebenfalls ein lokaler L -Faktor definiert werden. Wenn \overline{E}_p einen gewöhnlichen Doppelpunkt hat, so ist

$$L_p(s, E) = (1 - \varepsilon_p p^{-s})^{-1},$$

wobei $\varepsilon_p \in \{1, -1\}$. Und zwar ist $\varepsilon_p = 1$ oder $\varepsilon_p = -1$, je nachdem ob die Tangenten am Doppelpunkt rational über \mathbf{F}_p sind oder nicht. Wenn \overline{E}_p eine Spitze hat, so ist $L_p(s, E) = 1$. Die L -Funktion $L(s, E)$ von E ist dann definiert durch

$$L(s, E) = \prod_p L_p(s, E).$$

Das Euler-Produkt ist absolut konvergent in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$. Inzwischen ist bekannt, daß jede für jede elliptische Kurve E/\mathbb{Q} die L -Funktion $L(s, E)$ eine analytische Fortsetzung hat und eine Funktionalgleichung erfüllt. Das Verhalten im Punkte $s = 1/2$ ist dann von besonderem Interesse. Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer besagt, daß die Ordnung der Nullstelle von $L(s, E)$ in $s = 1/2$ übereinstimmt mit dem Rang der Gruppe der \mathbb{Q} -rationalen Punkte von E .

4) Seit Hecke [H] ist die Theorie der L -Funktionen eng verknüpft mit der Theorie der automorphen Formen. Automorphe Formen im klassischen Sinne sind holomorphe Funktionen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} , die sich bezüglich einer Untergruppe $\Gamma \subset \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ von endlichem Kovolumen einfach transformieren. Als Beispiel betrachten wir die Hecksche Kongruenzuntergruppe. Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Eine klassische $\Gamma_0(N)$ -automorphe Form vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion f auf der oberen Halbebene \mathbb{H} , für die gilt:

- (1) $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$.
- (2) f ist holomorph in jeder Spitze von $\Gamma_0(N)$.

Wenn f in jeder Spitze von $\Gamma_0(N)$ verschwindet, so heißt f automorphe Spitzenform. Eine solche Funktion hat eine Fourierentwicklung der

Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}.$$

Es sei

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Dann besitzt $L(s, f)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} und genügt einer Funktionalgleichung. Dies ist der Prototyp einer automorphen L -Funktion. Wie Hecke gezeigt hat, besitzt $L(s, f)$ eine Darstellung als Euler-Produkt genau dann, wenn f eine Eigenfunktion aller Hecke-Operatoren T_p ist. Dabei operiert T_p auf f durch

$$(T_p f)(z) = p^{k-1} \sum_{\substack{a>0 \\ ad=p}}^{d-1} \sum_{b=0} f\left(\frac{az+b}{d}\right) d^{-k}$$

Wenn $T_p f = c_p f$ für alle p ist und $a_1 = 1$, so ist

$$L(s, f) = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Damit ergibt sich eine neue Klasse von Euler-Produkten, die z.B. die Zetafunktionen imaginär quadratischer Zahlkörper enthält.

5) Der Versuch, Heckes Theorie so zu erweitern, daß die entsprechenden Euler-Produkte Dirichletsche Reihen mit Größencharakteren für reell quadratische Körper enthalten, führte Maaß [Ma] auf die Entdeckung nicht-holomorpher automorpher Formen. Es handelt sich dabei um C^∞ -Funktionen f auf der oberen Halbebene, die invariant bezüglich $\Gamma_0(N)$ sind und die Eigenfunktionen des hyperbolischen Laplace-Operators

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (0.2)$$

sind. So ist z.B. eine Maaßsche Spitzenfunktion für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine C^∞ -Funktion f auf \mathbb{H} , für die gilt

- a) $f(\gamma z) = f(z)$ für alle $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$;
- b) $\Delta f = \lambda f$ für ein $\lambda > 1/4$;
- c) $\int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} |f(x+iy)|^2 y^{-2} dx dy < \infty$.

Mit anderen Worten, f ist eine L^2 -Eigenfunktion von Δ , wobei Δ als Operator in $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ aufgefaßt wird. Da das kontinuierliche Spektrum der selbstadjungierten Erweiterung von Δ das Intervall $[1/4, \infty)$ ist, sind die Eigenwerte zu den Spitzenformen in das stetige Spektrum eingebettet und daher sehr schwer zu studieren.

Wir nehmen zusätzlich an, daß f eine gerade Funktion ist, d.h., es gilt $f(-\bar{z}) = f(z)$. Dann kann f bezüglich x in eine Fourier-Reihe der folgenden Form entwickelt werden

$$f(x + iy) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{y} K_{ir}(2\pi ny) \cos(2\pi nx),$$

wobei $K_s(y)$ die modifizierte Besselfunktion bezeichnet und $\lambda = 1/4 + r^2$. Die f zugeordnete L -Funktion ist dann definiert durch

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Diese L -Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung und genügt einer Funktionalgleichung. Um als Euler-Produkt darstellbar zu sein, muß f Eigenfunktion der entsprechenden Hecke-Operatoren sein. Diese sind definiert durch

$$(T_p f)(z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\substack{a>0 \\ ad=p}}^{d-1} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Die Eigenräume von Δ sind invariant unter den Hecke-Operatoren. Es sei $T_p f = c_p f$ für alle p und f sei normiert durch $a_1 = 1$. Dann ist

$$L(s, f) = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + p^{-2s})^{-1}.$$

6) In der modernen Theorie der automorphen Formen ist der Begriff der automorphen Formen wesentlich weiter gefaßt. Anstelle von \mathbb{H} und $\Gamma_0(N)$ betrachtet man jetzt allgemein einen irreduziblen symmetrischen Raum $X = G/K$ vom nichtkompakten Typ und eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset G$, so daß $\text{Vol}(\Gamma \backslash G) < \infty$ gilt. Automorphe Funktionen bezüglich Γ sind dann C^∞ -Funktionen $f : \Gamma \backslash X \rightarrow \mathbb{C}$, die gemeinsame Eigenfunktionen des Ringes der invarianten Differentialoperatoren sind und die höchstens schwach wachsen. Automorphe Funktionen sind also unmittelbar verknüpft mit der Spektralzerlegung des Ringes der invarianten Differentialoperatoren auf G/K . Wenn man Γ -invariante Schnitte in einem beliebigen homogenen Vektorraum $E \rightarrow G/K$ einbezieht, so erhält man automorphe Formen im allgemeinen.

Durch Übergang zum darstellungstheoretischen Standpunkt gelangt man zum allgemeinen Begriff einer automorphen Darstellung. Damit Hecke-Operatoren mit einbezogen werden können, ist es geeignet, mit adelischen Gruppen zu arbeiten. Wir betrachten den Fall $G = \text{GL}_n$,

$n \geq 1$. Es sei

$$\mathbb{A} = \prod'_{p \leq \infty} \mathbb{Q}_p$$

der Ring der Adèle von \mathbb{Q} . \mathbb{A} besteht aus allen Folgen (α_p) mit $\alpha_p \in \mathbb{Q}_p$ und $\alpha_p \in \mathbb{Z}_p$ für fast alle $p < \infty$. Entsprechend sei

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \prod'_{p \leq \infty} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

die Gruppe der \mathbb{A} -wertigen Punkte, wobei \prod' bedeutet, daß fast alle Komponenten g_p einer eines Elementes $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ liegen. Eine Funktion $\phi \in L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ heißt Spitzenfunktion, wenn für alle Blockzerlegungen von $n \times n$ Matrizen und fast alle $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ gilt

$$\int \phi \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} g \right) dX = 0,$$

wobei X eine $n_1 \times n_2$ Matrix mit $n_1 + n_2 = n$ und adèlichen Einträgen ist. Es sei $L_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ der Unterraum der Spitzenfunktion. Dies ist ein invarianter Unterraum der rechtsregulären Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ in $L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$. Eine automorphe Spitzendarstellung π von GL_n ist eine irreduzible unitäre Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, die äquivalent ist zu einer Teildarstellung der rechtsregulären Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ in $L_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$. Dann gilt $\pi \cong \otimes \pi_p$, wobei π_p eine irreduzible unitäre Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ für $p < \infty$ und von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für $p = \infty$ ist.

Weiterhin ist für fast alle p die Darstellung π_p unverzweigt, d.h., π_p besitzt einen von Null verschiedenen Vektor, der invariant ist unter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$. Die Standard L -Funktion $L(s, \pi)$, die mit π assoziiert ist, ist ein Euler-Produkt vom Grade n

$$L(s, \pi) = \prod_{p < \infty} L(s, \pi_p),$$

wobei

$$L(s, \pi_p) = \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_{j,\pi}(p) p^{-s})^{-1} \quad (0.3)$$

ist und die Zahlen $\{\alpha_{j,\pi}(p)\}_{j=1}^n$ durch die lokale Darstellung π_p bestimmt sind. An der Stelle $p = \infty$ ist der lokale Faktor $L(s, \pi_\infty)$ ein Produkt von Gamma-Funktionen. Wenn π_∞ unverzweigt ist, so ist $L(s, \pi_\infty)$

von der Form

$$L(s, \pi_\infty) = \pi^{-ns/2} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{s - \mu_j(\pi_\infty)}{2}\right).$$

Die L -Funktion $L(s, \pi)$ hat ebenfalls eine analytische Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} und genügt der Funktionengleichung

$$L(s, \pi_\infty)L(s, \pi) = W_\pi q_\pi^{s-1/2} L(1-s, \tilde{\pi}_\infty)L(1-s, \tilde{\pi}),$$

wobei $q_\pi \in \mathbb{N}$ der Führer von π , $|W_\pi| = 1$ und $\tilde{\pi}$ die kontragrediente Darstellung zu π ist.

Aus den Standard L -Funktionen kann man durch einfache Operationen wie z.B. Bildung von Tensorprodukten neue L -Funktionen konstruieren. So z.B. die Rankin-Selberg L -Funktionen. Es seien π_1 und π_2 automorphe Spitzendarstellungen von $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{A})$. Wenn $\pi_{1,p}$ und $\pi_{2,p}$ beide in p unverzweigt sind, so ist der lokale L -Faktor der Rankin-Selberg L -Funktion $L(s, \pi_1 \otimes \pi_2)$ definiert durch

$$L(s, \pi_{1,p} \otimes \pi_{2,p}) = \prod_{j=1}^{n_1} \prod_{k=1}^{n_2} (1 - \alpha_{j,\pi_1}(p)\alpha_{k,\pi_2}(p)p^{-s})^{-1},$$

wobei die Zahlen $\{\alpha_{j,\pi_i}(p)\}$ durch (0.3) gegeben sind. Die analytischen Eigenschaften der Rankin-Selberg L -Funktionen sind vollständig bekannt [JPS], [Sh2]. Insbesondere hat $L(s, \pi_1 \otimes \pi_2)$ eine analytische Fortsetzung und erfüllt eine Funktionengleichung.

Andere Beispiele sind die L -Funktionen $L(s, \mathrm{sym}^n \pi)$ zu n -fachen symmetrischen Potenzen einer Spitzendarstellung π von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. An den unverzweigten Stellen p ist der lokale L -Faktor gegeben durch

$$L(s, \mathrm{sym}^n \pi_p) = \prod_{j=0}^n (1 - (\alpha_{1,\pi}(p))^j (\alpha_{2,\pi}(p))^{n-j} p^{-s})^{-1}.$$

Die allgemeinen Vermutungen von Langlands [L] besagen nun, daß alle arithmetischen und automorphen L -Funktionen Produkte der Standard L -Funktionen $L(s, \pi)$ sind. Dies impliziert insbesondere, daß jede dieser L -Funktionen eine analytische Fortsetzung hat und eine Funktionengleichung erfüllt. Aus den Resultaten von Wiles [Wi] und [TW] folgt z.B. daß jede über \mathbb{Q} definierte elliptische Kurve E modular ist, d.h., es existiert eine holomorphe Spitzenform ϕ vom Gewicht 2 bezüglich einer Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so daß die L -Funktion $L(s, E)$ der elliptischen Kurve (siehe Beispiel 3) mit der automorphen L -Funktion $L(s, \phi)$ übereinstimmt.

Das Ziel dieses Artikels ist es, einige Aspekte der Theorie der automorphen Formen und L -Funktionen zu erläutern. Es gibt verschiedene

Einführungen in das Langlands-Programm [A4], [AG], [Ge], [Kn], die wir dem Leser zur weiterführenden Lektüre empfehlen. Hier werden wir uns vor allem mit den analytischen Aspekten beschäftigen.

In §1 beschäftigen wir uns mit der Riemannschen Zetafunktion. Wir erläutern einige ihrer wichtigsten Eigenschaften und erklären den Zusammenhang zwischen der Lage der komplexen Nullstellen der Zetafunktion und der Primzahlverteilung. Schließlich diskutieren wir noch einige neuere Resultate über die Nullstellen der Zetafunktion. Eisensteinsche Reihen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der automorphen Formen und L -Funktionen. In §2 behandeln wir einige Grundbegriffe der Theorie der Eisensteinschen Reihen und erläutern insbesondere den Zusammenhang zwischen Eisensteinschen Reihen und automorphen L -Funktionen. In §3 betrachten wir automorphe L -Funktionen zu einer beliebigen reductiven Gruppe G und erklären zwei der fundamentalen Vermutungen von Langlands. In §4 behandeln wir den Zusammenhang zwischen automorphen Formen und Streutheorie. Schließlich diskutieren wir in §5 einige Aspekte der Arthur-Selbergschen Spurformel. Die Spurformel ist gegenwärtig eine der wichtigsten Methoden, um Langlands' Vermutungen anzugreifen.

1. DIE RIEMANNSCHE ZETAFAUNKTION

Die Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ ist in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ durch die absolut konvergente Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

definiert. Sie ist die bekannteste und am besten untersuchte L -Funktion. Seit Riemanns fundamentaler Arbeit [R] spielt sie eine wichtige Rolle in der Mathematik. Sowohl die bekannten und als auch die vermuteten Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion bilden den Ausgangspunkt für entsprechende Vermutungen über allgemeine L -Funktionen. In diesem Abschnitt diskutieren wir deshalb ausführlich die Riemannsche Zetafunktion und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften.

Nach Euler hat $\zeta(s)$ die folgende Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_{p < \infty} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft. Wie von Riemann [R] gezeigt wurde, hat $\zeta(s)$ eine analytische Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion auf \mathbb{C} und genügt einer Funktionalgleichung. Es sei

$$\xi(s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

Dann lautet die Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (1.1)$$

Es existieren viele verschiedene Beweise dafür. Der Riemannsche Beweis benutzt die θ -Reihe

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}, \quad \text{Im}(z) > 0.$$

Dies ist eine automorphe Form vom Gewicht $1/2$ bezüglich der Hauptkongruenzuntergruppe

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid a, d \equiv 1 \pmod{2}, b, c \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Insbesondere gilt

$$\theta\left(-\frac{1}{z}\right) = (-iz)^{1/2} \theta(z). \quad (1.2)$$

Es sei $\Gamma(s)$ die Gamma-Funktion. Dann ist

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2-1} dt, \quad (1.3)$$

d.h., $\zeta(2s)$ ist im wesentlichen die Mellintransformation von $1/2(\theta(it) - 1)$. Indem man das Integral in (1.3) aufspaltet in

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty,$$

im ersten Integral die Variablentransformation $t \mapsto 1/t$ ausführt und die Transformationsformel (1.2) anwendet, erhält man für $\text{Re}(s) > 1$

$$\begin{aligned} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \frac{1}{2} \int_1^\infty (t^{s/2-1} + t^{-1/2-s/2}) (\theta(it) - 1) dt \\ &\quad - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Das Integral ist für alle s absolut konvergent. Daraus ergibt sich die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$. Außerdem ist die rechte Seite von (1.4) invariant unter $s \mapsto 1-s$. Dies ergibt die Funktionalgleichung (1.1). Die Mellintransformation ordnet durch (1.3) der automorphen Form $\theta(z)$ die L -Reihe $\zeta(s)$ zu. Die Automorphie von θ , d.h., die Transformationsformel (1.2) impliziert die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ zusammen mit der Funktionalgleichung (1.1). Umgekehrt erhält man durch die inverse Mellintransformation

$$\frac{\theta(it) - 1}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}(s)=\sigma>0} t^{-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) ds.$$

Die Funktionalgleichung (1.1) impliziert die Transformationsformel für θ . Dies wurde von Hamburger [Ha] benutzt, um die Zetafunktion eindeutig durch die Funktionalgleichung und die Lage des Poles zusammen mit dem Residuum eindeutig zu charakterisieren.

Hecke hat diesen Beweis auf andere automorphe Formen und Dirichlet-Reihen verallgemeinert und ist so zu seiner Theorie gelangt.

Wie Riemann [R] gezeigt hat, spielen die Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ eine fundamentale Rolle bei der Primzahlverteilung. Es sei

$$\pi(x) = \#\{p \mid p \leq x\}$$

die Anzahl der Primzahlen $\leq x$. Der bereits von Gauß vermutete Primzahlsatz besagt

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Die beiden voneinander unabhängigen Beweise des Primzahlsatzes von Hadamard und de la Vallée Poisson benutzen beide daß $\zeta(1+it) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, daß die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ liegen. Von Littlewood wurde gezeigt, daß $A > 0$ existiert, so daß

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0 \text{ für } \sigma > 1 - \frac{A \ln \ln(|t| + 3)}{\ln(|t| + 3)}, \quad (1.5)$$

d.h., es existiert eine Nullstellen freie Region in $\operatorname{Re}(s) < 1$. Es sei

$$\operatorname{li} x = \operatorname{li} 2 + \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Da

$$\int_2^x \frac{du}{\ln u} = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right), \quad x \geq 4,$$

ist der Primzahlsatz äquivalent zu

$$\pi(x) \sim \operatorname{li} x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Unter Verwendung von Littlewoods Resultat, kann man das Restglied genauer abschätzen und zwar gilt

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x \ln \ln x}}\right)$$

für $x \rightarrow \infty$ und ein $a > 0$. Riemann hat in [R] folgende Vermutung aufgestellt:

Riemannsche Vermutung: *Alle Nullstellen von $\zeta(s)$, die im Streifen $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ enthalten sind, liegen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.*

Wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, so erhält man den Primzahlsatz mit bestmöglicher Abschätzung des Restgliedes, und zwar gilt dann

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(\sqrt{x} \ln x) \quad (1.6)$$

[R], [Ch]. Umgekehrt folgt aus (1.6) die Riemannsche Vermutung.

Die Riemannsche Vermutung ist gegenwärtig die berühmteste Vermutung in der Mathematik. Außer (1.6) hat sie noch viele andere wichtige Konsequenzen (siehe z.B. [Tm]) und es existieren viele äquivalente Umformulierungen. Gegenwärtig existiert aber kein wirklicher Ansatz für den Beweis der Riemannschen Vermutung.

Selberg [Se2] hat gezeigt, daß eine Teilmenge der Nullstellen mit positiver Dichte auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ liegt. Conrey [Cr] hat dieses Resultat wesentlich verbessert und gezeigt, daß $2/5$ der Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ liegen.

Es gibt einige sehr interessante Versuche, Ansätze für einen Beweis zu finden. Insbesondere sind dies die Arbeiten von Deninger [De], [De1] und Connes [Co], [Co1], die allerdings beide sehr spekulativ sind.

Ein Ausgangspunkt für einen möglichen Beweisansatz ist die (durch nichts motivierte) Vermutung von Polya und Hilbert, daß die nichttrivialen Nullstellen von der Form $\rho_j = 1/2 + i\gamma_j$ sind, wobei die γ_j die Eigenwerte eines natürlichen Hermiteschen Operators sind, d.h., man sucht nach einer kanonischen Spektralinterpretation für die komplexen Nullstellen der Zetafunktion.

Es gibt auch umfangreiche numerische Untersuchungen zur Riemannschen Vermutung. Riemann selbst hat die ersten Nullstellen berechnet. Die bisher umfangreichsten Rechnungen stammen von Odlyzko [Od] und Van de Lune, te Riele, Winter [VW]. In [VW] haben die Autoren gezeigt, daß die ersten $1,5 \cdot 10^9$ nichttrivialen Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. In Odlyzkos Rechnungen geht es mehr um die statistischen Eigenschaften der Nullstellen, und zwar um die Verteilung der normalisierten Abstände aufeinanderfolgender Nullstellen. In [Od] hat Odlyzko 79 Millionen aufeinanderfolgender Nullstellen in der Umgebung der 10^{20} sten Nullstelle berechnet. Diese Rechnungen zeigen eine erstaunliche Übereinstimmung mit der Verteilung der normalisierten Abstände der Eigenwerte zufälliger großer Hermitescher Matrizen. Dies hängt eng zusammen mit Fragen des Quantenchaos, d.h., der Untersuchung statistischer Eigenschaften von Energiespektren quantenmechanischer Systeme, deren zugrunde liegendes klassisches

System chaotisches Verhalten hat. Für die Modellierung von Hamilton-Operatoren zufälliger dynamischer Systeme gibt es verschiedenen Theorien von zufälligen Hermiteschen Matrizen. Wenn das dynamische System bezüglich der Zeitumkehr nicht symmetrisch ist, so erfolgt die Modellierung durch das Gaußsche Unitäre Ensemble (GUE). Das Gaußsche Unitäre Ensemble vom Grade N ist der Raum $GL_N(\mathbb{C})/U(N)$ aller $N \times N$ Hermiteschen Matrizen zusammen mit einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsmaß. Das Maß ist dabei das eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $GL_N(\mathbb{C})/U(N)$, das invariant ist unter Konjugation mit $U(N)$ und für das die Matrixeinträge unabhängige Zufallsvariablen sind. Konkret ist das Maß gegeben durch

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-g_{ii}^2} \prod_{i < j} \frac{2}{\pi} e^{-2(a_{ij}^2 + b_{ij}^2)} \prod dg_{ij},$$

wobei $g_{ij} = a_{ij} + \sqrt{-1}b_{ij}$ für $i < j$.

Die Rechnungen von Odlyzko zeigen eine erstaunliche Übereinstimmung der normalisierten Abstandsverteilungen der Nullstellen ρ_j im Bereich $10^{20} \leq j \leq 10^{20} + 7 \cdot 10^6$ und der entsprechenden Verteilung der normalisierten Abstände der Eigenwerte für das GUE. Die Rechnungen von Odlyzko wurden angeregt durch Arbeiten von Montgomery [Mo] zu den Paar-Korrelationsfunktionen der Nullstellen. Dazu nehmen wir an, daß die Riemannsche Vermutung gilt. Wir schreiben die nicht-trivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ als

$$\frac{1}{2} + i\gamma_j$$

mit $\gamma_j \in \mathbb{R}$, wobei die Nullstellen so geordnet, daß

$$\cdots \leq \gamma_{-2} \leq \gamma_{-1} \leq 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots$$

gilt. Dann ist $\gamma_j = -\gamma_{-j}$, $j \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\#\{j \mid 0 \leq \gamma_j \leq T\} \sim \frac{T \log T}{2\pi} \text{ für } T \rightarrow \infty.$$

Wir normalisieren die γ_j 's durch

$$\hat{\gamma}_j = \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi}, \quad j \geq 1.$$

Es sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so daß der Träger von $\hat{\phi}$ in $(-1, 1)$ enthalten ist. Dann hat Montgomery [Mo] bewiesen, daß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \phi(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_k) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \right) dx.$$

Wie in Metha [Me] gezeigt wird, ist die Funktion

$$r_2(x) := 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2$$

die Dichte für die Korrelation von Paaren von Eigenwerten großer Hermitescher Matrizen. Von Rudnick und Sarnak [RS] wurden entsprechende Resultate für die n -fachen Korrelationsfunktionen bewiesen. Dies wird als Evidenz für die Existenz einer spektralen Interpretation der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ angesehen.

2. EISENSTEINSISCHE REIHEN

Eisensteinsche Reihen sind spezielle automorphe Formen, die in der Spektraltheorie der automorphen Formen und der Theorie der automorphen L -Funktionen eine sehr wichtige Rolle spielen. Für $SL(2, \mathbb{R})$ wurden die nichtanalytischen Eisensteinschen Reihen von Maaß [Ma] eingeführt und ihre Bedeutung für die Spektraltheorie wurde vor allem von Selberg [Se] im Zusammenhang mit der Entwicklung der Spurformel erkannt. Für eine allgemeine reductive Gruppe G wurde die Theorie der Eisensteinschen Reihen von Langlands [L] entwickelt.

Es sei $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe 1. Art mit nichtkompaktem Fundamentalebenebereich. Die Eisensteinschen Reihen bezüglich Γ sind den Spitzen von Γ zugeordnet. Wenn ∞ eine Spitze ist und der Stabilisator Γ_∞ von ∞ gegeben ist durch

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\},$$

so ist die Eisensteinsche Reihe $E(z, s)$ zur Spitze ∞ definiert durch

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \text{Im}(\gamma(z))^s, \quad \text{Re}(s) > 1. \quad (2.1)$$

Für eine beliebige Spitze wird die assoziierte Eisensteinsche Reihe durch eine analoge Reihe definiert. Die Modulgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ hat nur eine Äquivalenzklasse von Spitzen und die entsprechende Eisensteinsche Reihe, die der Spitze ∞ zugeordnet ist, ist

$$E(z, s) = \sum_{(m,n)=1} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}}, \quad \text{Re}(s) > 1, \quad (2.2)$$

wobei $y = \text{Im}(z)$ ist. Wenn die Anzahl der Γ -Äquivalenzklassen von Spitzen m ist, so gibt es für die Gruppe Γ genau m verschiedene Eisensteinschen Reihen

$$E_i(z, s), \quad i = 1, \dots, m,$$

die in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) > 1$ durch Reihen analog zu (2.1) definiert sind. Als Funktionen von z sind es C^∞ -Funktionen auf der Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ und sie genügen der Differentialgleichung

$$\Delta E_i(z, s) = s(1-s)E_i(z, s), \quad i = 1, \dots, m,$$

wobei Δ der hyperbolische Laplace-Operator (0.2) ist. Für die Spektraltheorie ist es allerdings erforderlich, die Eisensteinsche Reihen analytisch fortzusetzen, so daß sie auch für $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ definiert sind. Die Funktionen

$$\lambda \in \mathbb{R} \longmapsto E_i(z, 1/2 + \sqrt{-1}\lambda), \quad i = 1, \dots, m,$$

sind dann ein vollständiges System von verallgemeinerten Eigenfunktionen für den Laplace-Operator Δ der Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Die Reihe (2.2) ist eine Epsteinsche Zetafunktion und es ist bekannt, daß diese Reihe eine analytische Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion von $s \in \mathbb{C}$ hat. Die analytische Fortsetzung ist holomorph auf der Geraden $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. Für eine beliebige Fuchssche Gruppe 1. Art hat Selberg die Existenz einer meromorphen Fortsetzung der Eisensteinschen Reihen in [Se] bewiesen.

Die Eisensteinsche Reihe (2.2) ist invariant unter der Gruppe $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$. Insbesondere gilt

$$E(z+1, s) = E(z, s).$$

Daher kann $E(x+iy, s)$ in eine Fourier-Reihe bezüglich x entwickelt werden. Die Fourier-Entwicklung ist von der Form

$$E(x+iy, s) = y^s + c(s)y^{1-s} + \frac{2\sqrt{y}}{\xi(2s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(n) K_{s-1/2}(2\pi ny) \cos(2\pi nx), \quad (2.3)$$

wobei $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$,

$$c(s) = \frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)} \quad (2.4)$$

und

$$\sigma_\nu(n) = \sum_{d|n} d^\nu.$$

Von besonderer Bedeutung ist der konstante Term der Fourierentwicklung (2.3), der durch die "Streumatrix" (2.4) bestimmt ist. Für eine beliebige Fuchssche Gruppe 1. Art Γ mit m Spitzen kann man die

Eisensteinsche Reihe zur i -ten Spitze in der j -ten Spitze in eine entsprechende Fourier-Reihe entwickeln. Der konstante Term hat die Form

$$\delta_{ij} y_j^s + C_{ij}(s) y_j^{1-s} \quad (2.5)$$

mit einer meromorphen Funktion $C_{ij}(s)$. Die Matrix

$$C(s) = (C_{ij}(s))_{i,j=1}^m$$

ist die sogenannte "Streumatrix".

Es sei

$$\mathbf{E}(z, s) = \begin{pmatrix} E_1(z, s) \\ \vdots \\ E_m(z, s) \end{pmatrix}.$$

Dann gelten die folgenden Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \text{Id} &= C(s)C(1-s); \\ \mathbf{E}(z, s) &= C(s)(\mathbf{E}(z, 1-s)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

[Se]. Für eine beliebige reductive Gruppe G wurden die Existenz einer meromorphen Fortsetzung der Eisensteinschen Reihen und die entsprechenden Funktionalgleichungen von Langlands bewiesen [L1]. Eisensteinsche Reihen für G sind assoziiert mit Γ -cuspidalen parabolischen Untergruppen von G .

Als Beispiel betrachten wir $G = \text{SL}_n$. Der Einfachheit halber betrachten wir adèlische Eisenstein-Reihen. Es sei

$$K = \text{SO}(n) \cdot \prod_{p < \infty} \text{SL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

Dann ist $K \subset G(\mathbb{A})$ eine maximal kompakte Untergruppe. Eine maximale parabolische Standarduntergruppe $P \subset G$ ist von der Form

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \text{GL}_{n_1}, B \in \text{GL}_{n_2}, \det A \cdot \det B = 1 \right\}.$$

wobei $n = n_1 + n_2$. Es sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \mid m_1 \in \text{GL}_{n_1}, m_2 \in \text{GL}_{n_2}, \det m_1 \cdot \det m_2 = 1 \right\}.$$

und

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \text{Id}_{n_1} & X \\ 0 & \text{Id}_{n_2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Dann ist

$$P = M \cdot N = N \cdot M$$

eine Levi-Zerlegung von P . Es sei $\phi \in L^2(M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}))$ eine automorphe Form, die invariant ist unter Multiplikation von rechts mit $k \in M(\mathbb{A}) \cap K$. Es sei

$$\phi_s(nmk) = \phi(m) \left(\frac{|\det m_1|^{n_2}}{|\det m_2|^{n_1}} \right)^{s+1/2}.$$

für $n \in N(\mathbb{A})$, $m \in M(\mathbb{A})$ und $k \in K$. Da $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cdot K$, ist ϕ_s eine Funktion auf $G(\mathbb{A})$. Für alle $g \in G(\mathbb{A})$ ist die Reihe

$$E(\phi, s, g) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi_s(\gamma g) \quad (2.7)$$

absolut konvergent in der Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq c$ für ein geeignetes $c > 0$. Diese Reihe hat eine analytische Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion in $s \in \mathbb{C}$. Dies ist eine Eisensteinsche Reihe zu einer maximal parabolischen Untergruppe. Für eine automorphe Spitzenform ϕ hat $E(\phi, s)$ Eigenschaften analog zu den Eisensteinschen Reihen für die obere Halbebene. Die analytische Fortsetzung geschieht nach den gleichen Prinzipien. Wenn ϕ keine Spitzenfunktion ist, so ist die Konstruktion der analytischen Fortsetzung wesentlich komplizierter [L], [GS1]. Eine allgemeine parabolische Standardgruppe $P \subset G$ ist der Stabilisator einer Flagge

$$0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{R}^n.$$

Dies entspricht einer Zerlegung $n = n_1 + \cdots + n_r$. Es sei N das unipotente Radikal von P und

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_r \\ & & & & 0 \end{array} \right) \mid \prod_{i=1}^r m_i = 1 \right\}.$$

Dann ist

$$P = N \cdot M$$

eine Levi-Zerlegung von P .

Es sei $\phi \in L^2(M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}))$ eine automorphe Form, die rechtsinvariant ist unter $M(\mathbb{A}) \cap K$. Weiter sei $s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ mit $\sum n_i s_i = 0$. Sei

$$\phi_s(nmk) = \phi(m) \prod_{i=1}^r |\det m_i|^{s_i + \rho_i},$$

wobei $\rho_i > 0$ geeignete reelle Zahlen sind. Die entsprechenden adèliche Eisenstein-Reihe ist dann wieder durch die Reihe (2.7) definiert. Diese

Reihe konvergiert absolut in einem Gebiet der Form $\operatorname{Re}(s_i - s_j) \geq c_j$ für $i < j$, $i, j = 1, \dots, r$, mit geeigneten $c_j > 0$.

Die bisher betrachteten Eisensteinschen Reihen sind Funktionen auf $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})$, die rechtsinvariant unter K sind, d.h., es sind Funktionen auf $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K$. Für SL_n gilt aber der starke Approximationsatz

$$\operatorname{SL}_n(\mathbb{A}) = \operatorname{SL}_n(\mathbb{Q}) \cdot \operatorname{SL}_n(\mathbb{R}) \cdot \prod_{p < \infty} \operatorname{SL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

Daher ist

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K \cong \operatorname{SL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \operatorname{SL}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{SO}(n).$$

Für $n = 2$ ist dies gerade die Riemannsche Fläche $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. Die Eisensteinschen Reihen zu einem nichttrivialen K -Typ sind analog definiert. Aus technischen Gründen betrachten wir jetzt GL_n anstelle von SL_n . Es sei Z_n das Zentrum von GL_n . Der Quotient $\operatorname{SL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{SL}_n(\mathbb{A})$ wird ersetzt durch $Z_n(\mathbb{R})^0 \operatorname{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_n(\mathbb{A})$. Eine maximal kompakte Untergruppe von $\operatorname{GL}_n(\mathbb{A})$ ist

$$K = O(n) \cdot \prod_{p < \infty} \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}_p).$$

Die Eisensteinschen Reihen, die rechtsinvariant unter K sind, werden genau so konstruiert wie im Falle von SL_n . Es sei $P \subset \operatorname{GL}_n$ eine maximale parabolische Standarduntergruppe, N das unipotente Radikal von P und M die Levi-Untergruppe. Dann existiert eine Zerlegung $n = n_1 + n_2$, so daß

$$M = \operatorname{GL}_{n_1} \times \operatorname{GL}_{n_2}.$$

Es sei $\phi \in L^2(Z_M(\mathbb{R})^0 M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}))$ eine automorphe Spitzenform, die rechtsinvariant unter $M(\mathbb{A}) \cap K$ ist und

$$E(\phi, s, g) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash \operatorname{GL}_n(\mathbb{Q})} \phi_s(\gamma g)$$

sei die assoziierte Eisensteinsche Reihe. Der konstante Term der Fourierentwicklung der Eisensteinschen Reihe (2.3) entspricht dem Integral

$$\int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} E(\phi, s, ng) dn.$$

Um dieses Integral zu berechnen, machen wir zusätzliche Annahmen. Es sei π eine irreduzible unitäre Darstellung von $M(\mathbb{A})$, die eine Teildarstellung der rechtsregulären Darstellung von $M(\mathbb{A})$ im Hilbertraum

$L^2(Z_M(\mathbb{R})^0 M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}))$ ist. Dann ist $\pi = \pi_1 \times \pi_2$, wobei π_i eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A})$ ist. Für $s \in \mathbb{C}$ sei $\pi_i[s]$ die Darstellung

$$g \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}) \longmapsto \pi_i(g) |\det g_i|^s.$$

Für $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ sei

$$\pi[s] = \pi_1[s_1] \times \pi_2[s_2].$$

Dann ist $\pi[s]$ eine Darstellung von $M(\mathbb{A})$. Wir setzen sie zu einer Darstellung von $P(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})$ fort durch

$$\pi[s](nm) = \pi[s](m), \quad n \in N(\mathbb{A}), m \in M(\mathbb{A}).$$

Es sei

$$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})}(\pi[s])$$

die induzierte Darstellung. Wir nehmen an, daß ϕ im Raum der induzierten Darstellung liegt. Für die Darstellungen π_i ist

$$\pi_i = \otimes_p \pi_{i,p},$$

wobei $\pi_{i,p}$ eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{Q}_p)$ ist. Es sei $\check{\pi}_i$ die kontragrediente Darstellung zu π_i und

$$L(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2) = \prod_{p < \infty} L(s, \pi_{i,p} \times \check{\pi}_{2,p})$$

die Rankin-Selberg L -Funktion, die mit π_1 und $\check{\pi}_2$ assoziiert ist.

Für fast alle p sind $\pi_{1,p}$ und $\pi_{2,p}$ unverzweigt. Es seien $\alpha_{i,j}(p)$, $j = 1, \dots, n_i$, die Parameter, die durch (0.2) bestimmt sind. Dann ist der lokale L -Faktor von $L(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2)$ definiert durch

$$L(s, \pi_{1,p} \times \check{\pi}_{2,p}) = \prod_{i=1}^{n_1} \prod_{j=1}^{n_2} (1 - \alpha_{1,i}(p) \overline{\alpha_{2,j}(p)} p^{-s})^{-1}.$$

An der unendlichen Stelle ist $L(s, \pi_{1,\infty} \times \check{\pi}_{2,\infty})$ ein Produkt von Gamma-Funktionen. Es sei

$$\Lambda(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2) = L(s, \pi_{1,\infty} \times \check{\pi}_{2,\infty}) L(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2)$$

die vervollständigte L -Funktion. Dann genügt $L(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2)$ der Funktionalgleichung

$$\Lambda(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2) = \epsilon(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2) L(1-s, \check{\pi}_1 \times \pi_2),$$

wobei der ϵ -Faktor die Form

$$\epsilon(s, \pi \times \check{\pi}_2) = W(\pi_1 \times \check{\pi}_2) N(\pi_1 \times \check{\pi}_2)^{1/2-s}$$

hat mit $|W| = 1$ und $N \in \mathbb{N}$. Der konstante Term der Eisensteinschen Reihe ist dann gleich

$$\phi_s(g) + \frac{\Lambda(s, \pi, \times \check{\pi}_2)}{\epsilon(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2) \Lambda(1 + s, \pi_1 \times \check{\pi}_2)} \phi_{-s}(g). \quad (2.8)$$

Diese Formel ist völlig analog zur Formel (2.5) für den konstanten Term der Eisensteinschen Reihe (2.2). Da $E(\phi, s, g)$ eine meromorphe Funktion von $s \in \mathbb{C}$ ist, gilt dies auch für die rechte Seite von (2.8). Daraus ergibt sich unmittelbar die analytische Fortsetzung der Rankin-Selberg L -Funktion $L(s, \pi_1 \times \check{\pi}_2)$.

Wir haben bisher nur automorphe Formen betrachtet, die rechtsinvariant sind bezüglich der maximal kompakten Untergruppe K . Dies entspricht Funktionen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n)$. Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$\Gamma(N) = \{ \gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \mathrm{Id} \pmod{N} \}$$

die Hauptkongruenzuntergruppe. Dann existiert eine offene kompakte Untergruppe $K(N) \subset K$, so daß

$$\mathbb{Z}_n(\mathbb{R})^0 \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) / K(N) \cong \bigsqcup_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \Gamma(N) \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n).$$

Die Eisensteinschen Reihen zur Gruppe $\Gamma(N)$ können dann in der gleichen Weise adèlisch behandelt werden. In den konstanten Termen treten dann wiederum Rankin-Selberg L -Funktionen auf.

Wenn man GL_n durch eine beliebige über \mathbb{Q} definierte reduktive algebraische Gruppe G ersetzt, so gelangt man durch die Untersuchung der konstanten Terme der entsprechenden Eisensteinschen Reihen zur allgemeinen Form einer automorphen L -Funktion. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß G über \mathbb{Q} zerfällt. Wir definieren dies hier nicht. Es bedeutet unter anderem, daß wir wie im Fall von GL_n von den Gruppen der ganzzahligen Punkte $G(\mathbb{Z})$ und $G(\mathbb{Z}_p)$ sprechen können. Die Eisensteinschen Reihen sind assoziiert mit den parabolischen Untergruppen P von G , die über \mathbb{Q} definiert sind. Jede solche Gruppe P hat eine Levi-Zerlegung

$$P = N \cdot M,$$

wobei N das unipotente Radikal von P und M eine Levi-Untergruppe ist. M ist eine reduktive algebraische Gruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist. Es sei A_M die zerfallende Komponente des Zentrums von M . Weiter sei $X(M)_{\mathbb{Q}}$ die Gruppe der rationalen Charaktere von M ,

$$\mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}(X(M)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}),$$

und $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{C}}^*$ sei die Komplexifizierung von \mathfrak{a}_M^* . Wir definieren einen Homomorphismus

$$H_M: M(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_M$$

durch

$$e^{\langle H_M(m), \chi \rangle} = \prod_v |\chi(m_v)|_v.$$

Es sei

$$M(\mathbb{A})^1 = \ker H_M.$$

Wir setzen H_M zu einer Abbildung

$$H_P: G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathfrak{a}_M$$

fort durch

$$H_P(nmk) = H_M(m), \quad n \in N(\mathbb{A}), m \in M(\mathbb{A}), k \in K.$$

Da $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cdot K$ ist, ist diese Funktion wohl definiert. Wir fixieren eine maximale kompakte Untergruppe

$$K = \prod_v K_v$$

von $G(\mathbb{A})$. Für fast alle v ist $K_v = G(\mathbb{Z}_v)$. Assoziiert mit P ist ein Raum $A^2(P)$ vom automorphen Formen. Es sei $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra der komplexifizierten Liealgebra \mathfrak{g} von G . Dann ist $A^2(P)$ der Raum der meßbaren Funktionen

$$\phi: A_M(\mathbb{R})^0 N(\mathbb{A}) M(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Der Raum, der durch die Funktionen

$$g \in G(\mathbb{A}) \mapsto (D\phi)(gk), \quad k \in K, D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),$$

aufgespannt wird, ist endlich dimensional.

- (2)

$$\|\phi\|^2 = \int_K \int_{M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A})^1} |\phi(mk)|^2 dm dk < \infty.$$

Eine Funktion $\phi \in A^2(P)$ heißt automorphe Spitzenform, wenn für alle parabolischen Untergruppen $Q = N_Q M_Q$ mit $Q \subsetneq P$ gilt:

$$\int_{N_Q(\mathbb{Q}) \backslash N_Q(\mathbb{A})} \phi/ng \, dg = 0$$

für fast alle $g \in G(\mathbb{A})$. Mit $A^2(P) \subset A^2(A)$ bezwischen wir den Unterraum der Spitzenformen. Es sei $\rho_P = 1/2 \sum \alpha$, wobei α die positiven

Wurzeln von (P, A_M) durchläuft. Für $\phi \in A^2(P)$ und $\lambda \in \mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$ ist die Eisensteinsche Reihe definiert durch

$$E(\phi, \lambda, g) = \sum_{\gamma \in P(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi(\gamma g) e^{(\lambda + \rho_P)(H_P(\gamma g))}. \quad (2.9)$$

Die Reihe konvergiert absolut für $\operatorname{Re}(\lambda)$ in der positiven Kammer und die dadurch definierte Funktion von λ hat eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$. Es sei $P' = N' \cdot M'$ eine weitere rationale parabolische Untergruppe von G . Der konstante Term von $E(\phi, \lambda, g)$ bezüglich P' ist definiert als

$$\int_{N'(\mathbb{Q}) \backslash N'(\mathbb{A})} E(\phi, \lambda, n'g) dn'. \quad (2.10)$$

Für den Fall der oberen Halbebene entspricht dies dem nullten Fourierkoeffizienten (2.5) in der j -ten Spitze der Eisensteinschen Reihe $E_i(z, s)$.

Die Untersuchung des konstanten Terms ist von zentraler Bedeutung für die Theorie der Eisensteinschen Reihen und automorphen L -Funktionen. Wenn ϕ keine Spitzenform ist, so ist der konstante Term sehr kompliziert. Für eine Spitzenform ϕ ergibt sich andererseits eine sehr einfache Formel. Besonders einfach wird die Formel für maximale parabolische Gruppen. Deshalb nehmen wir jetzt an, daß P und P' maximale parabolische Untergruppen sind, d.h., es ist $\dim \mathfrak{a}_M / \mathfrak{a}_G = 1$ und $\dim \mathfrak{a}_{M'} / \mathfrak{a}_G = 1$.

Zur Berechnung des konstanten Termes in diesem Fall machen wir weitere Annahmen. Es sei $\pi = \otimes_v \pi_v$ eine automorphe Spitzendarstellung von $M(\mathbb{A})$, die trivial ist auf $A_M(\mathbb{R})^0$. Dabei ist π_v eine irreduzible unitäre Darstellung der lokalen Gruppe $G(\mathbb{Q}_v)$. Für $\lambda \in \mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$ sei π_λ die Darstellung von $M(\mathbb{A})$, die definiert ist durch $\pi_\lambda(m) = \pi(m) \exp(\lambda(H_M(m)))$. Da $M(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})/N(\mathbb{A})$ ist, können wir π_λ zu einer Darstellung von $P(\mathbb{A})$ fortsetzen. Es sei

$$I_P^G(\pi, \lambda) = \operatorname{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\pi_\lambda)$$

die induzierte Darstellung. Wir realisieren $I_P^G(\pi, \lambda)$ in einem von λ unabhängigen Hilbertraum $\mathcal{H}_P(\pi)$. Es sei $\mathcal{H}_P^0(\pi) \subset \mathcal{H}_P(\pi)$ der Unterraum der K -endlichen Vektoren. Wir nehmen an, daß ϕ im Raum $\mathcal{H}_P^0(\pi)$ liegt. Dann ergibt sich für den konstanten Term

$$\begin{aligned} \int_{N'(\mathbb{Q}) \backslash N'(\mathbb{A})} E(\phi, \lambda, n'g) dn' &= \epsilon_{P, P'} \phi(g) e^{(\lambda + \rho_P)(H_P(g))} \\ &+ (M(w, \pi, \lambda) \phi)(g) e^{(w\lambda + \rho_{P'})(H_{P'}(g))}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei ist $\epsilon_{P,P'} \in \{0, 1\}$, $w : \mathfrak{a}_M \rightarrow \mathfrak{a}_{M'}$ ein Isomorphismus, der durch Einschränkung auf \mathfrak{a}_M von $Ad(y)$ für ein $y \in G(\mathbb{Q})$ definiert ist, und

$$M(w, \pi, \lambda) : \mathcal{H}_P^0(\pi) \rightarrow \mathcal{H}_{P'}^0(\pi^w) \quad (2.12)$$

ist der Verkettungsoperator der induzierten Darstellungen $I_P^G(\pi, \lambda)$ und $I_{P'}^G(\pi^w, w\lambda)$. Die Untersuchung des konstanten Terms ist damit auf die Untersuchung des Verkettungsoperators zurückgeführt.

Es sei π_v eine irreduzible unitäre Darstellung von $M(\mathbb{Q}_v)$ und

$$I_P^G(\pi_v, \lambda) = \text{Ind}_{M(\mathbb{Q}_v)N(\mathbb{Q}_v)}^{G(\mathbb{Q}_v)}(\pi_v \otimes \exp(\lambda(H_{P_v}(\cdot))) \otimes \mathbf{1})$$

die von π_v induzierte Darstellung. Dann ist

$$I_P^G(\pi, \lambda) \cong \otimes_v I_P^G(\pi_v, \lambda).$$

Es existiert eine endliche Menge S von Stellen, die ∞ enthält, so daß π_v für alle $v \notin S$ unverzweigt ist. Dies bedeutet, daß π_v einen von Null verschiedenen Vektor hat, der invariant ist unter der maximal kompakten Untergruppe $M(\mathbb{Z}_v)$ von $M(\mathbb{Q}_v)$. Für alle $v \notin S$ existiert dann eine eindeutig bestimmte Funktion ϕ_v^0 im Hilbertraum von $I_P^G(\pi_v, \lambda)$, die K_v -invariant ist und die durch $\phi_v^0(e_v) = 1$ normiert ist. Es sei $\tilde{\phi}_v^0$ die entsprechende Funktion im Raum der induzierten Darstellung $I_P^G(\pi_v^w, w\lambda)$. Wir wählen jetzt ϕ so, daß $\phi = \otimes_v \phi_v$, wobei ϕ_v im Raum von $I_P^G(\pi_v, \lambda)$ liegt und $\phi_v = \phi_v^0$ für alle $v \notin S$ gilt. Dann ist

$$M(w, \pi, \lambda)\phi = \otimes_v (M(w, \pi_v, \lambda)\phi_v), \quad (2.13)$$

wobei $M(w, \pi_v, \lambda)\phi$ der Verkettungsoperator der induzierten Darstellungen $I_P^G(\pi_v, \lambda)$ und $I_P^G(\pi_v^w, w\lambda)$ ist. Außerdem existiert für alle $v \notin S$ eine Funktion $m(w, \pi_v, \lambda)$ mit

$$M(w, \pi_v, \lambda)\phi_v^0 = m(w, \pi_v, \lambda)\tilde{\phi}_v^0. \quad (2.14)$$

Dies ist Langlands L -Faktor an der Stelle v . Um den L -Faktor genauer zu beschreiben, benötigen wir den Begriff der L -Gruppe. Es sei H eine reductive algebraische Gruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist und die über \mathbb{C} zerfällt. Einer solchen Gruppe ist in kanonischer Weise eine komplexe reductive Liesche Gruppe ${}^L H^0$, die " L -Gruppe von H ", zugeordnet [L]. Die Konstruktion erfolgt mit Hilfe des dualen Wurzelsystems. Beispiele sind in der folgenden Tabelle enthalten.

H	${}^L H^0$
GL_n	$GL_n(\mathbb{C})$
SL_n	$PGL_n(\mathbb{C})$
PGL_n	$SL_n(\mathbb{C})$
Sp_{2n}	$SO_{2n+1}(\mathbb{C})$
SO_{2n+1}	$Sp_{2n}(\mathbb{C})$

Für $p < \infty$ können die unverzweigten Darstellungen π_p von $H(\mathbb{Q}_p)$ durch halbeinfache Konjugationsklassen $\{t(\pi_p)\}$ in ${}^L H^0$ parametrisiert werden.

Auf Grund unserer Annahme über G ist M eine reduktive algebraische Gruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist und die über \mathbb{Q} zerfällt. Für $p \notin S$ sei $\{t(\pi_p)\}$ die Konjugationsklasse in ${}^L M^0$, die π_p entspricht. Es existieren nun endlichdimensionale komplexe Darstellungen r_1, \dots, r_m von ${}^L M^0$, so daß für alle $p \notin S$ gilt:

$$m(w, \pi_p, \lambda) = \prod_{i=1}^m \frac{\det(\text{Id} - r_i(t(\pi_p))p^{-(\lambda(\check{\alpha})+1)})}{\det(\text{Id} - r_i(t(\pi_p))p^{-\lambda(\check{\alpha})})} \quad (2.15)$$

wobei α die einfache Wurzel von (P, A_M) und $\check{\alpha} \in \mathfrak{a}_M$ die zu α duale Wurzel ist. Für eine beliebige endlichdimensionale Darstellung r von ${}^L M^0$ sei

$$L_S(s, \pi, r) = \prod_{p \notin S} \det(\text{Id} - r(t(\pi_p))p^{-s})^{-1}. \quad (2.16)$$

Dann folgt aus (2.13) - (2.16)

$$M(w, \pi, \lambda)\phi = \prod_{i=1}^m \frac{L_S(\lambda(\check{\alpha}), \pi, r_i)}{L_S(\lambda(\check{\alpha}) + 1, \pi, r_i)} \otimes_{v \in S} (M(w, \pi_v, \lambda)\phi_v) \otimes_{v \notin S} \tilde{\phi}_v. \quad (2.17)$$

Da $E(\phi, \lambda, g)$ eine meromorphe Funktion von $\lambda \in \mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$ ist, folgt, daß auch (2.17) eine meromorphe Funktion von $\lambda \in \mathfrak{a}_{M, \mathbb{C}}^*$ ist. Diesen Umstand kann man nun benutzen, um zu zeigen, daß die entsprechenden partiellen L -Funktionen eine meromorphe Fortsetzung besitzen [L], [GS1].

3. AUTOMORPHE L -FUNKTIONEN

Die obige Berechnung des konstanten Termes von Eisensteinschen Reihen war der Ausgangspunkt, der Langlands [L], [L2] zu seiner allgemeinen Definition einer automorphen L -Funktion und den damit verbundenen Vermutungen veranlaßt hat.

Bisher haben wir nur den Fall einer über \mathbb{Q} zerfallenden reduktiven algebraischen Gruppe betrachtet. Für eine beliebige reduktive algebraische Gruppe über \mathbb{Q} (oder allgemeiner einem Zahlkörper) muß der Begriff der L -Gruppe erweitert werden. Die bisherige L -Gruppe ${}^L G^0$ wird ersetzt durch

$${}^L G = {}^L G^0 \rtimes \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Wenn G über \mathbb{Q} zerfällt, so operiert $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ trivial auf ${}^L G^0$ und wir können ${}^L G$ durch ${}^L G^0$ ersetzen. Ein allgemeinerer Fall ist der einer über \mathbb{Q} quasizerfallenden Gruppe, die über einer endlichen Galois-Erweiterung F von \mathbb{Q} zerfällt. Dann betrachten wir die endliche Form der L -Gruppe

$${}^L G = {}^L G^0 \rtimes \text{Gal}(F/\mathbb{Q}).$$

Dies ist dann eine komplexe Liesche Gruppe. Dann gilt für fast alle Primstellen p , daß G über \mathbb{Q}_p quasi-zerfallend ist und über der unverzweigten Erweiterung F_p für ein $\mathfrak{p}|p$ zerfällt. Es sei $Fr_p \in \text{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p)$ der Frobeniusautomorphismus. Dann entsprechen die unverzweigten Darstellungen π_p von $G(\mathbb{Q}_p)$ eindeutig den ${}^L G^0$ -halbeinfachen Konjugationsklassen $t(\pi_p) \times Fr_p$ in

$${}^L G(\mathbb{Q}_p) = {}^L G^0 \rtimes \text{Gal}(F_p/\mathbb{Q}_p).$$

Eine endlichdimensionale Darstellung von ${}^L G$ ist ein stetiger Homomorphismus

$$r : {}^L G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}),$$

so daß die Einschränkung auf ${}^L G^0$ komplex analytisch ist.

Definition 3.1. *Es sei $\pi = \otimes_v \pi_v$ eine automorphe Darstellung von $G(\mathbb{A})$ und S sei eine endliche Menge von Stellen mit $\infty \in S$, so daß π_p unverzweigt ist für alle $p \notin S$. Für eine endlichdimensionale komplexe Darstellung von ${}^L G$ sei*

$$L_p(s, \pi, r) = \det(\text{Id} - r(t(\pi_p))p^{-s})^{-1}, \quad p \notin S,$$

und

$$L_S(s, \pi, r) = \prod_{p \notin S} L_p(s, \pi, r).$$

Dies ist die allgemeine Form einer automorphen L -Funktion. Wenn $G = \text{GL}_n$ und r die Standarddarstellung von ${}^L G^0 = \text{GL}_n(\mathbb{C})$ ist, so kann $L_S(s, \pi, r)$ durch entsprechende Faktoren $L_p(s, \pi, r)$ an den endlichen Stellen $p \in S$ ergänzt werden und die komplettierte L -Funktion $L(s, \pi, r)$ ist gerade die Standard L -Funktion $L(s, \pi)$ für GL_n . Diese L -Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung und genügt einer Funktionalgleichung. Im allgemeinen ist wenig bekannt über die Existenz einer analytischen Fortsetzung. Zwei der grundlegenden Vermutungen von Langlands [L] sind dann die folgenden.

Vermutung A: *Es sei π eine automorphe Darstellung von $G(\mathbb{A})$ und r eine endlichdimensionale Darstellung von ${}^L G$. Dann besitzt $L_S(s, \pi, r)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz \mathbb{C} mit endlich vielen Polen und*

genügt einer Funktionalgleichung, die $L_S(s, \pi, r)$ und $L_S(1 - s, \tilde{\pi}, r)$ verknüpft.

Bemerkung: Die Existenz einer genauen Funktionalgleichung bedeutet insbesondere, daß die lokalen L -Faktoren $L_p(s, \pi, r)$ auch an den Stellen $p \in S$ definiert werden können.

Vermutung B: (Funktorialitätsprinzip) *Es seien G und G' reduktive algebraische Gruppen über \mathbb{Q} , die quasizerfallend sind. Sei $\rho : {}^L G \rightarrow {}^L G'$ ein L -Homomorphismus. Dann existiert für jede automorphe Darstellung π von G eine automorphe Darstellung π' von G' und eine endliche Menge S von Stellen mit $\infty \in S$, so daß*

$$\rho\{t(\pi_p)\} = \{t(\pi'_p)\}$$

für alle $p \notin S$. Insbesondere gilt für eine Darstellung $r : {}^L G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

$$L_S(s, \pi', r) = L_S(s, \pi, r \circ \rho). \quad (3.1)$$

Es sei G beliebig und $G' = \mathrm{GL}_n$. Dann ist ${}^L G' = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Es sei $\rho : {}^L G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ein Homomorphismus von L -Gruppen und $r_0 : {}^L G' = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Standarddarstellung. Dann folgt aus (3.1)

$$L_S(s, \pi', r_0) = L_S(s, \pi, \rho).$$

Die L -Funktion auf der linken Seite ist die Standard L -Funktion für GL_n und hat daher eine analytische Fortsetzung. Damit impliziert Vermutung B die Vermutung A.

Unter der Annahme, daß die obigen Vermutungen richtig sind, wird man in natürlicher Weise auf weitergehende Vermutungen über die analytischen Eigenschaften von L -Funktionen geführt [IS], [Sa1]. Da nach Vermutung B jede L -Funktion mit einer Standard L -Funktion für GL_n übereinstimmt, genügt es, die Standard L -Funktionen $L(s, \pi)$ für Spitzendarstellungen π von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ zu betrachten. Als erstes erwartet man, daß die Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung für alle L -Funktionen gilt.

Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung: *Es sei π eine automorphe Spitzendarstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Dann liegen alle Nullstellen der vervollständigten Standard L -Funktion*

$$\Lambda(s, \pi) := L(s, \pi_\infty)L(s, \pi)$$

auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Für diese Vermutung gilt natürlich erst recht, was für die Riemannsche Vermutung gesagt wurde. Rudnick und Sarnak haben in [RS] gezeigt, daß unter Annahme dieser Vermutung die komplexen Nullstellen das gleiche statistische Verhalten aufweisen wie die Nullstellen der

Riemannschen Zetafunktion, d.h., die Verteilung der Abstände aufeinanderfolgender Nullstellen scheint dem GUE Gesetz für Abstände der Eigenwerte großer zufälliger Hermitescher Matrizen zu folgen.

Wesentlich realistischer als die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung ist die Frage nach der Existenz von nullstellenfreien Bereichen, d.h., einer Verallgemeinerung von (1.5). Auf Grund einer privaten Mitteilung von P. Sarnak ist es eventuell möglich, dies für diejenigen automorphen L -Funktionen zu beweisen, die in den konstanten Termen von cuspidalen Eisensteinschen Reihen zu maximal parabolischen Gruppen auftreten.

Eine weitere wichtige Vermutung ist die folgende.

Verallgemeinerte Ramanujansche Vermutung: *Es sei π eine automorphe Spitzendarstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Es sei v eine Stelle, so daß π_v unverzweigt ist und es seien $\alpha_{j,\pi}(v)$ bzw. $\mu_j(\pi_\infty)$ die Parameter, die durch die lokalen L -Faktoren bestimmt werden. Dann gilt*

$$|\alpha_{j,\pi}(v)| = 1, \quad v < \infty; \quad \mathrm{Re}(\mu_j(\pi_\infty)) = 0, \quad v = \infty.$$

Diese Vermutung hat ebenfalls eine ganze Reihe von Konsequenzen, unter anderem auch für die Spektraltheorie. Für die weitere Diskussion dieser Vermutung und weiterer Vermutungen verweisen wir auf [IS], [Sa1].

4. AUTOMORPHE FORMEN UND STREUTHEORIE

In der Spektraltheorie der automorphen Formen handelt es sich im einfachsten Fall um die Untersuchung der Spektralzerlegung des Laplace-Operators (0.2) auf einer hyperbolischen Fläche $\Gamma \backslash \mathbb{H}$, die nicht kompakt ist, aber endlichen Flächeninhalt hat. Das Standardbeispiel ist die Modulfläche $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. Die Eisensteinschen Reihen spielen dabei die Rolle der verallgemeinerten Eigenfunktionen für Δ . Es existiert also ein stetiges Spektrum und damit "Streuzustände".

Von Gelfand wurde zuerst bemerkt, daß es in der Spektraltheorie des Laplace-Operators Δ auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ viele Analogien zur Spektraltheorie eines eindimensionalen Schrödinger-Operators $-d^2/dx^2 + V(x)$ auf \mathbb{R}^+ gibt. Faddejev hat dies in [Fa] genauer untersucht, und zwar hat er Methoden der stationären Streutheorie angewendet, um die Spektralzerlegung des Laplace-Operators Δ auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ zu studieren. Insbesondere wurden dabei der Resolventenkern und die Eisensteinschen Reihen analytisch fortgesetzt. Die Streutheorie für automorphe Formen wurde in Arbeiten von Faddejev, Pavlov [FP] und Lax, Phillips [LP] weiterentwickelt. Diesen Arbeiten liegt die Lax-Phillips-Streutheorie zugrunde. Dabei handelt es sich um den dynamischen Zugang zur Streutheorie. Colin

de Verdiere hat in [CV] eine sehr einfache Methode zur analytischen Fortsetzung gefunden. Diese Methode wurde in [Mu1] verallgemeinert und zur Untersuchung von Singularitäten Eisensteinscher Reihen für allgemeine reductive Gruppen angewendet. Daraus ergeben sich wichtige Konsequenzen für die Spektraltheorie im Falle von Gruppen höheren Ranges [Mu1], [Mu2].

Der Zusammenhang zwischen automorphen Formen und Streutheorie ergibt sich wie folgt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Fläche $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ nur eine Spitze hat, die in ∞ liegt. Dann hat X eine Zerlegung der Form

$$X = X_0 \cup Y, \quad (4.1)$$

wobei X_0 eine kompakte Riemannsche Fläche mit Rand ist und $Y \cong S^1 \times [1, \infty)$. Es sei H die selbstadjungierte Erweiterung von

$$\Delta : C_0^\infty(\Gamma \backslash \mathbb{H}) \rightarrow L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}).$$

Weiter sei H_0 die selbstadjungierte Erweiterung von

$$\Delta_0 := -y^2 \frac{d^2}{dy^2} : C_0^\infty((1, \infty)) \rightarrow L^2((1, \infty), y^{-2} dy),$$

die wir durch die Wahl Dirichletscher Randbedingungen erhalten. Wir identifizieren $L^2((1, \infty), y^{-2} dy)$ mit einem Unterraum von $L^2(X)$ und setzen $(H_0 + \text{Id})^{-2}$ zu einem Operator in $L^2(X)$ fort, indem wir den Operator im orthogonalen Komplement von $L^2((1, \infty), y^{-2} dy)$ gleich Null setzen. Dann kann man zeigen, daß

$$(H + \text{Id})^{-2} - (H_0 + \text{Id})^{-2}$$

ein Operator der Spurklasse ist. Damit können wir (H, H_0) als ein "quantenmechanisches Streusystem" auffassen. H_0 ist dabei der freie Hamiltonoperator. Das zugrunde liegende klassische System ist der geodädische Fluss auf der Fläche X . Aus dem Invarianzprinzip für Wellenoperatoren von Birman und Krein [Ka] folgt, dass die Wellenoperatoren

$$W_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0}$$

existieren und vollständig sind. Dies bedeutet, dass H_0 und der absolut stetige Teil von H unitär äquivalent sind. Damit ist das stetige Spektrum von Δ vollständig bekannt. Der Streuoperator ist definiert als

$$S = W_-^* \circ W_+.$$

Es sei $\{E_0(\lambda)\}$ die Spektralfamilie von H_0 . Dann ist

$$S = \int_{1/4}^{\infty} S(\lambda) dE_0(\lambda),$$

und $S(\lambda)$ ist die Streumatrix zur Energie λ . Im vorliegenden Fall ist $S(\lambda)$ eine Funktion. Für eine Fläche $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ mit m Spitzen ist $S(\lambda)$ eine $m \times m$ Matrix. Die Streumatrix $S(\lambda)$ hängt mit der Matrix $C(s)$, die durch die konstanten Terme (2.5) der Eisensteinschen Reihen bestimmt wird, zusammen durch

$$S\left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right) = C\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Matrix $C(s)$ ist die Streumatrix im Sinne der stationären Streutheorie, und zwar im folgenden Sinne. Man kann $y^{1/2+it}$ als einlaufende ebene Welle betrachten. Die Wechselwirkung mit dem kompakten Teil X_0 wird durch die verallgemeinerte Eigenfunktion $E(z, 1/2 + it)$ beschrieben. Für $y \rightarrow \infty$ ist

$$E(z, 1/2 + it) = y^{1/2+it} + c(1/2 + it)y^{1/2-it} + O(e^{-ey}).$$

Dabei kann man $y^{1/2-it}$ als auslaufende ebene Welle ansehen und die Funktion $c(1/2 + it)$ als den Reflektionskoeffizienten. Die stationäre Streutheorie führt auf die analytische Fortsetzung des Resolventenkernes und der verallgemeinerten Eigenfunktionen. Daraus ergibt sich auch die analytische Fortsetzung der Streumatrix. Die Pole der Streumatrix nennt man in der Physik "Resonanzen". Auf Grund von (2.4) sind die Resonanzen für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gerade die komplexen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Aus den Methoden der stationären Streutheorie gewinnt man auch neue Resultate über die analytischen Eigenschaften von Eisensteinschen Reihen und damit auch von automorphen L -Funktionen. In [Se] hat Selberg eine Fredholmsche Integralgleichung benutzt, um die Eisensteinschen Reihen $E_i(z, s)$, $i = 1, \dots, m$, für eine Fuchssche Gruppe 1. Art analytisch fortzusetzen. In der Integralgleichung wird dabei die Greensche Funktion verwendet. Aus Selbergs Methode folgt außerdem, daß sich $E_i(z, s)$ darstellen läßt als

$$E_i(z, s) = \frac{u_i(z, s)}{\varphi_i(s)}, \quad (4.2)$$

wobei $u_i(z, s)$ und $\varphi_i(s)$ ganze Funktionen in s der Ordnung ≤ 4 sind. Analoge Methoden wurden von Colin de Verdiere [CV] und in [Mu3] entwickelt. Beide Methoden beruhen darauf, daß die Eisensteinschen Reihen $E_i(z, s)$, $i = 1, \dots, m$, die eindeutig bestimmten Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta E_i(z, s) = s(1 - s)E_i(z, s)$$

sind, die in der j -ten Spitze für $y_j \rightarrow \infty$ die Asymptotik

$$E_i((x_j, y_j), s) = \delta_{ij} y_j^s + C_{ij}(s) y_j^{1-s} + O(e^{-cy_j})$$

haben. Wir nehmen wieder an, daß X nur eine Spitze hat. Es sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(y) = 1$ für $y \geq 3$ und $f(y) = 0$ für $y \leq 2$. Für $s \in \mathbb{C}$ betrachten wir $f y^s$ als C^∞ -Funktion auf Y . Es sei

$$h(s) := (\Delta - s(1-s))(f y^s).$$

Dann ist $h(s) \in C_0^\infty(Y)$. Wir setzen $h(s)$ durch Null zu einer C^∞ -Funktion auf X fort. Dann ist $h(s) \in C_0^\infty(Y)$. Aus der obigen Charakterisierung der Eisensteinschen Reihen folgt leicht, daß

$$E(z, s) = f y^s - (\bar{\Delta} - s(1-s))^{-1}(h(s)), \quad \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (4.3)$$

Diese Formel reduziert die analytische Fortsetzung der Eisensteinschen Reihe auf die analytische Fortsetzung der Resolvente als Operator in geeigneten Banachräumen. In [Mu3] werden dazu gewichtete L^2 -Räume benutzt. Die Methode von Colin de Verdière verwendet den an der Stelle $a > 1$ "abgeschnittenen Laplace-Operator" Δ_a , der ein diskretes Spektrum hat. Es sei $H_a^1(X) \subset H^1(X)$ der Unterraum, der aus allen Funktionen besteht, deren nullter Fourierkoeffizient auf $[a, \infty)$ verschwindet. Dann ist Δ_a der selbstadjungierte Operator, der die quadratische Form

$$f \in H_a^1(X) \mapsto \|df\|^2$$

repräsentiert. Aus dieser Methode ergibt sich ebenfalls, daß sich die Eisensteinschen Reihen und die Streumatrix als Quotienten ganzer Funktionen der Ordnung ≤ 4 darstellen lassen.

Die hier beschriebenen Methoden benutzen nicht, daß X eine hyperbolische Fläche ist. Wesentlich ist nur die hyperbolische Struktur der Enden. Wir können den kompakten Teil X_0 in (4.1) durch eine beliebige kompakte Fläche mit Rand S^1 und eine beliebige Riemannsche Metrik auf X_0 ersetzen, die in einer Umgebung des Randes mit der hyperbolischen Metrik übereinstimmt. Den Laplaceoperator auf der entsprechenden vollständigen Fläche kann man als ein geometrisches Pendant zum Schrödinger-Operator $-d^2/dx^2 + V(x)$ in \mathbb{R}^+ mit $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ ansehen. Die Spektraltheorie für Δ läßt sich völlig analog zum Fall einer hyperbolischen Fläche entwickeln [Mu4].

Bisher haben wir nur den Fall des Laplace-Operators auf einer hyperbolischen Fläche betrachtet. Methoden der stationären Streutheorie können aber auch in gewissem Umfang zur Untersuchung der Spektralzerlegung des Laplace-Operators auf höherdimensionalen lokal symmetrischen Räumen $\Gamma \backslash G/K$ von endlichem Volumen eingesetzt werden.

Das betrifft insbesondere lokal symmetrische Räume vom Rang 1. Ein typisches Beispiel hierfür sind Hilbertsche Modulmannigfaltigkeiten. Eine solche Mannigfaltigkeit ist von der Form

$$\Gamma \backslash (\mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H}),$$

wobei das kartesische Produkt aus n Exemplaren der oberen Halbebene besteht und $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$ eine Hilbertsche Modulgruppe ist. Eine Hilbertsche Modulgruppe ist assoziiert mit einem total reellen Zahlkörper F vom Grade n . Es sei \mathcal{O}_F der Ring der ganzen algebraischen Zahlen in F . Weiter seien $\alpha \mapsto \alpha^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, die verschiedenen Einbettungen von F in \mathbb{R} . Die Einbettung

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F) \mapsto \left(\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} \\ \gamma^{(1)} & \delta^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \alpha^{(n)} & \beta^{(n)} \\ \gamma^{(n)} & \delta^{(n)} \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^n$$

bildet $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ isomorph auf eine diskrete Untergruppe Γ ab. Die Spektraltheorie für den Rang 1 Fall wurde in [Mu5] entwickelt. Die Enden eines lokal symmetrischen Raumes vom Rang 1 haben die Struktur einer gefaßerten Spitze.

Ein typisches Beispiel eines lokal symmetrischen Raumes von höherem Rang ist

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n), \quad n \geq 3.$$

Im Falle höheren Ranges ist es bisher nur möglich, einen bestimmten Teil des stetigen Spektrums mit Methoden der Streutheorie zu behandeln, und zwar kann man durch Verallgemeinerung der Methode von Colin de Verdière alle Eisensteinschen Reihen, die zu Spitzenformen bezüglich maximal parabolischer Gruppen gehören, analytisch fortsetzen. Wir gehen darauf etwas ausführlicher ein.

Es sei G eine reductive algebraische Gruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist. Wir fixieren eine maximal kompakte Untergruppe $K \subset G(\mathbb{A})$. Es sei $P \subset G$ eine maximale parabolische Untergruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist, mit Levi-Komponente M . $A_0^2(P)$ sei der in §3 definierte Raum der automorphen Spitzenformen. In [Mu1] wurde die Methode von Colin de Verdière so verallgemeinert, daß damit alle Eisensteinschen Reihen der Form

$$E(\phi, \lambda, g), \quad \phi \in A_0^2(P),$$

analytisch fortgesetzt werden können. Es sei α die einfache Wurzel von (P, A_M) und $\tilde{\alpha} = \langle \rho_P, \alpha \rangle^{-1} \rho_P$.

Dann hängt $E(\phi, \lambda, g)$ nur von $\lambda \in \mathbb{C}\tilde{\alpha}$ ab. Es sei

$$E(\phi, s, g) := E(\phi, s\tilde{\alpha}, g).$$

Aus obiger Methode der analytischen Fortsetzung ergibt sich folgende Verallgemeinerung von Selbergs Resultat (4.2).

Satz 4.1. *Es sei $n = \dim G(\mathbb{R})/K_\infty$. Für alle $\phi \in A_0^2(P)$ existieren ganze Funktionen $\tilde{E}(\phi, s, g)$ und $h(s)$ der Ordnung $\leq n + 2$, so daß*

$$E(\phi, s, g) = \frac{\tilde{E}(\phi, s, g)}{h(s)}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Mittels Langland's Theorie der residualen Eisensteinschen Reihen [L] wurde dies in [Mu2] auf Eisensteinsche Reihen zu beliebigen P und $\phi \in A^2(P)$ verallgemeinert.

Es sei π eine automorphe Spitzendarstellung von $M(\mathbb{A})$ und

$$M(w, \pi, s) := M(w, \pi, s\tilde{\alpha}),$$

wobei $M(w, \pi, \lambda)$ der Verkettungsoperator (2.12) ist. Es sei $\phi \in \mathcal{H}_P^0(\pi)$, $\phi = \otimes_v \phi_v$. Dann folgt aus (2.11) und Satz 4.1, daß $M(w, \pi, s)\phi$ ebenfalls der Quotient von zwei ganzen Funktionen der Ordnung $\leq n + 2$ ist.

Auf Grund von (2.17) hat dies Konsequenzen für die automorphen L -Funktionen, die im Verkettungsoperator auftreten. Dies wurde von Gelbart und Shahidi in [GS] genauer untersucht. Es sei G quasizerfallend und π sei eine generische Spitzendarstellung von $M(\mathbb{A})$ (siehe [Sh1] für die Definition von "generisch"). Es seien $r_i : {}^L M \rightarrow \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$ die Darstellungen, die in (2.17) auftreten und es seien $L_S(s, \pi, r_i)$ die entsprechenden L -Funktionen. Shahidi [Sh1] hat gezeigt, daß für generische π lokale L -Faktoren $L_p(s, \pi, r_i)$ an den verzweigten Stellen $p \in S$ existieren. Es sei

$$L(s, \pi, r_i) = \prod_{p \in S} L_p(s, \pi, r_i) \cdot L_S(s, \pi, r_i)$$

die vervollständigte L -Funktion. Weiterhin können die lokalen Verkettungsoperatoren $M(w, \pi_v, s)$ durch die lokalen L -Faktoren und ϵ -Faktoren normalisiert werden [Sh1]. Dann haben Gelbart und Shahidi [GS] folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.2. *Die normalisierten lokalen Verkettungsoperatoren seien für $v \in S$ ungleich Null und holomorph für $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2$. Dann haben die L -Funktionen $L(s, \pi, r_i)$, $i = 1, \dots, m$, nur endlich viele Pole und sind meromorphe Funktionen der Ordnung 1.*

Es sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \pi, r_i)$ im Streifen $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, $|\mathrm{Im}(s)| \leq T$. Dann folgt, daß $c > 0$ existiert, so daß

$$N(T) \leq cT \log T. \quad (4.4)$$

Auf Grund von (2.17) ergibt dies für die Anzahl der Polstellen des Verkettungsoperators in $\mathcal{H}_P(\pi)^K$ eine analoge Abschätzung. In [Mu1] wurden gröbere, aber allgemeingültige Abschätzungen für die Anzahl

der Pole bewiesen. Eine Abschätzung der Form (4.4) kann man nur für arithmetische Gruppen Γ erwarten.

Wir bezeichnen mit R die rechtsreguläre Darstellung von $G(\mathbb{A})$ im Hilbertraum $L^2(Z(\mathbb{R})^0 G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))$ und es sei R^d die Einschränkung von R auf den Unterraum, der von allen irreduziblen Teildarstellungen von R aufgespannt wird. Für $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ sei

$$R^d(f) = \int_{G(\mathbb{A})} f(g) R^d(g) dg.$$

Dann folgt aus den in [Mu1] bewiesenen Resultaten über die Pole der Eisensteinschen Reihen folgendes Theorem.

Theorem 4.3. *Für alle K -endlichen $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ ist $R^d(f)$ ein Operator der Spurklasse.*

In [Mu6], und unabhängig von Ji in [Ji], wurde dies auf alle Funktionen $f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A}))$ verallgemeinert. Theorem 4.3 ist von Bedeutung für die Arthur-Selbergsche Spurformel, die wir im nächsten Abschnitt behandeln.

5. SPURFORMEL UND EXISTENZ VON SPITZENFORMEN

Die Spurformel ist gegenwärtig eines der wichtigsten Hilfsmittel, um Probleme in der Theorie der automorphen Formen und L -Funktionen anzugreifen. Insbesondere hofft man, daß man mit Hilfe der Spurformel das Funktorialitätsprinzip, d.h., Vermutung B allgemein beweisen kann. Darüber hinaus sind viele andere Anwendungen der Spurformel zu erwarten wie z.B. Anwendungen auf die Untersuchung der Feinstruktur des diskreten Spektrums und der Existenz von automorphen Formen.

Die Idee der Spurformel geht auf Selberg zurück [Se], [Se1], der sie für die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ entwickelt hat. Arthur [A1],[A2], hat die Spurformel auf allgemeine reductive Gruppen verallgemeinert. Allerdings gibt es bei der Arthurschen Spurformel gegenwärtig noch eine Reihe analytischer Probleme und die Spurformel hat noch nicht die explizite Form der Selbergschen Spurformel für $SL_2(\mathbb{R})$ erreicht. Die Arthursche Spurformel wird zur Zeit in erster Linie zum Vergleich von Spurformeln für unterschiedlich Gruppen G im Zusammenhang mit dem Funktorialitätsprinzip angewendet. Arthur und Clozel [AC] haben z.B. mit Hilfe der Spurformel die Existenz von Basiswechsel für zyklische Erweiterungen eines Zahlkörpers im Falle von GL_n bewiesen.

Wir betrachten zuerst den Fall $G = SL_2(\mathbb{R})$. Es sei $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe 1. Art. Die Anzahl der Spitzen von $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ sei m . Es

sei Δ der hyperbolische Laplace-Operator. Wir fassen Δ auf als unbeschränkten Operator in $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ mit dem Definitionsbereich $C_0^\infty(\Gamma \backslash \mathbb{H})$. Es sei $\overline{\Delta}$ die selbstadjungierte Erweiterung von Δ . Das Spektrum von $\overline{\Delta}$ besteht aus dem Punktspektrum $\sigma_p(\overline{\Delta})$ und dem absolut stetigen Spektrum $\sigma_{ac}(\overline{\Delta})$. Nach Selberg [Se] gilt

$$\sigma_{ac}(\overline{\Delta}) = [1/4, \infty), \quad (5.1)$$

wobei jeder Punkt die Vielfachheit m hat. Das Punktspektrum besteht aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

mit ∞ als den einzig möglichen Häufungspunkt. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind die Maaßschen automorphen Funktionen. Es ist sehr wenig über das Punktspektrum bekannt. Selbst für die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ wurde bisher kein Eigenwert explizit angegeben. Die Existenz von Maaßschen automorphen Spitzenfunktionen ist nach wie vor mysteriös. Man erwartet, daß Spitzenformen im wesentlichen nur für arithmetische Gruppen Γ existieren. Dies wird wesentlich unterstützt durch die Arbeit von Phillips und Sarnak [PS]. Auf Grund von (5.1) sind alle Eigenwerte $\lambda \geq 1/4$ eingebettet in das stetige Spektrum. Wie aus der mathematischen Physik bekannt ist, sind eingebettete Eigenwerte sehr instabil gegenüber Störungen. Colin de Verdiere [CV1] hat gezeigt, daß für eine generische Störung der hyperbolischen Metrik der Laplace-Operator für diese Metrik keine eingebetteten Eigenwerte hat. Bei "Einschalten" der Störung gehen die Eigenwerte in Resonanzen über. Aus diesem Grund können allgemeine Methoden zur Untersuchung von Eigenwerten elliptischer Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten nicht angewendet werden.

Eine Methode zur Untersuchung des diskreten Spektrums ist die Selbergsche Spurformel. Für $\lambda \geq 0$ sei

$$N(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\}.$$

Dann gilt

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{\text{Area}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} \quad (5.2)$$

[CV1], [Do]. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sei $f(\Delta)$ mittels Spektralsatz definiert. Es sei $L_p^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, der Unterraum von $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$, der von den Eigenfunktionen von $\overline{\Delta}$ aufgespannt wird. Dann folgt aus (5.2), daß

$$f(\Delta)_p := f(\Delta) \upharpoonright L_p^2(\Gamma \backslash \mathbb{H})$$

ein Operator der Spurklasse ist und die Spur gegeben ist durch

$$\mathrm{Tr}(f(\Delta)_p) = \sum_j f(\lambda_j),$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergiert. Der Inhalt der Spurformel ist es nun, diese Spur auf anderem Wege zu berechnen. Dazu bemerken wir zuerst, daß $f(\Delta)$ ein Integraloperator mit einem C^∞ -Kern $K(z_1, z_2)$ ist. Dieser Kern kann wie folgt beschrieben werden. Es sei $h \in C^\infty(G)$ die sphärische Fouriertransformation von f . Dann ist h biinvariant unter $K = SO(2)$. Es sei f so gewählt, daß der Träger von h kompakt ist. Dann ist

$$K(g_1 K, g_2 K) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(g_1^{-1} \gamma g_2). \quad (5.3)$$

Es seien $E_1(z, s), \dots, E_m(z, s)$ die Eisensteinschen Reihen bezüglich Γ . Weiter sei

$$K_p(z_1, z_2) = K(z_1, z_2) - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) E_j(z_1, 1/2 + i\lambda) E_j(z_2, 1/2 - i\lambda) d\lambda. \quad (5.4)$$

Dann ist $K_p(z_1, z_2)$ der Integralkern von $f(\Delta)_p$ und es ist

$$\mathrm{Tr}(f(\Delta)_p) = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} K_p(z, z) d\mathrm{vol}(z). \quad (5.5)$$

Dies ist die erste Stufe der Spurformel. Die nächste Stufe ist die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite. Dazu verwendet man (5.3) und (5.4). Das kontinuierliche Spektrum und jede Konjugationsklasse von Γ liefern einen Beitrag zum Integral. Um die entgültige Form der Spurformel anzugeben, gehen wir mittels $\lambda = s(1-s)$ zum Spektralparameter s über. Wir schreiben also die Eigenwerte als

$$\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2,$$

mit $r_j \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(r_j) \geq 1/2$. Es sei f eine analytische Funktion im Streifen $|\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{1}{2} + \delta$, $\delta > 0$, so daß gilt

$$f(z) = f(-z), \quad |f(z)| \leq C(1 + |z|)^{-2-\delta}.$$

Es sei $C(s)$ die Streumatrix, die durch (2.5) definiert ist und

$$\phi(s) = \det C(s).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß Γ keine Elemente endlicher Ordnung enthält. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_j f(r_j) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi'(1/2 + ir)}{\phi(1/2 + ir)} dr + \frac{1}{4} \phi(1/2) f(0) \\
&= \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r f(r) \tanh(\pi r) dr \\
&\quad + \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \frac{l(\gamma_0)}{2 \sin h\left(\frac{l(\gamma)}{2}\right)} \widehat{f}(l(\gamma)) \\
&\quad - \frac{m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1 + ir) dr + \frac{m}{4} f(0) - m \ln 2 \widehat{f}(0).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dabei durchläuft $\{\gamma\}_\Gamma$ alle Γ -Konjugationsklassen von hyperbolischen Elementen $\gamma \in \Gamma$. Jede solche Konjugationsklasse bestimmt eine geschlossene Geodäte τ_γ auf $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ und $l(\gamma)$ bezeichnet die Länge von τ_γ . Jedes hyperbolische Element γ ist ein Potenz eines primitiven Elementes γ_0 .

Die linke Seite von (5.6) enthält alle Beiträge des Spektrums und wird daher "spektrale Seite" genannt. Die rechte Seite enthält nur geometrische Daten und wird "geometrische Seite" der Spurformel genannt. Die spektrale Seite enthält als Beitrag des kontinuierlichen Spektrums das Integral, das durch die Streumatrix gegeben ist. Um also die Spurformel zur Untersuchung des diskreten Spektrums anwenden zu können, benötigt man Informationen über die geometrische Seite und die Streumatrix. Als Beispiel betrachten wir den Wärmeleitungsoperator $e^{-t\Delta}$, $t > 0$. Die entsprechende Funktion $f_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die in die Spurformel einzusetzen ist, ist gegeben durch

$$f_t(r) = e^{-(1/4+r^2)t}.$$

Die entsprechende Funktion $h_t \in C^\infty(G)$, die den Wärmeleitungskern auf der oberen Halbebene repräsentiert, hat keinen kompakten Träger, liegt aber im Schwarz-Raum $\mathcal{C}^1(G)$ von G . Für diese Funktionen gilt die Spurformel (5.6) ebenfalls. Wir setzen f_t in die Spurformel ein und untersuchen das Verhalten der rechten Seite für $t \rightarrow 0$. Als erstes betrachten wir die Beiträge der hyperbolischen Konjugationsklassen. Für die Fouriertransformation von f_t gilt

$$\widehat{f}_t(x) = \frac{e^{-t/4-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Damit ist der hyperbolische Term gleich

$$H(t) := \sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \frac{l(\gamma_0)}{2 \sin h \left(\frac{l(\gamma)}{2} \right)} \frac{e^{-t/4 - l(\gamma)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$$

und es folgt unmittelbar

$$H(t) = O(e^{-c/t})$$

für $t \rightarrow 0$. Die restlichen Terme kann man entsprechend behandeln und erhält

$$\begin{aligned} \sum_j e^{-t\lambda_j} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/4+r^2)t} \frac{\phi'(1/2+ir)}{\phi(1/2+ir)} dr \\ = \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{H})}{4\pi} t^{-1} + O(t^{-1/2} \log t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

für $t \rightarrow 0$. Für eine beliebige Gruppe Γ ist sehr wenig bekannt über die Eigenschaften der Streumatrix, so daß man aus (5.7) keine Rückschlüsse auf die Existenz von Eigenwerten ziehen kann. Andererseits ist für $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Streumatrix gegeben durch (2.4). Für die logarithmische Ableitung der Riemannschen Zetafunktion gilt bekanntlich

$$\left| \frac{\zeta'(1+ir)}{\zeta(1+ir)} \right| \leq C(\log |r|)^6, \quad |r| \geq 3,$$

[Pa]. Zusammen mit den entsprechenden Abschätzungen der logarithmischen Ableitung der Γ -Funktion folgt daraus, daß das Integral auf der linken Seite von (5.7) abgeschätzt werden kann durch $Ct^{-1/2}(\log t)^6$ für $t \leq 1$. Daraus folgt

$$\sum_j e^{-t\lambda_j} = \frac{\text{Vol}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H})}{4\pi} t^{-1} + O(t^{-1/2}(\log t)^6).$$

Die Anwendung eines Tauberschen Satzes ergibt die Gültigkeit der Weylschen Formel für $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$N(\lambda) = \frac{\text{Vol}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H})}{4\pi} \lambda + o(\lambda),$$

die von Selberg in [Se] bewiesen wurde. Die gleiche Methode führt auf die Weylsche Formel für alle Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$.

Es sei

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |\text{Re}(z)| \leq 1/2, \quad |z| \geq 1 \right\}$$

der Standardfundamentalebene von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann ist F invariant bezüglich der Abbildung $T_{-1}(z) = -\bar{z}$. Daher kann man die Maaßschen automorphen Funktionen in gerade und ungerade einteilen. Die Eisensteinsche Reihe (2.2) ist gerade. Deshalb hat Δ im Raum der

ungeraden L_2 -Funktionen rein diskretes Spektrum. Daher kann man die Existenz von ungeraden Spitzenfunktionen mit Standardmethoden wie z.B. dem Mini-Max-Prinzip beweisen. Für die Existenz von geraden Spitzenfunktionen existiert gegenwärtig nur die oben beschriebene Methode, die auf Anwendung der Spurformel beruht.

Für eine allgemeine reductive Gruppe G gibt es die Spurformel von Arthur [A2], die adèlisch formuliert ist und sich daher auf arithmetische Gruppen beschränkt. Im Falle höheren Ranges ist dies auf Grund der Resultate von Margulis aber keine Einschränkung. Die Spurformel von Arthur ist eine Identität von Distribution auf der Gruppe $G(\mathbb{A})^1$ der Form

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}} J_\chi(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{D}} J_{\mathfrak{o}}(f), \quad f \in C_0^\infty(G(\mathbb{A})^1).$$

Die Distributionen $J_{\mathfrak{o}}$ werden parametrisiert durch halbeinfache Konjugationsklassen in $G(\mathbb{Q})$ und sind im wesentlichen gewichtete Orbitalintegrale, d.h., diese Distributionen enthalten die geometrische Information. Die Distributionen J_χ sind definiert durch abgeschnittene Eisensteinsche Reihen. Sie werden parametrisiert durch die Menge der cuspidalen Daten \mathfrak{X} . Diese Menge besteht aus Orbitalen unter der Weylgruppe von Paaren (M_B, r_B) , wobei M_B die Levi-Komponente einer parabolischen Standarduntergruppe ist und r_B ist eine irreduzible automorphe Spitzendarstellung von $M_B(\mathbb{A})^1$.

In [A3] hat Arthur explizite Formeln für die Distributionen J_χ angegeben. Sie können ausgedrückt werden durch verallgemeinerte logarithmische Ableitungen von Verkettungsoperatoren. Es sind Verallgemeinerungen der Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(r) \operatorname{Tr} \left(\frac{d}{ds} C(1/2 + ir) C(1/2 - ir)^{-1} \right) dr.$$

Mit Hilfe der Faktorisierungseigenschaften der Verkettungsoperatoren und (2.17) führt dies auf Integrale, die logarithmische Ableitungen von automorphen L -Funktionen und Ableitungen von lokalen Verkettungsoperatoren enthalten. Die Untersuchung der Distributionen J_χ führt damit auf ein lokales und ein globales Problem. Das globale Problem bedeutet vor allem die Untersuchung des Verhaltens von

$$\frac{L'_S(1 + it, \pi, r_j)}{L_S(1 + it, \pi, r_j)}$$

für $|t| \rightarrow \infty$, wobei $L_S(s, \pi, r_j)$ automorphe L -Funktionen sind, die in den konstanten Termen der Verkettungsoperatoren auftreten. Man erwartet, daß sich die logarithmischen Ableitungen genauso verhalten wie

im Falle der Riemannschen Zetafunktion. Dies bedeutet insbesondere die Existenz von nullstellenfreien Bereichen in $\operatorname{Re}(s) < 1$.

Das lokale Problem hängt eng mit der Ramanujan-Vermutung zusammen. Für Details verweisen wir auf [Mu7].

Die Hoffnung, daß diese Probleme lösbar sind, führt auf die Vermutung, daß die Weylsche Formel im höheren Rang Fall stets gilt. Es sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe, die über \mathbb{Q} definiert ist, und $K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ eine maximal kompakte Untergruppe. Es sei $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$ und $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$ ein nichtuniformes Gitter. Es sei Δ der Laplace-Operator auf $\Gamma \backslash X$ bezüglich einer invarianten Metrik auf X . Es seien

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

die Eigenwerte von Δ in $L^2(\Gamma \backslash X)$. Sei

$$N(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\}.$$

In [Mu8], [Sa] wurde folgende Vermutung aufgestellt.

Vermutung C: *Wenn $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}} G > 1$ ist, so ist*

$$N(\lambda) = \frac{\operatorname{Vol}(\Gamma \backslash X)}{\Gamma(n/2 + 1)(4\pi)^{n/2}} \lambda^{n/2} + o(\lambda^{n/2})$$

für $\lambda \rightarrow \infty$ und $n = \dim X$.

Bisher sind nur wenige Fälle bekannt, für die die Weylsche Formel gilt. Efrat [Ef] hat gezeigt, daß für Hilbertsche Modulmannigfaltigkeiten $\Gamma \backslash \mathbb{H}^n$ die Vermutung C richtig ist. S. Miller [Mi] hat dies für $SL_3(\mathbb{Z})$ bewiesen.

LITERATUR

- [A1] J. Arthur, *The invariant trace formula. I. Local theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 323–383.
- [A2] J. Arthur, *The invariant trace formula. II. Global theory*, J. Amer. Math. Society **1** (1988), 501–554.
- [A3] J. Arthur, *On a family of distributions obtained from Eisenstein series I: Applications of the Paley-Wiener theorem*, Amer. J. Math. **104** (1982), 1243–1288.
- [A4] J. Arthur, *Automorphic representations and number theory*. 1980 Seminar on Harmonic Analysis (Montreal, Que., 1980), pp. 3–51, CMS Conf. Proc., **1**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1981.
- [A5] J. Arthur, *A stable trace formula. II. Global descent*. Invent. Math. **143** (2001), 157–220.
- [AC] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals Math. Studies **120**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.

- [AG] J. Arthur and S. Gelbart, *Lectures on automorphic L -functions*, L -functions and arithmetic (Durham, 1989), pp. 1–59, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [Ch] K. Chandrasekharan; *Arithmetical functions*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **167**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [CV] Y. Colin de Verdière, *Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe de séries d'Eisenstein*, C.R. Acad. Sc. Paris **293** (1981), 361–363.
- [CV1] Y. Colin de Verdière, *Pseudo-laplaciens. I*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 275–286.
- [Co] A. Connes, *Formula de Trace en Géométrie Non-Commutative et Hypothèse de Riemann*, CR ACAD SC., Paris, **323** I, (1996), 1231–1236.
- [Co1] A. Connes Noncommutative geometry and the Riemann zeta function. Mathematics: frontiers and perspectives, 35–54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [Cr] B. Conrey, *More than $2/5$ of the Zeros of the Riemann Zeta Function are on the Critical Line*, J. Reine Angew. Math, **399**, 1–26, (1989).
- [De] C. Deninger, *Evidence for a cohomological approach to analytic number theory*. First European Congress of Mathematics, Vol. I (Paris, 1992), 491–510, Progr. Math., 119, Birkhuser, Basel, 1994.
- [De1] C. Deninger, *On dynamical systems and their possible significance for arithmetic geometry*. In: Regulators in analysis, geometry and number theory, 29–87, Progr. Math., 171, Birkhuser Boston, Boston, MA, 2000.
- [Di] P.G. Lejeune Dirichlet, *Gesammelte Werke*, Bd.1, herausgegeben von L. Kronecker, Georg Reiner, Berlin, 1889.
- [Do] H. Donnelly, *On the cuspidal spectrum for finite volume symmetric spaces*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 239–253.
- [Ef] I. Efrat, *Cusp forms and higher rank*, Thesis, N.Y.U., 1983.
- [Fa] L.D. Faddeev, *The eigenfunction expansion of Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobacevskii plane*, (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obsc. **17**(1967), 323–350.
- [FP] B.S. Pavlov und L.D. Faddeev, *Scattering theory and automorphic functions*. (Russian) In: Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions, 6. Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) **27** (1972), 161–193.
- [Ge] S. Gelbart, *An elementary introduction to the Langlands program*, Bull. Amer. Math. Soc. **10** (1984), no. 2, 177–219.
- [GS] S. Gelbart and F. Shahidi, *Boundedness of automorphic L -functions in vertical strips*. J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 79–107.
- [GS1] S. Gelbart and F. Shahidi, *Analytic properties of automorphic L -functions*. Perspectives in Mathematics, **6**. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [Ha] H. Hamburger, *Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ -Funktion I., II., III.*, Math. Zeitschr. **10** (1921); **11** (1922); **13** (1922). 240–254.
- [H] E. Hecke, *Mathematische Werke*, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.
- [IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L -functions*. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 705–741.

- [JPS] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, and J.A. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), 367-464.
- [Ji] L. Ji, *The trace class conjecture for arithmetic groups*. J. Differential Geom. **48** (1998), 165-203.
- [JZ] L. Ji and M. Zworski, *Scattering matrices and scattering geodesics of locally symmetric spaces*. Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **34** (2001), 441-469.
- [Ka] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [Kn] A.W. Knap, *Introduction to the Langlands program*, In: Representation Theory and Automorphic Forms, (Edinburgh, 1996), pp. 245-302, Proc. Sympos. Pure Math., **61**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [L] R.P. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, Lectures in modern analysis and applications, III, pp. 18-61. Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer, Berlin, 1970.
- [L1] R.P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math. **544**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [L2] R.P. Langlands, *Euler products*, Yale Mathematical Monographs, 1. Yale University Press, New Haven, Conn.-London, 1971.
- [LP] P. Lax, R. Phillips, *Scattering Theory for Automorphic Functions*, Annals of Math. Studies **87**, Princeton University Press, 1976.
- [Ma] H. Maaß, *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **121**, (1949), 141-183.
- [Me] M. Metha, *Random Matrices*, Second Edition, Academic Press, Boston, (1991).
- [Mi] S.D. Miller, *Cusp forms for $SL_3(\mathbb{Z}) \backslash SL_3(\mathbb{R}) / SO_3(\mathbb{R})$* , Thesis, Princeton University, 1997.
- [Mo] H. Montgomery, *The Pair Correlation of Zeroes of the Zeta Function*, Proc. Sym. Pure Math., **24**, AMS, 181-193, (1973).
- [Mu1] W. Müller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Annals of Math. **130** (1989), 473-529.
- [Mu2] W. Müller, *On the singularities of residual intertwining operators*, Geom. funct. anal. **10** (2000), 1118-1170.
- [Mu3] W. Müller, *On the analytic continuation of rank one Eisenstein series*. Geom. funct. anal. **6** (1996), 572-586.
- [Mu4] W. Müller, *Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume*. Invent. Math. **109** (1992), 265-305.
- [Mu5] W. Müller, *Manifolds with cusps of rank one. Spectral theory and L_2 -index theorem*. Lecture Notes in Mathematics, **1244**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Mu6] W. Müller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms. II*, Geom. Funct. Analysis **8** (1998), 315-355.
- [Mu7] W. Müller, *On the spectral side of the Arthur trace formula, I: The tempered spectrum*, Preprint, Bonn, 2001.
- [Mu8] W. Müller, *Eigenvalue estimates for locally symmetric spaces of finite volume*, In: Symposium on PDE (Holzhau, 1988), Teubner-Texte Math., Vol. **112**, Teubner, Leipzig, 1989, pp. 179-196.

- [Ne] A. Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*. Publ. Math. I.H.E.S. **21** (1964), 1-128.
- [Od] A. Odlyzko, *The 10^{20} -th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of it's Neighbors*, (preprint A.T.T., 1989), <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko>.
- [Pa] K. Prachar, *Primzahlverteilung*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 91. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [PS] R.S. Phillips und P. Sarnak, *On cusp forms for co-finite subgroups of $PSL(2, R)$* . Invent. Math. 80 (1985), 339-364.
- [R] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Gesammelte Mathematische Werke, pp. 177-185, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [Ru] M.O. Rubinstein, *Evidence for a spectral interpretation of the zeros of L -functions*, Thesis, Princeton University, 1998.
- [RS] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Principal L -functions and Random Matrix Theory*, Duke Math J., **81**, 2, 269-322, (1996).
- [Sa] P. Sarnak, *On cusp forms*. In: The Selberg trace formula and related topics, pp. 393-407, Contemp. Math., 53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Sa1] P. Sarnak, *L -functions*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. I, 453-465
- [Se] A. Selberg, *Harmonic analysis*, in "Collected Papers", Vol. I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1989), 626-674.
- [Se1] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47-87.
- [Se2] A. Selberg, *On the Zeros of Riemann's Zeta Function*, Skr. Norske Vid-Akad., Oslo I, **10**, 1-59, (1941).
- [Sh1] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; Complementary series for p -adic groups*, Annals Math. **132** (1990), 273-330.
- [Sh2] F. Shahidi, *On certain L -functions*, Amer. J. Math. **103** (1981), 297-356.
- [TW] R. Taylor, A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Math., **141**, (1995), 553-572
- [Tm] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, second ed., Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [VW] J. van de Lune, J.J. te Riele, and D.T. Winter, *On the zeros of the Riemann zeta function on the critical strip. IV*, Math. Comp. **46** (1986), no. 174, 667-681.
- [Wi] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Annals of Math., **141**, (1995), 443-551.

UNIVERSITÄT BONN, MATHEMATISCHES INSTITUT, BERINGSTRASSE 1, D - 53115
BONN, GERMANY
E-mail address: mueller@math.uni-bonn.de