INFINITESIMALRECHNUNG IV
(FUNKTIONENTHEORIE I)

WERNER MÜLLER

Inhaltsverzeichnis

Date: Sommersemester 1999.

1. Holomorphe Funktionen

Definition 1.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion. f heißt in $z_0 \in U$* **komplex differenzierbar**, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

Wir erinnern uns daran, daß die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

folgendes bedeutet: Es existiert ein $a \in \mathbb{C}$ so, daß gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in U : |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a \right| < \epsilon.$$

Falls eine soches a existiert, ist $a = f'(z_0)$.

Äquivalente Formulierung

Lemma 1.2. *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge U ist genau dann in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, wenn eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ existiert mit*
1) φ ist in z_0 stetig;
2) $\forall z \in U : f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z)$.

Beweis: $\Rightarrow$) Es sei $\varphi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Daher ist φ in z_0 stetig und nach Definition von φ ist

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z).$$

$\Leftarrow$) Wenn eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z), \quad z \in U,$$

existiert, so ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varphi(z).$$

Da $\varphi(z)$ in z_0 stetig ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0).$$

□

Folgerung 1.3. *Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist, so ist f in z_0 stetig.*

Beweis: Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, so existiert nach Lemma 1.2 eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ so, daß

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z), \quad z \in U,$$

gilt. Daraus folgt

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

□

Definition 1.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.*
1) Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in U$ **holomorph**, *wenn eine Umgebung $U_0 \subset U$ von z_0 existiert so, daß f für alle $z \in U_0$ komplex differenzierbar ist.*
2) f heißt **holomorph** *auf U, wenn f für alle $z \in U$ komplex differenzierbar in z ist.*

Beispiele: 1) $f(z) = z$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Daher ist f in z_0 komplex differenzierbar und es gilt $f'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
2)$f(z) = \overline{z}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $z - z_0 = re^{i\theta}$. Dann ist

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0}=\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}.$$

Daraus folgt, daß $\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}$ keinen Grenzwert für $z\to z_0$ haben kann.
Wir haben damit ein einfaches Beispiel einer stetigen Funktion $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gefunden, die nirgends komplex differenzierbar ist.

Einfache Eigenschaften

Satz 1.5. *Seien $f,g:U\to\mathbb{C}$ in $z_0\in U$ komplex differenzierbar. Dann gilt:*
1) $f+g$ ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0).$$

2) fg ist in z_0 komplex differenzierbar und

$$(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0).$$

3) Sei $g(z_0)\neq 0$. Dann ist f/g in z_0 komplex differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Beweis: Analog zum reellen Fall. Übung!

Satz 1.6. *(Kettenregel) Seien $U,V\subset\mathbb{C}$ offen und $f:U\to V$, $g:V\to\mathbb{C}$ seien Funktionen. Es sei f in z_0 und g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar. Dann ist $g\circ f$ in z_0 komplex differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Beweis: Sei $w_0=f(z_0)$. Aus Lemma 1.2 folgt, daß eine in z_0 stetige Funktion $\varphi:U\to\mathbb{C}$ und eine in w_0 stetige Funktion $\psi:V\to\mathbb{C}$ existieren so, daß

$$\begin{aligned} f(z)&=f(z_0)+(z-z_0)\varphi(z), \quad z\in U,\\ g(w)&=g(w_0)+(w-w_0)\psi(w), \quad w\in V.\end{aligned}$$

Weiter ist $\varphi(z_0)=f'(z_0)$ und $\psi(w_0)=g'(w_0)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(g\circ f)(z)=g(f(z))&=g(f(z_0))+(f(z)-f(z_0))\psi(f(z))\\ &=g(f(z_0))+(z-z_0)\varphi(z)\psi(f(z)).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Nach Folgerung 1.3 ist f stetig in z_0. Daher ist $\psi(f(z))$ in z_0 stetig. Hieraus folgt, daß die Funktion $z \longmapsto \varphi(z)\psi(f(z))$ in z_0 stetig ist. Aus (1.1) und Lemma 1.2 folgt damit, daß $(g \circ f)(z)$ in z_0 komplex differenzierbar ist und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = \varphi(z_0)\psi(f(z_0)) = f'(z_0)g'(f(z_0)).$$

□

Definition 1.7. *Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. Die Abbildung $f : U \to V$ heißt* **biholomorph**, *wenn gilt:*
1) f ist bijektiv.
2) f und f^-1 sind holomorph.

Satz 1.8. *$f : U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn gilt:*
1) f ist holomorph und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$.
2) f ist bijektiv.
3) f^{-1} ist stetig. Wenn $f : U \to V$ biholomorph ist, so ist

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}, \quad z \in U.$$

Beweis: Übung!

Satz 1.9. *1) Jedes Polynom $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i, z^i$ ist eine holomorphe Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*
2) Es seien $p(z), q(z)$ Polynome, $q(z) \not\equiv 0$, und $U = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$. Dann ist $p(z)/q(z)$ holomorph auf U.

2. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ mittels der Abbildung $z = x + iy \longmapsto (x, y)$ und betrachten f als Funktion von (x, y). Wir erinnern uns daran, daß $f : U \to \mathbb{C}$ in $z \in U$ reell differenzierbar ist genau dann, wenn eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert so, daß gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - T(h)}{|h|} = 0. \tag{2.1}$$

Dann ist $T = df(z)$ das Differential von f in z. Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ in $z \in U$ komplex differernzierbar ist, so existiert $f'(z)$ und es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - f'(z) \cdot h}{h} = 0. \tag{2.2}$$

Es sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$T(h) = f'(z) \cdot h, \quad h \in \mathbb{C}.$$

Aus (2.2) folgt, daß mit diesem T (2.1) gilt, d.h., $f : U \to \mathbb{C}$ ist reell differenzierbar und für $df(z)$ gilt

$$df(z)(h) = f'(z) \cdot h.$$

Es seien $u, v : U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy), \quad (x,y) \in U.$$

Dann ist

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{2.3}$$

Wenn f in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar ist, so folgt, daß u und v in (x_0, y_0) reell differenzierbar sind. Insbesondere existieren in (x_0, y_0) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y.$$

Es sei $h \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h,y_0) - v(x_0,y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0,y_0)}{ih} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0,y_0+h) - v(x_0,y_0)}{ih} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Durch Vergleich dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

Dies sind die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**. Es gilt also

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

Satz 2.1. *Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z \in U$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *f ist in $z \in U$ komplex differenzierbar.*
2) *f ist in z reell differenzierbar und das Differential $df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.*
3) *f ist in z reell differenzierbar, und für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$u_x(z) = v_y(z),\ u_y(z) = -v_x(z).$$

Beweis: 1) $\Leftrightarrow$ 2)
Oben haben wir bereits 1) $\Rightarrow$ 2) gezeigt. Es sei umgekehrt f reell differenzierbar in z und $df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei $\mathbb{C}$-linear. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit

$$df(z)(h) = c \cdot h, \quad h \in \mathbb{C}.$$

Dann folgt aber

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - c \cdot h}{h} = 0.$$

und daher ist f in z komplex differenzierbar mit $f'(z) = c$.
2) $\Leftrightarrow$ 3)
Das Differential $df(z)$ ist gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Es sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $T(h) = c \cdot h$. Es sei $c = a + ib$, $h = h_1 + ih_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$c \cdot h = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1).$$

Als Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat T die Matrixdarstellung

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Wenn T umgekehrt eine Matrixdarstellung der Form (2.5) hat, so ist $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex linear. Zusammen mit (2.4) folgt daraus, daß $df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex-linear ist genau dann, wenn

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

gilt.

$\square$

Es sei $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. In Infini II haben wir folgendes hinreichendes Kriterium für die reelle Differenzierbarkeit von f bewiesen: Wenn die Funktionen $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ in $z \in U$ stetig partiell differenzierbar sind, so ist $f : U \to \mathbb{R}^2$ in $z \in U$ reell differenzierbar. Zusammen mit Satz 2.1 erhalten wir daraus das folgende Korollar.

Korollar 2.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ und $f = u + iv$, $u, v : U \to \mathbb{R}$. Es gelte:*

1) *u, v sind in $z \in U$ stetig partiell differenzierbar.*
2) *$u_x(z) = v_y(z)$, $u_y(z) = -v_x(z)$.*

Dann ist f in z komplex differenzierbar.

Wir führen jetzt den wichtigen Begriff des Gebietes ein. Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt bekanntlich zusammenhängend, wenn folgendes gilt: Für alle offenen Teilmengen $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$ mit $U = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ist entweder $U = V_1$ oder $U = V_2$.

Definition 2.3. *Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt* **Gebiet**.

Korollar 2.4. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Es sei $z = x + iy$, $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Bei der Herleitung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen haben wir gezeigt, daß

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -iu_y(z) + v_y(z)$$

gilt. Wenn $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$ ist, so folgt daraus $u_x(z) = u_y(z) = 0$ und $v_x(z) = v_y(z) = 0$ für alle $z \in G$. Da G zusammenhängend ist, folgt daraus mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß u und v konstant sind.

□

Beispiele: 1) Die Exponentialfunktion e^z ist definiert durch

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Es sei $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Daher ist

$$u := \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y, \quad v := \mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Aus Korollar 2.2 folgt daher, daß e^z für alle $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist und

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^z.$$

2) Es sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und

$$\log(z) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = x + iy \in U.$$

Für $z = x \in \mathbb{R}^+$ stimmt $\log(z)$ mit der Logarithmusfunktion $\log(x)$ überein. Dies rechtfertigt die Bezeichnung $\log(z)$.
Es sei

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) \quad \text{und} \quad v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{y}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Damit gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und aus Korollar 2.2 folgt, daß $\log(z)$ für alle $z \in U$ komplex differenzierbar ist und es gilt

$$
\begin{aligned}
(\log(z))' = u_x(z) + iv_x(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{1}{x^2}\frac{y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \\
&= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}
$$

In U ist $\log(z)$ der Hauptzweig der komplexen Logarithmusfunktion. Wir werden später zeigen, daß gilt

$$
\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \quad \text{für } |z-1| < 1.
$$

3) Ist $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ in der offenen Menge U holomorph, so gilt in U:

$$
|f'(z)|^2 = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2.
$$

Dies folgt aus

$$
|f'(z)|^2 = f'(z)\overline{f'(z)} = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = u_x^2 + v_x^2
$$

und $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. $|f'(z)|^2$ ist also der Wert der Determinante der Jacobimatrix der Abbildung $(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$. Insbesondere foglt daraus

$$
\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle } z = x + iy \in U.
$$

Falls $f'(z) \neq 0$, so ist die Determinante positiv.

Harmonische Funktionen

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erhält man eine notwendige Bedingung dafür, daß eine reelle Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ der Realität einer holomorphen Funktion ist.

Satz 2.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Für $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ gelte $u, v \in C^2(U)$. Dann gilt*

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.
$$

Beweis: Da $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, gilt in U:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da $u, v \in C^2(U)$ ist, folgt aus dem Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Aus (2.6) folgt damit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

□

Bemerkungen:
1) Die zusätzliche Annahme in Satz 2.5, daß u, v zweimal stetig differenzierbar sind, ist in Wahrheit überflüssig, da wir später zeigen werden, daß eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ beliebig oft komplex differenzierbar ist.
2) Der partielle Differentialoperator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

heißt Laplace-Operator. Mit Bemerkung 1) folgt aus Satz 2.5, daß für eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ der Realteil $u = \operatorname{Re} f$ und der Imaginärteil $v = \operatorname{Im} f$ der Gleichung

$$\Delta h = 0$$

genügen. Solche Funktionen h nennt man **harmonische Funktionen**. In der Theorie der partiellen Differenialgleichungen zeigt man, daß jede Lösung der Gleichung $\Delta h = 0$ unendlich oft differenzierbar ist.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

In ddiesem Abschnitt führen wir die partiellen Ableitungen nach z und $\overline{z}$ ein. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^2$ in $z \in U$ reell differenzierbar. Dann existiert das Differential $df(z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie wir wissen, können wir das Differential durch die partiellen Ableitungen wie folgt ausdrücken:

$$df(z)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 df(z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 df(z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Bezüglich der Indentifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow i.$$

Daher ist für $df(z)$, aufgefaßt als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathbb{C}$:

$$df(z)(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad df(z)(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} df(z)(h_1 + ih_2) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)(h_1 + ih_2) \qquad (2.7) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right)(h_1 - ih_2). \end{aligned}$$

Für die Linearkombinationen der reellen Differentiale auf der rechten Seite führen wir eine neue Bezeichnung ein.

Definition 2.6. *Die Wirtinger-Ableitungen sind definiert durch*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).}$$

Dies bedeutet folgendes: Sei $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Aus (2.7) erhalten wir

$$\boxed{df(z)(h) = h\,\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \overline{h}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z), \quad h \in \mathbb{C}.}$$

Satz 2.7. *Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *f ist reell differenzierbar in z_0;*
2) *Es existieren Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : U \to \mathbb{C}$, die stetig in z_0 sind so, daß für alle $z \in U$ gilt*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi_1(z) + (\overline{z} - \overline{z}_0)\varphi_2(z).$$

Dann ist $\varphi_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ und $\varphi_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

Beweis: $\Rightarrow$) In Infini II haben wir gezeigt, daß f genau dann in $z \in U$ reell differenzierbar ist, wenn eine Abbildung

$$\Lambda : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

existiert mit

a) Λ ist stetig in z_0;
b) $f(z) = f(z_0) + \Lambda(z)(z - z_0)$.

Sei $\phi_1(z) := \Lambda(z)(1)$ und $\phi_2(z) := \Lambda(z)(i)$. Dann ist

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\phi_1(z) + (y - y_0)\phi_2(z), \tag{2.8}$$

wobei $z = x + iy$ und $z_0 = x_0 + iy_0$ ist. Wir setzen

$$\varphi_1(z) := \frac{1}{2}(\phi_1(z) - i\phi_2(z)),$$
$$\varphi_2(z) := \frac{1}{2}(\phi_1(z) + i\phi_2(z)).$$

Dann folgt aus (2.8):

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi_1(z) + (\overline{z} - \overline{z}_0)\varphi_2(z).$$

Da Λ in z_0 stetig ist, sind φ_1 und φ_2 in z_0 stetig.

$\Leftarrow$) Übung!

□

Satz 2.8. *Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1) *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

2) *f ist in z_0 reell differenzierbar und es gilt:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

Beweis: Sei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Dann ist $f = u + iv$. Aus Satz 2.1 folgt: f ist in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ und $u_y(z_0) = -v_x(z_0)$ gelten. Dies ist äuquivalent zu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$$

□

Rechenregeln für $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar.

1) $\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ sind $\mathbb{C}$-linear und es gilt die Leibnizregel.
2) $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}}.$
3) Wenn f reell ist, so ist $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}}.$
4) $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$
5) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \dfrac{1}{4}\Delta f.$
6) $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial g}{\partial \overline{w}} \cdot \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial g}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial g}{\partial w} \cdot \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$

Beim Differenzieren können wir daher z und $\overline{z}$ so behandeln, als ob z und $\overline{z}$ unabhängige Variablen wären.

3. Potenzreihen

Satz 3.1. *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f(z)$ in $B_R(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} k! \binom{n}{k} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

für alle $z \in B_R(z_0)$ *und* $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es genügt den Fall $k = 1$ zu betrachten. Sei

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Dann gilt für den Konvergenzradius R_1 von g:

$$R_1 = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R.$$

Daher ist $g : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig.
Behauptung: $f' = g$.
O.B.d.A. sei $z_0 = 0$. Sei $a \in B_R(0)$ und sei

$$q_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} a + \cdots + a^{n-1}.$$

Dann ist

$$z^n - a^n = (z - a) q_n(z).$$

Daraus folgt, daß

$$f(z) - f(a) = \sum_{n \geq 1} a_n (z^n - a^n) = (z - a) \sum_{n \geq 1} a_n q_n(z)$$

ist. Sei

$$\varphi_1(z) = \sum_{n \geq 1} a_n q_n(z).$$

Dann ist

1. $f(z) = f(a) + (z - a)\varphi_1(z)$.
2. $\varphi_1(a) = \sum_{n \geq 1} a_n q_n(a) = \sum_{n \geq 1} a_n n a^{n-1} = g(a)$.

Weiter gilt für $|a| < r < R$:

$$\| a_n q_n \|_{B_r(0)} = \sup_{z \in B_r(0)} |a_n q_n(z)| \leq |a_n| n r^{n-1}.$$

Daher ist

$$\sum_{n \geq 1} \| a_n q_n \|_{B_r(0)} \leq \sum_{n \geq 1} n |a_n| r^{n-1} < \infty.$$

Dies zeigt, daß φ_1 auf $B_r(0)$ normal konvergiert, und daher ist die Funktion $\varphi_1 : B_r(0) \to \mathbb{C}$ stetig. Aus Lemma 1.2 folgt, daß f in a komplex differenzierbar ist und es gilt:

$$f'(a) = \varphi_1(a) = g(a).$$

□

4. Elementare Funktionen

Mit Hilfe von Satz 3.1 können wir jetzt nicht rationale holomorphe Funktionen konstruieren.

1) **Exponentialfunktion**
Die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

hat den Konvergenzradius ∞ und daher ist e^z auf Grund von Satz 3.1 eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Eigenschaften:

1. $\forall z, w \in \mathbb{C}: \ e^z e^w = e^{z+w}$.
2. $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
3. $(e^z)' = e^z$.
4. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $x, y \in \mathbb{R}$
5. Es sei $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist surjektiv.

Beweis: 1) folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz. Aus 1) folgt $e^z e^{-z} = 1$. Daraus folgt 2). 3) ergibt sich mittels Satz 3.1 durch differenzieren der Exponentialreihe. 4) folgt aus 1) und der Eulerschen Formel. Zum Beweis von 5) sei $w \in \mathbb{C}^x$. Dann ist $w = re^{i\theta}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Aus Infini I wissen wir, daß $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ein Diffeomorphismus ist. Weiter ist $\log = \exp^{-1}$. Sei $z = \log r + i\theta$. Dann ist $e^z = re^{i\theta} = w$.

□

Sei

$$S_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 2n\pi \leq \operatorname{Im} \operatorname{Re} z < 2(n+1)\pi\}.$$

Dann induziert exp eine bijektive Abbildung

$$\exp : S_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^\times.$$

Es sei $(\mathbb{C}, +)$ die additive Gruppe und $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ die multiplikative Gruppe.

Lemma 4.1. exp *ist ein surjektiver Homomoorphismus*

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$$

und es gilt

$$\ker(\exp) = \{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Sei $e^z = 1$ und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $|e^z| = e^x = 1$. Daraus folgt $x = 0$ und $e^{iy} = 1 = \cos y + i \sin y$. Daher ist $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Somit existiert $k \in \mathbb{Z}$ so, daß $y = 2\pi k$ ist.

□

Aus diesem lemma folgt, daß die folgende Sequenz exakt ist.

$$0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \to 1.$$

2) **Trigonometrische Funktion.**
Die Reihen

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

haben ebenfalls den Konvergenzradius ∞ und definieren daher auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Für die Ableitungen gilt

$$(\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z.$$

Wir geben noch einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen an.

i) $e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$

Beweis: Durch Addition der Reihen.

Daraus erhält man

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C}$$

ii) Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(w+z) = \sin w \cos z + \cos w \sin z$$
$$\cos(w+z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z.$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \sin z = 0\} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\} = \{\frac{1}{2}\pi + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis: Es ist

$$2i\sin z = e^{-iz}(e^{2iz}-1)$$
$$2\cos z = e^{i(\pi-z)}(e^{2i}(z-\frac{1}{2}\pi)-1).$$

Wir definieren schließlich $\tan z$ und $\cot z$ durch

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{\frac{1}{2}+\pi\mathbb{Z}\}$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}.$$

4) **Logarithmus**

Wie wir oben gezeigt haben ist $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^\times$ surjektiv und $\ker(\exp) = 2\pi\mathbb{Z}$. Daraus folgt, daß für jedes $z\in\mathbb{C}^\times$ unendlich viele $w\in\mathbb{C}$ existieren mit $e^w = z$. Der Logarithmus ist also eine mehrdeutige Funktion.

Definition: Sei $z\in\mathbb{C}^\times$. Jedes $w\in\mathbb{C}$ mit $e^w=z$ heißt **ein Logarithmus** von z.

Die Logarithmen zu einer Zahl z kann man leicht angeben. Sei $z = re^{i\varphi}\in\mathbb{C}^\times$. Für $n\in\mathbb{Z}$ sei $w_n = \log r + i(\varphi+2\pi n))$. Dann gilt $e^{w_n}=z$ und $\{w_n \mid n\in\mathbb{Z}\} = \exp^{-1}(z)$.

Für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt $(e^z)' = e^z\neq 0$. Daher folgt aus dem Umkehrsatz, daß $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^x$ lokal umkehrbar ist.

Definition 4.2. *Es sei $G\subset\mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $\lambda: G\to\mathbb{C}$ heißt* **Logarithmusfunktion** *oder* **Zweig des Logarithmus** *in G, wenn gilt*

$$\exp(\lambda(z)) = z, \quad \forall z\in G.$$

Lemma 4.3. *Sei $G\subset\mathbb{C}^\times$ ein Gebiet und $\lambda: G\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1) *λ ist eine Logarithmusfunktion in G.*
2) *Es gilt $\lambda'(z) = \dfrac{1}{z}$ in G und es existiert $a\in G$ mit* $\exp(\lambda(a)) = a$.

Beweis: $1\Rightarrow 2)$

Aus $\exp(\lambda(z)) = z$ folgt durch differenzieren $1 = \exp(\lambda(z))\lambda'(z) = z\lambda'(z)$. Daraus folgt $\lambda'(z) = \frac{1}{z}$.

$2)\Rightarrow 1)$

Sei $g(z) = z\exp(-\lambda(z))$, $z\in G$. Dann ist g holomorph in G und

$$g'(z) = \exp(-\lambda(z)) - z\exp(-\lambda(z))\lambda'(z) = 0.$$

Aus Korollar 2.2 folgt, daß ein $c\in\mathbb{C}^\times$ existiert so, daß $g(z)=c$ für alle $z\in G$. Daraus folgt $\exp(\lambda(z)) = cz$. Da $\exp(\lambda(a)) = a$, ist c=1.

□

Existenz von Logarithmusfunktionen

Satz 4.4. *Die Funktion*

$$\log z := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-k)^k$$

ist eine Logarithmusfunktion in $B_1(1)$.

Beweis: $\lambda(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k$ konvergiert für $|z-1| < 1$. Aus Satz 3.1 folgt, daß $\lambda(z)$ holomorph in $B_1(1)$ ist und

$$\lambda'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(z-1)^k = \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z}.$$

Da $\log 1 = 0$, ist $e^{\log 1} = 1$. Aus Lemma 4.3 folgt daher, daß $\log z$ eine Logarithmusfunktion in $B_1(1)$ ist.

□

Hauptzweig des Logarithmus

Es sei $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Für $z \in \mathbb{C}^-$ ist $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$. Sei

$$\log z := \log |z| + i\varphi.$$

Satz 4.5. $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ *ist eine Logarithmusfunktion und es gilt*

$$\log(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \text{ \textit{für} } \quad z \in B_1(1).$$

Beweis: Übung!

Definition: $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ heißt **Hauptzweig** des Logarithmus.

5) **Potenzen**

Es sei $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die b-te Potenz

$$\boxed{a^b = \exp(b \log a).}$$

Wir können die Potenz auf zwei Weisen als Funktion auffassen. Einmal $x \in \mathbb{R}^+ \to x^b$, und zum anderen $x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x$. Wir benutzen diese Formel, um die allgemeine Potenz für komplexe a und b zu definieren.

Sei $a \in \mathbb{C}^\times$ und $b \in \mathbb{C}$. Weiter sei $\log a$ ein Logarithmus von a. Dann setzen wir wie oben

$$a^b = \exp(b \log a)$$

und nennen dies einen Wert der b-ten Potenz von a.

Beispiel: Sei $b = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ und $a = 1$. Dann ist $\log(1) = 2\pi i k$ ein Logarithmus von 1 und

$$e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

sind die verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$.
Entsprechend möchten wir jetzt $z \to a^z$ und $z \to z^b$ als holomorphe Funktionen betrachten. Dazu müssen wir wieder Zweige wählen.

Definition 4.6. *Es sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet,* $\log : G \to \mathbb{C}$ *ein Zweig des Logarithmus und $w \in \mathbb{C}$. Die Funktion*

$$P_w(z) = \exp(w \log(z)), \quad z \in G,$$

heißt **Zweig** *der w-ten Potenz.*

Lemma 4.7. *Für P gilt:*

1) $P_w : G \to \mathbb{C}$ *ist holomorph.*
2) $P'_w = w P_{w-1}$
3) $\forall w, v \in \mathbb{C}: \; P_w P_v = P_{w+v}$.
4) *Für* $n \in \mathbb{N}: \; P_n(z) = z^n, \quad z \in G$.

Beweis: Übung!

Wenn wir für $\log(z)$ den Hauptzweig wählen, so bezeichnen wir $P_w(z)$ auch mit z^w und nennen diese Funktion den Hauptzweig der Potenzfunktion.

Beispiele: 1)

$$\boxed{i^i = e^{i \log(i)} = e^{i\pi/2i} = e^{-\pi/2}}$$

2) Es sei $b = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $z^{1/n}$ die n-Zweige

$$\exp(\frac{1}{n} \log z), \; e^{2\pi i 1/n} \exp(\frac{1}{n} \log z), \ldots, e^{2\pi i \frac{n-1}{n}} \exp(\frac{1}{n} \log z)$$

5. Holomorphie und winkeltreue Abbildungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der geometrischen Charakterisierung holomorpher Funktionen. Es sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $T(z) = c \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$. Sei $z = re^{i\varphi}$, $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

i) $z \longmapsto rz$ ist eine Streckung.
ii) $z \longmapsto e^{i\varphi}z$ ist Drehung um den Winkel φ.

Diese Drehung ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben.
Hieraus folgt: T erhält Winkel.
Der Cosinus des Winkels φ zwischen $w \neq 0$ und $z \neq 0$ ist gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{\langle w, z\rangle}{|w||z|}.$$

Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bijektiv, $\mathbb{R}$-linear.

Definition 5.1. *T heißt* **winkeltreu**, *wenn gilt:*

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : |w||z|\langle T(w), T(z)\rangle = |T(w)||T(z)|\langle z, w\rangle.$$

Wir haben oben gesehen, daß jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T(z) = c \cdot z$, $z \in \mathbb{C}$, winkeltreu ist.

Lemma 5.2. *Es sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare, bijektive Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist winkeltreu;*
2) $\exists a \in \mathbb{C}^\times$: *Entweder* $\forall z \in \mathbb{C} : Tz = az$ *oder* $\forall z \in \mathbb{C} : Tz = a\overline{z}$.
3) $\exists s > 0\ \forall z, w \in \mathbb{C} : \langle Tz, Tw\rangle = s\langle z, w\rangle$.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2)
Da T winkeltreu ist, gilt

$$0 = \langle i, 1\rangle = \langle T(i), T(1)\rangle.$$

Nach Voraussetzung ist T injektiv. Daher ist $T(1) \neq 0$ und $T(i) \neq 0$. Weiter gilt

$$\sqrt{2}\langle T(i+1), T(i)\rangle = |T(i+1)||T(i)|.$$

Daraus folgt $|T(i)|\sqrt{2} = |T(i+1)|$ und schließlich

$$|T(i)| = |T(1)|.$$

Sei $a = |T(1)|$ und $U = a^{-1}T$. Dann ist U unitär. Daher existiert $\varphi \in [0, 2\pi)$ so, daß entweder

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ oder } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gilt. Einer Drehung um den Winkel φ in $\mathbb{R}^2$ entspricht die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ in $\mathbb{C}$. Es sei $c = ae^{i\varphi}$. Dann folgt, daß entweder $T(z) = c \cdot z$ oder $T(z) = c \cdot \overline{z}$ ist.

2)$\Rightarrow$ 3) Es sei $a \in \mathbb{C}^\times$ so, daß $T(z) = a \cdot z$ oder $T(z) = a\overline{z}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle Tw, Tz \rangle &= |a|^2 \langle w, z \rangle \text{ oder} \\ \langle Tw, Tz \rangle &= |a|^2 \langle \overline{w}, \overline{z} \rangle = |a|^2 \langle w, z \rangle. \end{aligned}$$

Sei $s = |a|^2 > 0$. Dann folgt

$$\langle Tw, Tz \rangle = s \langle w, z \rangle.$$

3) $\Rightarrow$ 2) Sei $s > 0$ so, daß

$$\forall z, w \in \mathbb{C}: \ \langle Tw, Tz \rangle = s \langle z, w \rangle.$$

Dann ist $|Tz| = \sqrt{s}|z|$ und daher ist T injektiv. Weiter ist

$$|w||z| \langle Tw, Tz \rangle = |w||z| s \langle w, z \rangle = |Tw||Tz| \langle w, z \rangle.$$

$\square$

Definition 5.3. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Abbildung. f heißt* **winkeltreu** *in $z \in G$, wenn $df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ winkeltreu ist. f heißt* **winkeltreu**, *wenn f in jedem Punkt $z \in G$ winkeltreu ist.*

Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt **antiholomorph**, wenn $\overline{f} : G \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz 5.4. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1) *f ist holomorph in G oder antiholomorph in G und es gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ bzw. $\overline{f}'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.*
2) *f ist winkeltreu.*

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2)
Für $z \in G$ ist

$$df(z)(h) = h \frac{\partial f}{\partial z}(z) + \overline{h} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z).$$

Aus Satz 2.8 folgt:

$$
\begin{aligned}
f \text{ holomorph } &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0 \\
\overline{f} \text{ holomorph } &\Rightarrow \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Daher gilt entweder

$$\forall z \in G : df(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)h, \quad h \in \mathbb{C}$$

oder

$$\forall z \in G : df(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\overline{h}, \quad h \in \mathbb{C}.$$

2) $\Rightarrow$ 1)
Für alle $z \in G$ ist

$$df(z)(h) = h\,\frac{\partial f}{\partial z}(z) + \overline{h}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

Wenn f winkeltreu in $a \in G$ ist, so ist entweder $f_{\overline{z}}(a) = 0$ und $f_z(a) \neq 0$, oder $f_z(a) = 0$ und $f_{\overline{z}}(a) \neq 0$.
Es sei

$$g(a) = \frac{f_z(a) - f_{\overline{z}}(a)}{f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)}.$$

Dann ist $g : G \to \{\pm 1\}$ eine stetige Abbildung. Da G zusammenhängend ist, ist $g \equiv 1$ oder $g \equiv -1$. Daraus folgt: Entweder gilt

$$\forall a \in G : f_z(a) = 0 \text{ und } f_{\overline{z}}(a) \neq 0$$

oder

$$\forall a \in G : f_z(a) \neq 0 \text{ und } f_{\overline{z}}(a) = 0.$$

Aus Satz 2.8 folgt, daß entweder f oder $\overline{f}$ in G holomorph ist.

□

Orientierung

Um holomorphe und antiholomorphe Funktionen zu unterscheiden, benutzen wir die Orientierung von $\mathbb{C}$.

Definition 5.5. *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion. f heißt* **orientierungstreu** *in $a \in G$, wenn* $\det(df(a)) > 0$.

Sei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Dann ist die Jacobi-Matrix von f gegeben durch

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det(df(a)) = u_x(a)v_y(a) - u_y(a)v_x(a)$$

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in a. Dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(a) = v_y(a),\ u_y(a) = -v_x(a).$$

Daraus folgt

$$\det(df(a)) = u_x(a)^2 + v_x(a)^2 = u_y(a)^2 + v_y(a)^2 = |f'(z)| \geq 0.$$

Wenn $f'(z) \neq 0$, so ist $\det(df(a)) >$. Wenn $\overline{f} : G \to \mathbb{C}$ in $a \in G$ holomorph ist, so gilt

$$u_x(a) = -v_y(a),\ u_y(a) = v_x(a).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \det(df(a)) &= -(u_x(a)^2 + v_x(a)^2) \\ &= -(u_y(a)^2 + v_y(a)^2) \\ &= -|\overline{f}'(z)|^2 < 0. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

Satz 5.6. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetig reell differenzierbare Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *f ist holomorph in G, und es gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.*
2) *f ist winkeltreu und orientierungstreu in G.*

6. Kurvenintegrale

Wir entwickeln in diesem Abschnitt die Grundlagen der komplexen Integralrechnung.

Definition 6.1. *Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt* **Integrationsweg**, *wenn γ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist.*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Sei

$$fdz := fdx + ifdy.$$

Dann ist $\omega_f = fdz$ eine stetige 1-Form auf G.

Definition 6.2. *Für einen Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sei*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma \omega_f.$$

Es sei $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $x(t) = \operatorname{Re}\gamma(t)$, $y(t) = \operatorname{Im}\gamma(t)$. Dann ist

$$\dot\gamma(t) = \dot x(t) + i\dot y(t).$$

Lemma 6.3. *Es gilt*

$$\int_\gamma fdz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt. \tag{6.1}$$

Beweis: Nach Definition von $\int_\gamma \omega_f$ ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma fdz = \int_\gamma fdx + i\int_\gamma fdy &= \int_a^b f(\gamma(t))\dot x(t)dt + i\int_a^b f(\gamma(t))\dot y(t)dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))(\dot x(t) + i\dot y(t))dt = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt.\end{aligned}$$

□

Bemerkungen 1) Sei

$$Z:\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

eine Zerlegung und

$$\xi = \{\xi_i \mid \xi_i \in [t_{i+1}, t_i],\ i = 0, \ldots, k-1\}.$$

Menge von Stützstellen. Sei

$$I(Z,\xi,f)=\sum_{i=0}^{k-1} f(\gamma(\xi_i))(\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)).$$

Dann gilt

$$\int_\gamma f\,dz=\lim_{\delta(Z)\to 0} I(Z,\xi,f),$$

wobei $\delta(Z)=\max\{t_{i+1}-t_i \mid i=0,\dots,k-1\}$.
Man vergleiche dies mit dem Kurvenintegral auf Infini III, das definiert ist als das Integral von f über die Untermannigfaltigkeit $\Gamma=\gamma([a,b])$. Dieses Integral ist definiert als Grenzwert Riemannscher Summen der Form

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(\gamma(\xi))|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)|.$$

2) Mittels der Formel (6.1) kann man $\int_\gamma f\,dz$ definieren für eine stetige Funktion $f:\Gamma\to\mathbb{C}$, wobei $\Gamma=\gamma([a,b])$.

Eigenschaften des Kurvenintegrals

Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ein Integrationsweg.

1) $\int_\gamma : C^0(G)\to\mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.
2) Sei $\gamma:[a,c]\to\mathbb{C}$ Integrationsweg, $a<b<c$, $\gamma_1=\gamma\restriction[a,b]$, $\gamma_2=\gamma\restriction[b,c]$. Dann ist

$$\int_\gamma f\,dz=\int_{\gamma_1} f\,dz+\int_{\gamma_2} f\,dz.$$

3) Sei $\rho:[c,d]\to[a,b]$ Diffeomorphismus. Dann ist

$$\int_{\gamma\circ\rho} f\,dz=\epsilon\int_\gamma f\,dz.$$

$$\epsilon=\begin{cases}1, & \rho'(t)>0.\\ -1, & \rho'(t)<0.\end{cases}$$

4) Für $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sei $\gamma^-:[a,b]\to\mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma^-(t)=\gamma(a+b-t).$$

Dann ist

$$\int_{\gamma^-} f dz = -\int_\gamma f dz.$$

5)

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))|.$$

6) Sei $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. (f_n) konvergiere auf $\Gamma([a,b])$ gleichmäßig gegen f. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Stammfunktionen

Definition 6.4. *E sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $F : U \to \mathbb{C}$ heißt* **Stammfunktion** *von f, wenn F holomorph ist und $F' = f$ gilt. Wir sagen, f habe* **lokale Stammfunktionen** *auf U, wenn zu jedem $z \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von z existiert so, daß $f \mid V$ eine Stammfunktion hat.*

Lemma 6.5. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann hat f eine Stammfunktion auf U genau dann, wenn die 1-Form $\omega = f dz$ eine Stammfunktion auf U hat.*

Beweis: $\Rightarrow$) Sei $F : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $F' = f$. Dann ist

$$f = \frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Daraus folgt

$$\omega = f dz = f dx + i f dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dF.$$

$\Leftarrow$) Sei $F : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar und es gelte $dF = \omega$. Dann ist

$$f dx + i f dy = f dz = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f = -i\frac{\partial F}{\partial y}$$

und damit ist

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0.$$

Auf Grund von Satz 2.8 ist F holomorph und es gilt:

$$F' = \frac{\partial F}{\partial x} = f.$$

$\square$

Wir können daher die Sätze über Pfaffsche Formen auf Kurvenintegrale anwenden.

Satz 6.6. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion F besitzt. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Folgerung 6.7. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion besitzt. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in U gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Satz 6.8. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die lokale Stammfunktionen besitzt. Dann gilt für alle homotopen Integrationswege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$:*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Satz 6.9. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0,$$

so hat f eine Stammfunktion.

Beweis: Sei $a \in G$. Für $z \in G$ sei

$$\gamma_z : [0,1] \to \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\gamma_z(t) = tz + (1-t)a.$$

Da G konvex ist, ist $\gamma_z : [0,1] \to G$ ein stetiger Weg mit $\gamma_z(0) = a$, $\gamma_z(1) = z$. Es sei

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw.$$

Es seien $z, z+h \in G$ und

$$\gamma_{z,z+h} : [0,1] \to G$$

sei der Weg

$$\gamma_{z,z+h}(t) = t(z+h) + (1-t)z.$$

Auf Grund der Voraussetzung ist

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)dw$$

Da

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} f(z)dw,$$

folgt daraus

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{\gamma_{z,z+h}} (f(w) - f(z)) \right| \leq \max_{w \in [z,z+h]} |f(w) - f(z)|.$$

Da f stetig ist, konvergiert die rechte Seite gegen 0 für $h \to 0$. Daher ist F in z komplex differenzierbar und es gilt $F' = f$.

□

Korollar 6.10. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset G$ gelte*

$$\int_{\partial \triangle} f(z)dz = 0.$$

Dann hat f lokale Stammfunktionen.

Beweis: Da $G \subset \mathbb{C}$ offen ist, hat jeder Punkt $z \in G$ eine konvexe Umgebung.

□

7. Der Cauchysche Integralsatz

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es sei

$$\omega = f dz = f dx + i f dy.$$

Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die äquivalent sind zu

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dies ist die Integrabilitätsbedingung für die 1-Form ω. Wenn f' stetig ist, so folgt aus dem Lemma von Poincaré und Lemma 6.5, daß f lokale Stammfunktionen besitzt. Im allgemeinen folgt dies aus dem Lemma von Goursat.

Satz 7.1. *(Lemma von Goursat) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\triangle \subset U$:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Beweis: Wir zerlegen $\triangle$ in vier Teildreiecke $\triangle_1^1, \ldots, \triangle_1^4$, indem wir die Seitenmitten von $\triangle$ miteinander verbinden.
Dann gilt

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial\triangle_1^i} f(z)dz.$$

Es sei $\triangle_1$ eines der Dreiecke $\triangle_1^1, \ldots, \triangle_1^4$ so, daß $|\int_{\triangle_1} f(z)dz|$ maximalen Betrag hat. Dann folgt

$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\triangle_1} f(z)dz\right|.$$

Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir eine Folge von Teildreiecken

$$\triangle = \triangle_0 \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \cdots$$

mit

$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| \tag{7.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da alle $\triangle_n$ kompakt sind, existiert ein $z_0 \in \triangle$ mit

$$\bigcap_{n\geq 0} \triangle_n = \{z_0\}.$$

Da f in z_0 komplex differenzierbar ist, existiert nach Lemma 1.2 eine Funktion $\varphi : U \to \mathbb{C}$ mit

1) φ ist stetig in z_0 und $f'(z_0) = \varphi(z_0)$.
2) $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z)$.

Es sei

$$r(z) = \varphi(z) - \varphi(z_0).$$

Dann ist r stetig in z_0, $r(z_0) = 0$ und es gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)r(z).$$

Da die lineare Funktion

$$l(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

eine Stammfunktion besitzt, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\partial\triangle_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\triangle_n} (z - z_0)r(z)dz\right| \\ &\leq L(\partial\triangle_n) \max_{z\in\partial\triangle_n} (|z - z_0||r(z)|) \\ &\leq (L(\partial\triangle_n))^2 \max_{z\in\triangle_n} |r(z)|.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$L(\partial\triangle_n) = \frac{1}{2}L(\partial\triangle_{n-1}) = \cdots = 2^{-n}L(\partial\triangle).$$

Damit erhalten wir

$$\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)dz\right| \leq C4^{-n} \max_{z\in\triangle_n} |r(z)|.$$

Zusammen mit (7.1) ergibt sich

$$\left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \leq C \max_{z\in\triangle_n} |r(z)|.$$

Da $r(z) \to 0$ für $z \to z_0$ gilt, folgt daraus

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

□

Zusammen mit Korollar 6.10 erhalten wir aus Lemma 7.1 den folgenden Satz von Goursat.

Satz 7.2. *Jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ besitzt lokale Stammfunktionen.*

Wir können daher den Satz über Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen Pfaffscher Formen auf den vorliegenden Fall anwenden. Dazu führen wir noch den Begriff der freien Homotopie von Kurven ein.

Definition 7.3. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to X$ heißen frei homotop in X, wenn es eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ gibt mit*

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_0(t) \\ & \qquad\qquad \textit{für alle } t \in [a,b]\} \\ H(t,1) &= \gamma_1(t) \end{aligned}$$

$$H(a,s) = H(b,s) \quad \textit{für alle } s \in [0,1].$$

Für $s \in [0,1]$ sei $\gamma_s[a,b] \to X$ die Kurve $\gamma_s(t) = H(t,s)$. Dann sind alle γ_s, $s \in [0,1]$, geschlossene Kurven in X.

Es sei $x_0 \in X$ und $\gamma_{x_0} : [a,b] \to X$ sei die Kurve $\gamma_{x_0}(t) = x_0$ für alle $t \in [a,b]$. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ heißt **nullhomotop**, wenn $x_0 \in X$ existiert so, daß γ frei homotop zu γ_{x_0} ist.

Definition 7.4. *Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine zusmmenhängende Teilmenge. Dann heißt X* **einfachzusammenhängend**, *wenn jede gelschlossene Kurve γ in X nullhomotop ist.*

Satz 7.5. *(Cauchyscher Integralsatz) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gelten folgende Aussagen:*

1) *Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ frei homotope geschlossene Integrationswege, so ist*
$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$
2) *Ist $\gamma : [a,b] \to U$ eine nullhomotoper geschlossener Integrationsweg, so ist*
$$\int_\gamma f dz = 0.$$
3) *Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet, so kann fdz wegunabhängig in G integriert werden. Es sei $a \in U$. Dann ist*
$$F(z) := \int_a^z f(\zeta) d\xi, \quad z \in U,$$

eine Stammfunktion von f.

Der Beweis folgt im wesentlichen aus dem Satz über die Homotopieinvarianz von Pfaffschen Formen.

8. Die Integralformel von Cauchy

Satz 8.1. *Es sei $B = B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe. Dann gilt für alle $z \in B$*
$$\int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i.$$

Beweis: Es sei $h(z) := \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. Dann ist $h'(z) = \int_{\partial B} = \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}$. Dieses Integral verschwindet, da der Integrand die Stammfunktion $\zeta \longmapsto \frac{-1}{\zeta - z}$ hat. Also gilt
$$h(z) = h(z_0) = \int_{B_r(0)} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{i}{r} \int_0^{2\pi r} d\zeta = 2\pi i.$$
$\square$

Satz 8.2. *(Integralformel von Cauchy): Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $B = B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset G$. Dann gilt für alle $z \in B$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Beweis: Es sei $U \supset \overline{B}$ einfach zusammenhängend. Wähle $z \in B$ und betrachte die funktion $g : U \to \mathbb{C}$, die definiert ist durch

$$\zeta \longmapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z. \end{cases}$$

Wegen der Holomorphie von f ist g stetig in z und holomorph auf $U \setminus \{z\}$. Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z). \end{aligned}$$

□

Satz 8.3. *Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar. Ist f in eine Umgebung einer Kreisscheibe $\overline{B}$ holomorph, so gilt für alle $z \in B$, $n \in \mathbb{N}$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Beweis: Ableiten der Cauchy-Integralformel ergibt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

$\frac{f(\zeta}{(\zeta - z)^2}$ ist wieder eine holomorphe Funktion in ζ, also ist f' wieder komplex differenzierbar.

□

Holomorphiekriterien

Satz 8.4. *(Morera): Sei $G \in \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und für alle abgeschlossenen Dreiecke $\triangle \subset G$ gelte*

$$\int_{\partial \triangle} f dz = 0.$$

Dann ist f holomorph auf G.

Beweis: Nach dem Lemma von Goursat hat f lokal eine Stammfunktion F. Nach Definition ist F holomorph. Damit existiert $F'' = f'$.

$\square$

Satz 8.5. *(Riemannscher Hebbarkeitssatz): Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf einer Umgebung $U(z_0) \setminus \{z_0\}$ beschränkt, so existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : G \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{f}|(G \setminus \{z_0\}) = f$.*

Beweis: Die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & \text{für} \quad z \neq z_0 \\ 0, & \text{für} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist g holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$. Weiter gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

d.h., g ist in z_0 komplex differenzierbar und daher ist $g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gilt $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Daher hat g in z_0 eine Taylorentwicklung der Form

$$g(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in B_r(z_0).$$

Es sei

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2}.$$

Die Reihe konvergiert für $z \in B_r(z_0)$ und definiert daher eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$. Nach Definition gilt für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$\widetilde{f}(z) = (z - z_0)^{-2} g(z) = f(z).$$

Daher ist $\widetilde{f}$ die gesuchte holomorphe Fortsetzung von f auf G.

$\square$

9. Potenzreihenentwicklung

Im vorherigen Paragraphen haben wir gezeigt, daß eine einmal komplex differenzierbare Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Wir zeigen jetzt, daß holomorphe Funktionen sogar lokal in Potenzreihen entwickelt werden können.

Definition 9.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt um $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickelbar, wenn gilt: Es existiert eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \quad \textit{für alle } z \in U \cap B_R(z_0).$$

Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z \in U$, und

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid B_r(z_0) \subset U\}.$$

Sei $r < R$ fest und sei $\gamma = \partial B_r(z_0)$, wobei wir γ als positiv orientierte Kurve auffassen. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in B_r(z_0).$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \cdot \frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$$

für alle $z \in U$ mit $|z-z_0| < |\zeta - z_0|$. Daraus folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k\right) d\zeta, \quad z \in B_r(z_0).$$

Sei $z \in B_r(z_0)$ fest und $q = \frac{|z-z_0|}{|\zeta-z_0|}$. Dann ist $q < 1$ für $\zeta \in \gamma$ und

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\right| &\le \sum_{k=N}^{\infty}\frac{|z-z_0|^k}{|(\zeta-z_0)|^{k+1}} \\ &\le (\zeta-z_0)^{-1}\sum_{k=N}^{\infty} q^k < (\zeta - z_0)\frac{1}{1-q}q^N.\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ für $\zeta \in \gamma$ gleichmäßig konvergiert. Deshalb können wir die Reihe gliedweise integrieren:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta \right) (z - z_0)^k.$$

Sei

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta.$$

Dann ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für alle z mit $|z - z_0| < r$. Aus Satz 8.3 folgt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Daher ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z \in B_R(z_0).$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 9.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann f in jeder Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset U$ in eine Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

entwickelt werden und es gilt:

1) *Für den Konvergenzradius R von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt*

$$R \geq d(z_0, \partial U).$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

für $r < R$.

Bemerkung: Es sei R der Konvergenzradius von $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Dann gilt im allgemeinen nicht $f(z) = P(z)$ für $z \in B_R(z_0) \cap U$.

Satz 9.3. *Es sei*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in $B_R(z_0)$ *konvergent. Dann kann* P *in jedem* $z_1 \in B_R(z_0)$ *in eine Potenzreihe*

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

entwickelt werden und es gilt

$$R(Q) \geq R - |z_1 - z_0|.$$

Beweis: Folgt aus 9.2, da $P : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Satz 9.4. *Es sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *konvergent mit Konvergenzkreis* $B_R(z_0)$. *Dann existiert keine in einer offenen Umgebung* $U \supset \overline{B_R(z_0)}$ *definierte holomorphe Funktion* $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ *mit* $\widetilde{f}|B_R(z_0) = f$.

Beweis: Wir nehmen an, daß eine offene Menge $U \supset B_R(z_0)$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ existiert mit $\widetilde{f}|B_R(z_0) = f$. Aus Satz 9.2 folgt dann, daß ein $R' > R$ existiert so, daß

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

in $B_{R'}(z_0)$ konvergiert. Dann ist aber R nicht der Konvergenzradius von f. Widerspruch.

□

Bemerkung: Dies gilt nicht im Reellen.
Beispiel: Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Es gilt

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1. Andernseits ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und sogar reell analytisch.

Satz 9.5. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f : U \to \mathbb{C}$ *eine Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) f *ist holomorph.*
2) f *besitzt lokale Stammfunktionen.*
3) f *ist reell differenzierbar und* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$.
4) *Um jedes* $z_0 \in U$ *kann* f *in eine Potenzreihe entwickelt werden.*

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $A \subset G$ heißt **diskret** in G, wenn gilt: Für alle $z_0 \in G$ existiert ein $r > 0$ so, daß $B_r(z_0) \cap A$ endlich ist. Anders ausgeedrückt heißt dies: N ist diskret in G genau dann, wenn N keinen Häufungspunkt in G hat. Eine Teilmenge $N \subset G$, die in G diskret ist, kann Häufungspunkte auf dem Rande von G haben. Dann ist N nicht diskret als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Satz 9.6. *(Identitätssatz) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

1) $f(z) \equiv 0$
2) Es existiert $z_0 \in G$ mit $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.
3) Es existiert eine nichtdiskrete Teilmenge $N \subset G$ mit

$$\forall z \in \mathbb{N} : \; f(z) = 0.$$

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) klar.

2) $\Rightarrow$ 1)
Sei $z_0 \in G$ mit $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; f^{(k)}(z_0) = 0$. Sei

$$M = \{z \in G \mid f^{(k)}(z) = 0, \, \forall k \in \mathbb{N}_0\}$$

Dann gilt:

i) $M \neq \emptyset$, da $z_0 \in M$.
ii) M ist abgeschlossen in G.
Um dies zu zeigen, bemerken wir, daß

$$M = \bigcap_{k=0}^{\infty} \left\{z \in M \mid f^{(k)}(z) = 0\right\}$$

gilt. Da $f^{(k)} : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist jede der Mengen $(f^{(k)})^{-1}(0)$ abgeschlossen. Daher ist M als Durchschnitt abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.
iii) M ist offen.

Beweis: Sei $z_1 \in M$. Dann existiert $\epsilon > 0$ so, daß für alle $z \in B_\epsilon(z_1)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!}(z - z_1)^k$$

gilt. Da $z_1 \in M$ ist, ist $f^{(k)}(z_1) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Daher ist $f|B_\epsilon(z_1) \equiv 0$ und es folgt $B_\epsilon(z_1) \subset M$. Damit haben wir gezeigt, daß M offen ist.

Zusammengefaßt haben wir gezeigt, daß die Menge M eine nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmenge von G ist. Da G zusammenhängend ist, folgt $M = G$.

1) $\Rightarrow$ 3) klar.

3) $\Rightarrow$ 2) Sei N eine nichtdiskrete Teilmenge von G für die $f|N \equiv 0$ gilt. Da N nichtdiskret ist, existiert ein Häufungspunkt $z_0 \in G$ von N. Daher existiert eine Folge (z_k) von Elementen aus N mit

$$z_0 = \lim_{k\to\infty} z_k \quad \text{und} \quad z_k \neq z_l \text{ für alle } k, l \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen jetzt mittels Induktion, daß $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.
Induktion:

1) Es ist $f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = 0$.
2) Es sei $f^{(k)}(z_0) = 0$ für $k = 0, \ldots, n-1$.

Dann existiert $r > 0$ mit

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

für alle z mit $|z - z_0| < r$. Sei $|z_j - z_0| < r$. Dann ist

$$0 = f(z_j) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z_j - z_0)^k.$$

Sei

$$g(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}.$$

Die Reihe konvergiert absolut in der Kreisscheibe $B_r(z_0)$. Daher ist $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere ist g in z_0 stetig. Weiter ist

$$0 = a_n + (z_j - z_0) g(z_j).$$

Da g stetig in z_0 ist, folgt daraus:

$$a_n = \lim_{j\to\infty} (a_n + (z_j - z_0) g(z_j)) = 0.$$

$\square$

Korollar 9.7. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) $f \equiv g$
2) $\exists z_0 \in G$*:* $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*
3) $\exists N \subset G$ *mit*
   a) N *nichtdiskret in* G*.*
   b) $f(z) = g(z)$ *für alle* $z \in N$*.*

Beweis: Satz 9.6 auf $f - g$ anwenden.

Analytische Forsetzung

Es seien $G \subset G' \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Funktion. Aus dem Identitätssatz folgt, daß höchstens eine holomorphe

Funktion $g : G' \to \mathbb{C}$ existiert mit $g|G = f$. Wenn g existiert, so heißt g **die analytische Fortsetzung** von f nach G'.

Bemerkung: Dies gilt nicht für reell differenzierbare Funktionen.

Beispiel: Es sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

Dann ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion, die nicht identisch Null ist, aber auf $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ verschwindet.

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $C \subset G$ sei eine Kurve. Dann ist f durch $f|C$ eindeutig bestimmt. Daraus erhält man das sogenannte **Permanenzprinzip**, das besagt: "Identitäten, die auf C gelten pflanzen sich auf G fort."

Beispiel: 1) Es sei $f(z) = \cot(\pi z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wie wir wissen gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x+1) = f(x).$$

Sei $f_1(z) = f(z+1)$. Dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\colon f_1(x) = f(x).$$

Aus dem Identitätssatz folgt dann:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\colon f(z) = f(z+1).$$

2) Für die Exponentialfunktion gilt $e^x e^y = e^{x+y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Aus dem Identitätssatz folgt daher

$$\forall z, w : e^z e^w = e^{z+w}.$$

Dies haben wir auf anderem Wege mit Hilfe des Cauchy-Produktsatzes bewiesen.

Werte holomorpher Funktionen

Satz 9.8. *Sei G Gebiet und sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Für alle $a \in \mathbb{C}$ ist*

$$f^{-1}(a) := \{z \in G \mid f(z) = a\}$$

diskret und abgeschlossen in G (event. $= \emptyset$). Für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ ist $f^{-1}(a) \cap K$ endlich.

Beweis: 1) Sei $a \in \mathbb{C}$. Da $f : G \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt, daß $f^{-1}(a)$ abgeschlossen in G ist.

Wenn wir annehmen, daß $f^{-1}(a)$ nicht diskret ist, so folgt aus dem Identitätssatz, daß $f \equiv a$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist $f^{-1}(a)$ diskret.

2) Sei $K \subset G$ kompakt und $a \in \mathbb{C}$ sei so, daß $f^{-1}(a) \cap K$ unendlich ist. Dann existiert eine Folge (z_k) in $f^{-1}(a) \cap K$ mit $z_k \neq z_l$, $k \neq l$. Da $f^{-1}(a) \cap K$ kompakt ist, hat (z_k) einen Häufungspunkt z_0 in $f^{-1}(a) \cap K$. Da aber $f^{-1}(a)$ diskret ist, erhalten wir einen Widerspruch, d.h., $f^{-1}(a) \cap K$ ist endlich.

□

Bemerkung: Dies gilt nicht für reell differenzierbare Funktionen.

Beispiel: Es sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n = \frac{1}{\pi n}$. Dann ist $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $x_n \to 0$.

2) Die Nullstellen einer holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ können sich gegen den Rand von G häufen.

Beispiel: Es sei $f(z) = \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Dann ist $\left\{\frac{n\pi+1}{n\pi-1} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ die Menge der Nullstellen von f und es gilt $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi+1}{n\pi-1}$.

Nullstellen holomorpher Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Sei $f \not\equiv 0$. Dann folgt aus dem Identitätssatz, daß für alle $z_0 \in G$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Definition 9.9. *Für $z \in G$ sei*

$$o_z(f) := m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}.$$

$o_z(f)$ heißt die **Ordnung** *oder* **Vielfachheit** *von f in z.*

Es gilt

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow o_z(f) > 0.$$

Für $f \equiv 0$ setzen wir $o_z(f) := \infty$. Weiter sagen wir, daß f in $z_0 \in G$ den Wert $w \in \mathbb{C}$ von der Ordnung m annimmt, wenn

$$o_{z_0}(f - w) = m$$

gilt.

Lemma 9.10. *Für alle in $z \in G$ holomorphen Funktionen f, g gilt:*

1) *$o_z(fg) = o_z(f) + o_z(g)$.*
2) *$o_z(f+g) \geq \min(o_z(f), o_z(g))$. "=" gilt genau dann, wenn $o_z(f) \neq o_z(g)$.*

Beweis: Übung!

Lemma 9.11. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *f hat in $z_0 \in U$ eine Nullstelle der Ordnung n.*
2) *Für die Taylorentwicklung in z_0 gilt:*
$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_n \neq 0.$$
3) *Es existiert $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset U$ und es existiert eine holomorphe Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$.*

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) klar, da $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.
2) $\Rightarrow$ 3) Sei

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n}.$$

$g(z)$ konvergiert in einer Kreisscheibe $B_r(z_0)$ vom Radius $r > 0$. Daraus folgt, daß $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $g(z_0) = a_n \neq 0$ gilt. Aus der Definition von g folgt: $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.
3) $\Rightarrow$ 1)
Es existiere eine holomorphe Funktion $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ so, daß $f(z) = (z - z_0) g(z)$ ist für alle $z \in B_r(z_0)$. Aus der Leibnizregel folgt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n(n-1)\cdots(n-j+1)(z - z_0)^{n-j} g^{(j)}(z).$$

Für $k < n$ erhalten wir daraus $f^{(k)}(z_0) = 0$ und für $k = n$ folgt $f^{(n)}(z_0) = n! g(z_0) \neq 0$.

$\square$

Existenz singulärer Punkte

Satz 9.12. *Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann liegt auf dem Rand von $B_R(z_0)$ mindestens ein singulärer Punkt.*

Beweis: Sei $B = B_R(z_0)$.
Annahme: Jeder Punkt $w \in \partial B$ ist regulär.

Dann existiert zu jedem $w \in \partial B$ ein $r(w) > 0$ und eine holomorphe Funktion $g_w : B_{r(w)}(w) \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = g_w(z) \quad \text{für alle } z \in B_{r(w)}(w) \cap B.$$

Da ∂B kompakt ist, existieren $K_i = K_{r(w_i)}(w_i)$, $i = 1, \dots, m$ mit

$$\partial B \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Sei $g_i : K_i \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$g_i \mid K_i \cap B = f \mid K_i \cap B.$$

Es existiert $\exists R_1 > R$ mit $B_1 = B_{R_1}(z_0) \subset B \cup K_1 \cup \dots \cup K_m$. Wir definieren f_1: $B_1 \to \mathbb{C}$ wie folgt: Für $z \in B$ sei $f_1(z) = f(z)$. Für $z \in B_1 \setminus B$ wählen wir einen Kreis K_j mit $z \in K_j$ und setzen $f_1(z) = g_j(z)$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Kreises K_j. Denn es sei K_i ein weiterer Kreis mit $z \in K_i$. Da die Zentren von K_i und K_j auf ∂B liegen, folgt $K_i \cap K_j \cap B \neq \emptyset$. Weiter ist $g_i(z) = f(z) = g_j(z)$ für alle $z \in K_i \cap K_j \cap B$. Aus dem Identitätssatz folgt daher $g_i(z) = g_j(z)$ für alle $z \in K_i \cap K_j$.
Damit erhalten wir eine holomorphe Funktion $f_1 : B_1 \to \mathbb{C}$, die auf B mit f übereinstimmt. Auf Grund von Satz 9.4 ist dies aber nicht möglich. Daher ist unsere Annahme falsch, d.h., es existiert wenigstens ein singulärer Punkt auf ∂B.

□

10. Cauchysche Ungleichung und Maximumsprinzip

Satz 10.1. *(Cauchysche Ungleichung)*
Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Für $z \in B_r(z_0)$ sei $d_z = \min_{|\zeta - z_0| = r} |z - \zeta|$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $z \in B_r(z_0)$:

$$|f^{(n)}(z)| \le n! \frac{r}{d_z^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Beweis: Auf Grund der Cauchyschen Integralformel ist

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta$$

für alle $z \in B_r(z_0)$.
Daraus folgt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{|f(\xi)|}{|\zeta - z|^{n+1}}\, d\zeta \leq n! \frac{r}{d_z^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

□

Korollar 10.2. *Es gilt*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Bemerkung: Es sei

$$M(r) = \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|.$$

Dann gilt für die Taylorkoeffizienten $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ die Abschätzung

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Korollar 10.3. *Für $d < r$ und alle $z \in B_{r-d}(z_0)$ gilt:*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{d^{n+1}} r M(r).$$

Aus Satz 10.1 erhält man auch erste Aussagen über die Werteverteilung einer holomorphen Funktion.

Satz 10.4. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Wenn*

$$|f(z_0)| < \min_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

gilt, dann existiert $w \in B_r(z_0)$ mit $f(w) = 0$.

Beweis: Wir nehmen an, daß $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$ ist. Aus

$$|f(z_0)| < \min_{|z - z_0| = r} |f(z)|$$

folgt, daß $f(z) \neq 0$ gilt für alle $z \in \partial B_r(z_0)$. Daher ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \overline{B_r(z_0)}$. Daraus folgt, daß eine Umgebung V von $\overline{B_r(z_0)}$ existiert mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in V$. Es sei

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Dann ist $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph. Aus Korollar 10.2 für $n = 0$ folgt

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z-z_0|=r} |g(z)|,$$

d.h.

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{|z-z_0|=r} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min_{|z-z_0|=r} |f(z)|}.$$

Somit ist

$$|f(z_0)| \geq \min_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muß f wenigstens eine Nullstelle in $B_r(z_0)$ haben.

□

Satz 10.5. *(Gebietstreue) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Dann ist $f(G) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: Da f stetig ist, ist $f(G)$ zusammenhängend. Es bleibt zu zeigen, daß $f(G) \subset \mathbb{C}$ offen ist. Es sei $w_0 \in f(G)$ und $z_0 \in G$ mit $w_0 = f(z_0)$. Aus dem Identitätssatz folgt, daß ein $r > 0$ existiert mit

$$f(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\}.$$

Somit wäre $f \equiv w_0$. Da $\partial B_r(z_0)$ kompakt ist, folgt daraus, daß ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$|f(z) - w_0| \geq 3\epsilon > 0 \text{ für } |z - z_0| = r.$$

Es sei $|w - w_0| < \epsilon$. Dann gilt für $|z - z_0| = r$:

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w - w_0| \geq 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon.$$

Für $z = z_0$ ist aber

$$|f(z_0) - w| = |w - w_0| < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$|f(z_0) - w| < \min_{|z-z_0|=r} |f(z) - w|.$$

Auf Grund von Satz 10.4 hat $f(z) - w$ mindestens eine Nullstelle $z_1 \in B_r(z_0)$, d.h., $f(z_1) = w$. Damit haben wir gezeigt:

$$B_\epsilon(w_0) \subset f(G),$$

d.h., $f(G)$ ist offen.

$\square$

Gutzmersche Formel

Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in $B_R(z_0)$ konvergent. Sei $0 < r < R$ und $|z - z_0| = r$. Dann ist

$$z = z_0 + re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

und daher ist

$$f(z_0 + re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik}\varphi$$

eine trigonometrische Reihe.
Für die Funktion $e^{ik\varphi}$ gelten die Orthogonalitätsrelationen.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Da $f(z_0 + re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi}$ in $[0, 2\pi]$ normal konvergiert, folgt

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Es sei

$$M(r) := \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|.$$

Satz 10.6. *(Gutzmersche Formel) Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ konvergent in $B_R(z_0)$. Dann gilt für alle $r < R$:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq M(r)^2.$$

Beweis: Wegen

$$\overline{f(z_0 + re^{i\varphi})} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k e^{-ik\varphi}$$

gilt

$$|f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi}.$$

Da diese Reihe in $[0, 2\pi]$ normal konvergiert, folgt aus den Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi = & \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} r^k \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq 2\pi M(r)^2.$$

□

Korollar 10.7. *Die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiere in $B_R(z_0)$. Es existiere $0 < r < R$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_m| r^m = M(r)$. Dann ist $f(z) = a_m (z - z_0)^m$.*

Beweis: Aus Satz 10.6 folgt

$$\sum_{k \neq m}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq 0.$$

Daher ist $a_k = 0$ für alle $k \neq m$.

□

Satz 10.8. *(Maximum-Prinzip)*
1) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum hat, so ist f konstant in G.

2) Wenn G beschränkt ist und f auf $\overline{G}$ stetig ist, so nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an:

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta\in\partial G} |f(\zeta)|, \ z \in G.$$

Beweis: 1) Sei $z_0 \in G$ lokales Maximum von $|f| : G \to \mathbb{R}$. Sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

die Taylorreihe von f in z_0, die für $|z - z_0| < R$ konvergiere. Es sei $0 < r < R$ so, daß $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ und

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{für alle}\, z \in \overline{B_r(z_0)}.$$

Aus Korollar 10.2 folgt

$$|a_0| = |f(z_0)| \geq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \geq |f(z_0)|,$$

d.h., es gilt

$$|a_0| = M(r).$$

Aus Korollar 10.7 folgt $f(z) = a_0$ für alle $z \in B_r(z_0)$ und aus dem Identitätssatz erhalten wir $f \equiv a_0$.
2) Die zweite Behauptung folgt aus der ersten.

□

Satz 10.9. *(Minimum-Prinzip)*
1) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ habe in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.
2) Sei G beschränkt und sei f stetig fortsetzbar auf $\overline{G}$. Dann hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt sein Minimum auf ∂G an.

Beweis:
1) Wir nehmen an, daß $f(z_0) \neq 0$ ist. Dann existiert ein $r > 0$ so, daß $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Es sei $g(z) = 1/f(z)$ für $z \in B_r(z_0)$. Dann ist $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ist ein lokales Maximum von $|g(z)| = 1/|f(z)|$. Aus Satz 10.8 folgt, daß f konstant ist.
2) Es sei G beschränkt und $\overline{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von f auf $\overline{G}$. Wir nehmen an, daß f keine Nullstellen in $\overline{G}$ hat. Dann ist $g(z) = 1/f(z)$ eine holomorphe Funktion auf G, die eine stetige Forsetzung $\overline{g}(z) = 1/\overline{f}(z)$ auf $\overline{G}$ hat. Aus Satz 10.8, 2) folgt:

$$|g(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |g(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Daher ist

$$|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Ganze Funktionen und Polynome

Definition 10.10. *Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt* **ganze Funktion**.

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beispiele: e^z, $\cos(z)$, $\sin(z)$ sind ganze Funtkionen.

Wir untersuchen das Verhalten von ganzen Funtkionen für $|z| \to \infty$. Als erstes betrachten wir Polynome.

Lemma 10.11. *Es sei*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

ein Polynom. Dann gilt

1)

$$|p(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) |z|^n, \quad |z| \geq 1.$$

2) $\forall \epsilon (0 < \epsilon < 1)\, \exists \rho_\epsilon \geq 1\, \forall |z| \geq \rho_\epsilon :$

$$(1 - \epsilon) a_n |z|^n \leq |p(z)| \leq (1 + \epsilon)|a_n||z|^n.$$

Beweis: 1) Für $|z| \geq 1$:

$$|p(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||z|^k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) |z|^n.$$

2) Sei $\widetilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Dann ist nach 1):

$$|\widetilde{p}(z)| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^{n-1}, \quad |z| \geq 1.$$

Sei $0 < \epsilon < 1$ gegeben. Sei

$$\rho_\epsilon = \max \left(1, \frac{1}{\epsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right).$$

Für $|z| \geq \rho_\epsilon$ folgt

$$|\widetilde{p}(z)| \leq \frac{1}{|z|} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right) |z|^n \leq \epsilon |a_n| |z|^n.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)|a_n||z|^n \leq |a_n||z|^n - |\widetilde{p}(z)| \leq |p(z)| \leq |a_n||z|^n + |\widetilde{p}(z)| \\ \leq (1+\epsilon)|a_n||z|^n.\end{aligned}$$

□

Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Satz 10.12. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Es existiere $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$ und $M > 0$ mit $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| \geq R$. Dann ist f ein Polynom vom Grade $\leq n$.*

Beweis: Es sei

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

die Taylorentwicklung von f in 0. Die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus Korollar 10.2 folgt

$$|a_k| \leq r^{-k} \max_{|z|=r} |f(\zeta)| \leq r^{-k} M r^n, \quad |z| \geq R.$$

Für $r \to \infty$ folgt daraus $a_k = 0$ für $k > n$. Daher ist

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

□

Korollar 10.13. *(Satz von Liouville)*
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und beschränkt. Dann ist f konstant.

Satz 10.14. *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Jedes nichtkonstante komplexe Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ hat mindestens eine Nullstelle.

1. Beweis: Wir nehmen an, daß $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist. Es sei $f(z) = 1/p(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Aus Lemma 10.11 folgt:

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{(1-\epsilon)|a_n||z|^n}, \quad \text{für alle } |z| \geq \rho_\epsilon.$$

Daher ist $|f|$ beschränkt. Aus Korollar 10.13 folgt, daß f und daher p konstant ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2.Beweis: Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$. Wir wählen in Lemma 10.11 $\epsilon = 1/2$ und $R \geq \max\{1, \rho_\epsilon\}$ so groß, daß

$$|p(0)| < \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

gilt. Dann ist

$$|p(0)| < \min_{|z|=R} |p(z)|.$$

Aus Satz 10.4 folgt, daß $p(z)$ eine Nullstelle in $B_R(0)$ hat.

Satz 10.15. *(Faktorisierungssatz)*
Jedes komplexe Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grade n ist eindeutig darstellbar als Produkt

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{m_i},$$

wobei $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ und $n = m_1 + \cdots + m_r$.

11. Konvergenzsätze

Satz 11.1. *(Weierstraßscher Konvergenzsatz)*
Es sei $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph und für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(f_k^{(n)})$ gelichmäßig auf kompakten Mengen gegen $f^{(k)}$.

Beweis: 1) Da $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen ist, die auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist f stetig. Sei $\triangle \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Da die f_n holomorph sind, folgt aus dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_{\partial\triangle} f(\zeta)d\zeta = \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\triangle} f_n(\zeta)d\zeta = 0.$$

Aus dem Satz von Morera folgt, daß $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph ist.
2) Es genügt zu zeigen, daß (f_n') auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen f' konvergiert. Es sei $\overline{B_r(z_0)} \subset G$ und $\epsilon > 0$. Aus Korollar 10.2 folgt

$$|f_k'(z) - f'(z)| \leq C\frac{1}{r}\max_{|\zeta - z_0| = r}|f(\zeta) - f_k(\zeta)|.$$

Es sei $k_0 \geq 0$ so, daß

$$\max_{|\zeta - z_0| = 0}|f(\zeta) - f_k(\zeta)| < \frac{r}{C}\epsilon$$

für alle $k \geq k_0$ gilt. Dann ist

$$|f_k'(z) - f'(z)| < \epsilon$$

für alle $z \in B_R(z_0)$.

$\square$

Korollar 11.2. *Es sei $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen und $\sum_{n=0}^{\infty} f_k$ konvergiere gleichmäßig auf kompakten Mengen. Dann gilt*

1) *$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, $z \in G$, ist eine holomorphe Funktion in G.*
2) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen $f^{(k)}$:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G.$$

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist

$$\| f \|_U := \sup_{z\in U}|f(z)|.$$

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ heißt (lokal) normal konvergent, wenn jeder Punkt $z \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ besitzt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_U < \infty.$$

Satz 11.3. *Es sei $f_n : G \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sei normal konvergent. Dann ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, $z \in G$, eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ normal gegen $f^{(k)}$.*

Beweis: Es sei $z_0 \in G$. Dann existiert $r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset G$. Aus Korollar 10.3 folgt, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $C_k > 0$ existiert so, daß für alle holomorphen Funktionen $g : G \to \mathbb{C}$ gilt:

$$|g^{(k)}(z)| \leq C_k \max_{|\zeta - z_0| = r} |g(\zeta)|$$

für alle $z \in B_{r/2}(z_0)$. Daraus folgt

$$\| g^{(k)} \|_{B_{r/2}(z_0)} \leq C_k \| g \|_{B_r(z_0)} .$$

Daraus folgt, daß für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n^{(k)} \|_{B_{r/2}(z_0)} \leq C_k \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{B_r(z_0)} < \infty.$$

Daher sind alle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ normal konvergent. Daraus folgt, daß $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ holomorph ist und es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad z \in G.$$

$\square$

Beispiele: 1) *Die Gammafunktion*

Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(s) = \int_{1/n}^{n} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Dann ist $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter ist

$$|f_n(s) - \Gamma(s)| \leq \int_0^{1/n} t^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-t} dt + \int_n^{\infty} t^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-t} dt.$$

Es sei $\epsilon > 0$. Aus dieser Ungleichung folgt, daß für alle kompakten Teilmengen K der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(s) - \Gamma(s)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und } s \in K.$$

Aus Satz 11.1 folgt, daß $\Gamma(s)$ in $\mathrm{Re}(s) > 0$ holomorph ist. Wie wir wissen, gilt die Funkionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Daraus folgt für $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{(s+k)(s+k-1)\cdots s}.$$

Daraus erhalten wir die analytische Forsetzung von Γ zu einer holomorphen Funktion

$$\Gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_- \to \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}.$$

2) *Die Riemannsche Zatafunktion*

Die Riemannsche Zetafunktion ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Es sei $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$|n^s| = |e^{\log n(\sigma+it)}| = n^{\sigma}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ für $\sigma > 1$ konvergiert, ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

für $\mathrm{Re}(s) \ge 1 + \epsilon$ normal konvergent. Aus Satz 11.3 folgt, daß $\zeta(s)$ in $\mathrm{Re}(s) > 1$ holomorph ist.

Satz 11.4. *$\zeta(s)$ kann zu einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden. $\zeta(s) - 1/(s-1)$ ist eine ganze Funktion. Es gilt die Funktionsgleichung*

$$\zeta(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s).$$

Im Zusammenhang mit der Zeta-Funktion existiert die berühmte

Riemannsche Vermutung:

$$\zeta(s) \neq 0 \text{ für } \mathrm{Re}(s) > 1/2.$$

Anders formuliert bedeutet dies, daß die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen. Es sei

$$\pi(x) = \#\{p \mid p \text{ Primzahl und } \ p \le x\}.$$

Der Primzahlsatz besagt

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(x), \quad x \to \infty.$$

Es sei

$$li(x) = \int_z^x \frac{du}{\log u}.$$

Dann kann man zeigen, daß die Riemannschen Vermutung genau dann richtig ist, wenn

$$\pi(x) = li(x) + O(x^{1/2} \log x)$$

für $x \to \infty$ gilt.
Der Zusammenhang von $\pi(x)$ und $\zeta(s)$ resultiert aus der **Eulerschen Produktformel**

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

wobei p über alle Primzahlen läuft.
2) Das Prinzip der analytischen Fortsetzung spielt in vielen Teilen der Mathematik und auch der Physik eine wichtige Rolle. So z.B. in der analytischen Zahlentheorie, der Darstellungstheorie Liescher Gruppen, der mathematischen Streutheorie, der Quantenfeldtheorie.
Als Beispiel diskutieren wir hier die regularisierte Determinante eines elliptischen Operators.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Es sei

$$\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der Laplaceoperator. Aus der Greenschen Formel folgt, daß

$$\Delta : C_0^\infty(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

ein symmetrischer linearer Operator im Hilbertraum $L^2(\Omega)$ ist. Außderdem gilt

$$\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle = \| \nabla\varphi \|^2 > 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, d.h., Δ ist positiv definit. Es sei Δ_D die Abschließung von Δ in $L^2(\Omega)$. Dann existiert eine orthonormale Basis

$\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$, die aus Eigenfunktionen von Δ_D besteht, d.h., es ist $\varphi_i \in C^\infty(\Omega)$ und es gilt:

$$\Delta\varphi_i = \lambda_i\varphi_i;$$
$$\varphi_i|\partial\Omega = 0;$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dabei sind

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to \infty$$

die Eigenwerte von Δ_D. Es sei

$$\zeta(s, \Delta_D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-s}.$$

Diese Reine konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s) > n/2$. Daher ist $\zeta(s, \Delta_D)$ eine holomorphe Funktion in $\mathrm{Re}(s) > n/2$. Diese Funktion besitzt eine Fortsetzung zu einer meromorphen Funktion in $\mathbb{C}$, die in $s = 0$ regulär ist. Dann definiert man die regularisierte Determinante von Δ_D durch

$$\det \Delta_D = \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta(s, \triangle_D)\mid_{s=0}\right).$$

Die regularisierte Determinante spielt z.B. in der geometrischen Analysis und der Quantenfeldtheorie eine wichtige Rolle.

12. Laurentreihen

Wir untersuchen Funktionen, die holomorph in einem Kreisring sind. Dazu benötigen wir Laurentreihen.

Definition 12.1. *Eine Laurentreihe um $a \in \mathbb{C}$ ist eine Reihe der Form*

$$L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k.$$

$L_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-a)^{-k}$ *heißt* **Hauptteil** *und* $L_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ *heißt* **Nebenteil** *der Laurentreihe. Die Laurentreihe $L(z)$ heißt konvergent in z_1, wenn $L_1(z)$ und $L_2(z)$ in z_1 konvergieren. Dann setzen wir*

$$L(z_1) := L_1(z_1) + L_2(z_1).$$

$L(z)$ heißt gleichmäßig oder lokal gleichmäßig konvergent, wenn dies für $L_1(z)$ und $L_2(z)$ gilt.

Sei ρ Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, R Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \begin{cases} \text{konvergiert für} & r = 1/\rho < |z-a| < R \\ \text{divergiert für} & |z-a| < r \text{ oder} \\ & |z-a| > R. \end{cases}$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ konvergiert normal auf kompakten Teilmengen von $K_a(r,R)$. Sei $r < |z-a| < R$.

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n, \quad |w| < \rho = 1/r,$$

konvergent, $g : B_{1/r}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph.
$L_1(z) := g((z-a)^{-1})$. $\Rightarrow L_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\lim_{z\to\infty} |L_1(z)| = \lim_{z\to\infty} \left| g\left(\frac{1}{z-a}\right) \right| = \lim_{w\to 0} |g(w)| = 0$. Die Reihe

$$L_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

konvergiert für $|z-a| < R$. Daher ist$L_2 : B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph.

Satz 12.2. *Sei* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *konvergent für* $r < |z-a| < R$. *Dann exsistieren holomorphe Funktionen* $L_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)} \to \mathbb{C}$ *und* $L_2 : B_R(a) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$L_1(z) + L_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad r < |z-a| < R.$$

und $\lim_{z\to\infty} |L_1(z)| = 0$. *Diese Darstellung ist eindeutig.*

Beweis: Wir müssen nur noch die Eindeutigkeit beweisen. Es seien $f_1, g_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)} \to \mathbb{C}$, $f_2, g_2 : B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorph, $\lim_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0 = \lim_{z\to\infty} |g_1(z)|$ und

$$f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z), \quad r < |z-a| < R$$

$\Rightarrow f_1(z) - g_1(z) = g_2(z) - f_2(z)$.
Sei

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & z \in \mathbb{C} \setminus B_r(a); \\ g_2(z) - f_2(z), & z \in B_R(a). \end{cases}$$

$\Rightarrow h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\lim_{z\to\infty} |h(z)| = 0$.
Satz von Lionville $\Rightarrow h \equiv 0$
$\Rightarrow f_1 = g_1,\ f_2 = g_2$.

□

Holomorphe Funktionen in Kreisringen

Für $0 \leq r < R \leq \infty$, $a \in \mathbb{C}$, sei

$$K_a(r,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}.$$

Satz 12.3. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{K_a(r,R)} \subset U$. Dann gilt für alle $z \in K_a(r,R)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Beweis: Sei $\phi : U \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}; & \zeta \neq z; \\ f'(z); & \zeta = z. \end{cases}$$

Dann gilt:

1) ϕ holomorph in $U \setminus \{z\}$,
2) ϕ stetig in z.

Riemannscher Hebbarkeitssatz $\Rightarrow \phi : U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Für $r \leq \rho \leq R$ sei $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \to U$

$$\gamma_\rho(\theta) = a + \rho e^{i\theta}.$$

Dann sind γ_r und γ_R frei homotop. Cauchy-Integralsatz $\Rightarrow$

$$\int_{|\zeta-a|=r}\phi(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta-a|=R}\phi(\zeta)d\zeta.$$

Sei $\rho = r$ oder $\rho = R$. $\Rightarrow$

$$\int_{|\zeta-a|=\rho}\phi(\zeta)d\zeta = \int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z};d\zeta - f(z)\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta$$
$$\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta = \begin{cases} 2\pi i, & \rho = R; \\ 0, & \rho = r. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\phi(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \end{aligned}$$

□

Satz 12.4. *(Laurententwicklung)*
Es sei $f : K_a(r,R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann f in $K_a(r,R)$ in eine konvergente Laurentreihe entwickelt werden:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n := \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Die erste Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(a)}$ gegen den Hauptteil und die zweite Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $B_R(a)$ gegen den Nebenteil von f. Die Koeffizieten a_n sind eindeutig bestimmt. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $r < \rho < R$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

Beweis: Sei $r < r' < \rho < R' < R$. Dann ist $\overline{K_a(r',R')} \subset K_a(r,R)$. Aus Satz 12.2 folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=R'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{12.1}$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-a}\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad |z-a| < R', |\zeta-a| = R'$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n \qquad |\zeta-a| = r', |z-a| > r'.$$

$(*) \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta (z-a)^n \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} f(\zeta)(\zeta-a)^n d\zeta (z-a)^{-n+1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad r' < |z-a| < R'.
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta.
$$

Dies gilt für alle r', R', $r < r' < R' < R$. Daher für $r < |z-a| < R$. □

Beispiel: Sei $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1 \\
\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.
\end{aligned}
$$

Daher ist $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}; \quad z \in K_0(1,2)$.

13. Isolierte Singularitäten

Definition 13.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt z_0* **isolierte Singularität** *von f.*

$U \setminus \{z_0\}$ heißt **punktierte Umgebung von** z_0.
Beispiele:

1) Sei $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist 0 isolierte Singularität.
2) $f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$ hat die isolierten Singularitäten 0 und i.
3) $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
4) $f(z) = \cot \pi z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, hat in jedem $n \in \mathbb{Z}$ eine isolierte Singularität.

Wir unterscheiden isolierte Singularitäten nach dem Verhalten von f in der Nähe der Singularität.

Definition 13.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, und $f : U \setminus \{z_0\} \to$ holomorph.*

1) *Es existiert eine offene Umgebung V von z_0 in U so, daß $f \mid V \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist. Dann heißt z_0* **hebbare** *Singularität.*
2) *Es gilt $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$. Dann heißt z_0 Pol von f.*
3) *z_0 ist weder eine hebbare Singularität noch ein Pol. Dann heißt z_0* **wesentliche Singularität** *von f.*

Bemerkungen:

1) Wenn z_0 eine hebbare Singularität von $f : U \setminus \{z_0\}$ ist, so hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitsatz eine holomorphe Fortsetzung $\hat{f} : U \to \mathbb{C}$.

Satz 13.3. *Sei $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist z_0 ein Pol von f genau dann, wenn ein $n \in \mathbb{N}$, eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $g : V \to \mathbb{C}$ existieren mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z), \quad z \in V.$$

Beweis: $\Leftarrow$) Es sei $\epsilon > 0$ so, daß

$$|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$$

für $|z - z_0| < \epsilon$. Dann ist

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|g(z_0)|, \quad |z - z_0| < \epsilon.$$

Hieraus folgt für $|z - z_0| < \epsilon$:

$$|f(z)| = |z - z_0|^{-n}|g(z)| > \frac{|g(z_0)|}{z}|z - z_0|^{-n},$$

und daher $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

$\Rightarrow$) Da $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ ist, existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in V \setminus \{z_0\}$. Sei $h(z) = 1/f(z)$, $z \in V \setminus \{z_0\}$. Dann ist $h : V \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\lim_{z\to z_0} |h(z)| = 0$.

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz kann h durch 0 zu einer holomorphen Funktion $\widetilde{h} : V \to \mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Daher existieren $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $H : V \to \mathbb{C}$ mit $H(z_0) \neq 0$ und

$$\widetilde{h}(z) = (z - z_0)^n H(z).$$

Sei $\epsilon > 0$ so, daß $H(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < \epsilon$. Sei $g(z) = 1/H(z)$ für $z \in B_\epsilon(z_0)$. Dann ist $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z).$$

□

Definition 13.4. *Sei n wie in Satz 13.3. n heißt* **Ordnung** *des Poles z_0.*

Satz 13.5. *Eine isolierte Singularität z_0 von $f : U \setminus \{z_0\}$ ist genau dann wesentlich, wenn für alle $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_k) in $U \setminus \{z_0\}$ existiert mit $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$ und $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = w_0$.*

Beweis: $\Leftarrow$) klar.
$\Rightarrow$) Sei $w \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, daß $r > 0$ und $\epsilon > 0$ existieren mit

$$|f(z) - w| \geq \epsilon \text{ für alle } 0 < |z - z_0| < r.$$

Sei

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Dann ist $g : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter ist

$$|g(z)| \leq |f(z) - w|^{-1} \leq \epsilon^{-1},$$

d.h., g hat eine hebbare Singularität in z_0. Sei $\lim_{z\to z_0} |g(z)| \neq$.
Dann ist

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} + w = \frac{1}{g(z_0)} + w$$

und daher hat f eine hebbare Singularität in z_0. Sei $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$.
Dann ist

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \left| \frac{1}{g(z)} + w \right| = \infty,$$

d.h., z_0 ist ein Pol von f. Dies ist ein Wiederspruch zur Voraussetzung, daß z_0 eine wesentliche Singularität ist.

□

Satz 13.6. *Es sei $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph und*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f in z_0. Dann gilt:

1) *z_0 ist hebbare Singularität von f genau dann, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$.*
2) *z_0 ist Pol genau dann, wenn eine $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$.*
3) *z_0 ist wesentliche Singularität, genau dann, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.*

Beweis: Übung!

Meromorphe Funktionen

Definition 13.7. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $P \subset U$ eine diskrete Teilmenge und $f : U \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn alle $z_0 \in P$ Pole von f sind, so heißt f eine* **meromorphe Funktion** *auf U.*

Satz 13.8. *f ist meromorph auf U genau dann, wenn für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und holomorphe Funktionen $g, h : V \to \mathbb{C}$ existieren so, daß*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad z \in V.$$

Beweis: $\Leftarrow$) Sei $V \subset \mathbb{C}$ offen und seien $g, h : V \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in V$. Dann existieren $n, m \in \mathbb{N}_0$ und holomorphe Funktionen $\widetilde{g}, \widetilde{h} : V \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{g}(z_0) \neq 0$, $\widetilde{h}(z_0) \neq 0$, und $g(z) = (z - z_0)^m \widetilde{g}(z)$, $h(z) = (z - z_0)^n \widetilde{h}(z)$. Sei $f(z) = g(z)/h(z)$ und $\widetilde{f}(z) = \widetilde{g}(z)/\widetilde{h}(z)$. Sei $r > 0$ so, daß $\widetilde{h}(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Dann ist $\widetilde{f} : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$f(z) = (z - z_0)^{m-n} \widetilde{f}(z), \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Daher hat f höchstens einen Pol in z_0.
$\Rightarrow$) Wenn z_0 kein Pol von f ist, so ist $g = f$ und $h \equiv 1$. Sei z_0 Pol der Ordnung n von f. Dann gilt für $|z - z_0| < \epsilon$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}.$$

□

Seien f, g meromorphe Funktionen auf U. $P_f, P_g \subset U$ seien die Pole von f bzw. g. Wir definieren

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z), \quad z \in U \setminus (P_f \cup P_g).$$

Dann ist $f+g$ meromorph auf U. Ebenso wird $f\cdot g$ definiert. $f\cdot g$ ist ebenfalls meromorph. Wenn $g\not\equiv 0$, so ist $1/g$ meromorph.

Definition 13.9. *Sei $G\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sei $\mathcal{M}(G)$ die Menge der in G meromorphen Funktionen.*

Satz 13.10. *$\mathcal{M}(G)$ ist ein Körper.*

Beweis: Übung!

Riemannsche Zahlenkugel

Es sei $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Es sei $S^2=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ die 2-dimensionale Einheitsspäre und

$$\sigma:\hat{\mathbb{C}}\xrightarrow{\sim} S^2$$

die stereographische Projektion. Dadurch kann man die Topologie von $\mathbb{C}$ zu einer Topologie von $\hat{\mathbb{C}}$ forsetzen.

Definition 13.11. *Eine Teilmenge $M\subset\hat{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von ∞, wenn eine kompakte Teilmenge $K\subset\mathbb{C}$ existiert mit $\mathbb{C}\backslash K\subset M$. $M\subset\hat{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von $z\in\mathbb{C}$, wenn ein $\epsilon>0$ existiert mit $B_\epsilon(z)\subset M$.*

Es sei (z_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gilt:

$$z_n\to\infty\Leftrightarrow\forall N\in\mathbb{N}:\exists n_0\mathbb{N}:|z_n|\geq N\quad\text{für alle } n\geq n_0.$$

Sei f meromorph auf U und sei $a\in U$ ein Pol von f. Dann setzen wir

$$f(a):=\infty.$$

Damit erhlaten wir eine Abbildung $f:U\to\hat{\mathbb{C}}$.

Satz 13.12. *Sei $U\subset\mathbb{C}$ offen und $f:U\to\hat{\mathbb{C}}$ Abb. f ist eine meromorphe Funktion auf U $\Leftrightarrow$ 1) f stetig 2) $f^{-1}(\infty)$ diskret in U 3) $f:U\setminus f^{-1}(\infty)\to\mathbb{C}$ ist holomorph.*

14. Der Residuensatz

Umlaufzahl einer Kurve

Für $n\in\mathbb{Z}$ sei $\gamma_n:[0,1]\to\mathbb{C}$ die Kurve, die definiert ist durch

$$\gamma_n(t)=re^{int}.$$

Für $n > 0$ umläuft γ_n jeden Punkt $z \in B_r(0)$ n-mal in positiver Richtung und für $n < 0$, $|n|$-mal in negativer Richtung. Andererseits ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{1}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)dt = n.$$

Wir können daher das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{1}{\zeta}d\zeta$$

als Umlaufzahl von γ_n interpretieren.
Wir verallgemeinern dies für eine beliebige geschlossene Kurve γ. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Jede holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{g(z)} = f(z), \quad z \in U,$$

heißt **holomorpher Logarithmus** von f in U. Wenn f einen holomorphen Logarithmus besitzt, so hat f keine Nullstelle in U.

Lemma 14.1. *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}^\times$ sei holomorph. Es sei $c \in G$ fixiert und $\gamma_z : [0,1] \to G$ ein Weg mit $\gamma_z(0) = c$ und $\gamma_z(1) = z$. Es sei $b \in \mathbb{C}$ so, daß $e^b = f(c)$. Dann ist*

$$g(z) = \int_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta + b$$

ein holomorpher Logarithmus von f.

Beweis: Da G konvex ist, ist das Integral unabhängig vom Weg. Es gilt $fg' = f'$. Daraus folgt $(fe^{-g})' = 0$. Daher existiert $a \in \mathbb{C}$ mit

$$f = ae^g.$$

Wegen $e^{g(c)} = f(c) \neq 0$ folgt $a = 1$.

□

Aus Lemma 14.1 folgt

$$f(z) = f(c)\exp\left(\int_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right).$$

Satz 14.2. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und es sei $f : U \to \mathbb{C}^\times$ holomorph. Sei $c, z \in U$. Für alle Integrationswege $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = c$, $\gamma(1) = z$ gilt:*

$$f(z) = f(c) \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

Beweis: Es sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein Integrationsweg mit $\gamma(0) = c$ und $\gamma(1) = z$. Wir wählen endlich viele Punkte $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und Kreisscheiben $B_1, \ldots, B_n$ in U, so daß der Weg $\gamma_k := \gamma \mid [t_{k-1}, t_k]$ in B_k verläuft. Aus Lemma 14.1 folgt

$$\exp\left(\int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) = \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))}, \quad 1 \le k \le n.$$

Daraus folgt

$$\exp\left(\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) = \prod_{K=1}^n \exp\left(\int_{\gamma_k} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) = \prod_{k=1}^n \frac{f(\gamma(t_k))}{f(\gamma(t_{k-1}))} = \frac{f(z)}{f(c)}.$$

□

Korollar 14.3. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}^\times$ holomorph und $\gamma : [0,1] \to U$ sei ein geschlossener Integrationsweg. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Auf Grund von Satz 14.2 gilt $\exp\left(\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) = 1$.

□

Definition 14.4. *Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$ sei*

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} d\zeta.$$

Satz 14.5. *Es sei γ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}$. Dann gilt:*

1) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) : \ n(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
2) *Die Funktion $z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) \longmapsto n(\gamma, z)$ ist lokal konstant.*
3) *Sei $\widetilde{\gamma}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ mit dem selben Anfangspunkt wie γ. Dann ist*

$$n(\gamma + \widetilde{\gamma}, z) = n(\gamma, z) + n(\widetilde{\gamma}, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma + \widetilde{\gamma}).$$

Insbesondere gilt $n(-\gamma, z) = -n(\gamma, z)$ *für* $z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma)$.

Beweis: 1) folgt aus Korollar 14.3 mit $f(\zeta) = \zeta - z$.
2) $n(\gamma, z)$ ist stetig in z. (Übung!)
3) Ist klar.

□

Die Mengen

$$\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) \mid n(\gamma, z) \neq 0\}$$

und

$$\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus tr(\gamma) \mid n(\gamma, z) = 0\}$$

heißen das **Innere** bzw. **Äußere** von γ.

Satz 14.6. *Es sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und* $\gamma : [0,1] \to U$ *sei ein geschlossener Integrationsweg. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *Für alle holomorphen Funktionen* $f : U \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

2) *Für alle holomorphen Funktionen* $f : U \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in U \setminus tr(\gamma).$$

3) $Int(\gamma) \subset U$.

Beweis: Siehe R. Remmert "Funktionentheorie", S.228.

□

Definition 14.7. *Es sei* $\gamma : [0,1] \to U$ *ein geschlossener Integrationsweg mit* $Int(\gamma) \subset U$. *Dann heißt* γ **nullhomolog** *in* U. *Wenn in* U *jeder geschlossene Integrationsweg nullhomolog ist, so heißt* U **homologisch einfach zusammenhängend**.

Definition 14.8. *Es sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen,* $A \subset U$ *diskret und* $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ *sei holomorph. Für* $z \in U$ *sei* $r > 0$ *so, daß* $B_r(z) \setminus \{z\} \cap A = \emptyset$. *Dann heißt*

$$res_z f := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} f(\zeta) d\zeta$$

das Residuum von f *in* z.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, daß für jeden nullhomologen geschlossenen Integrationsweg γ in U mit $n(\gamma, z) = 1$, der durch keine Singularität geht und außer z keine Singularität von f umläuft,

$$\mathrm{res}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta$$

gilt.

Wenn f in z holomorph ist, so ist $\mathrm{res}_z f = 0$. Allgemein sei

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$$

die Laurententwicklung von f in z. Da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} (\zeta - z)^n d\zeta = \begin{cases} 1, & n = -1; \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

folgt

$$\mathrm{res}_z f = a_{-1}.$$

Satz 14.9. *(Residuensatz) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset U$ diskret und $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt für jeden nullhomologen geschlossenen Integrationsweg γ in U, der keinen Punkt von A durchläuft:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in A} n(\gamma, z) res_z f.$$

Beweis: Da γ in einer relativ kompakten Teilmenge $K \subset U$ enthalten ist, gibt es endlich viele $z \in A$ mit $n(\gamma_i, z) \neq 0$. Es seien $z_1, \ldots, z_m \in A$ die Singularitäten von f mit $n(\gamma, z_i) \neq 0$. Es sei $M = A \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$. Weiter sei $h_i(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe von f um z_i. Da h_i auf $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ holomorph ist, ist

$$f - \sum_{i=1}^{m} h_i$$

holomorph in $U \setminus M$. Weil γ in U und daher auch in $U \setminus M$ nullhomolog ist, folgt aus Satz 14.6

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \sum_{i=1}^m \int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta.$$

Sei

$$h_i(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{in}(z-z_i)^n.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $tr(\gamma)$. Daher ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma h_i(\zeta)d\zeta &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{in}\int_\gamma (\zeta-z_i)^n d\zeta = a_{i,-1}\int_\gamma (\zeta-z_i)^{-1}d\zeta \\ &= 2\pi i\, n(\gamma,z_i)\mathrm{res}_{z_i} f.\end{aligned}$$

□

Ist U einfach zusammenhängend, so ist jede geschlossene Kurve in U nullhomotop und daher auch nullhomolog. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = \sum_{z\in A} n(\gamma,z)\mathrm{res}_z f$$

für jede geschlossene Kurve γ in U, die durch keine Singularitäten geht. In vielen Anwendungen ist der Integrationsweg γ eine berandete Kurve.

Definition 14.10. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offfen und $\gamma : [0,1] \to U$ ein Integrationsweg. Wir sagen, daß γ die Teilmenge $V \subset\subset U$ berandet, wenn gilt:*

1) $\partial V = tr(\gamma)$
2) $n(\gamma,z) = 1$ *für* $z \in V$ *und* $n(\gamma,z) = 0$ *für* $z \notin \overline{V}$.

Randzyklen von relativ kompakten, offenen Teilmengen $V \subset U$ sind in U nullhomolog. Daher gilt:

Definition 14.11. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset U$ diskret und $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Es sei γ der Randzyklus von $V \subset\subset U$ und sei $tr(\gamma)\cap A = \emptyset$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{z\in A} res_z f.$$

15. Partialbruchentwicklung meromorpher Funktionen

Es seien $p(z)$ und $q(z)$ Polynome. Dann ist

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine rationale Funktion. Insbesondere ist f eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polen $z_1, \dots, z_m$. Es sei z_k ein Pol von f und

$$h_k(z) = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{a_{k,i}}{(z - z_k)^i}$$

sei der Hauptteil der Laurententwicklung von f in z_k. Dann existiert ein Polynom $r(z)$ mit

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} h_k(z) + r(z).$$

Dies ist die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion f. Wir möchten dies auf beliebige meromorphe Funktionen in $\mathbb{C}$ verallgemeinern. Dazu müssen wir Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ meromorpher Funktionen f_k betrachten.

Definition 15.1. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und (f_k) sei eine Folge meromorpher Funktionen in U. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert kompakt in U, wenn zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, daß gilt:*

1) *Für alle $k \geq k_0$ ist f_k holomorph in U.*
2) *$\sum_{k \geq k_0} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf K.*

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ eine kompakt konvergente Reihe meromorpher Funktionen in U. Sei

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N} : z \text{ ist Pol von } f_k\}$$

die Menge aller Pole aller f_k. Dann ist P diskret in U und die durch

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

in $U \setminus P$ definierte Funktion ist meromorph auf U mit Polen oder hebbaren Singularitäten in P.

Satz 15.2. *(Satz von Mittag-Leffler)*
Es sei $z_0 = 0$, $z_1, z_2 \dots$ eine endliche oder unendliche Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen mit

$$|z_k| \leq |z_{k+1}|, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

ohne Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei

$$h_k(z) = \sum_{i=1}^{n_k} \frac{a_{k,i}}{(z - z_k)^i}$$

Dann existieren Polynome $P_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, so, daß die Reihe

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(z) - P_k(z))$$

in $\mathbb{C}$ kompakt konvergiert. f ist eine meromorphe Funktion mit den Polen $z_0, z_1 \dots$ und den Hauptteilen h_k in z_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Für P_k kann man das Taylorpolynom von h_k um 0 von hinreichend hohem Grad wählen.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$r_k = \frac{1}{2}|z_k|, \quad B_k = B_{r_k}(0).$$

Dann gilt

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots; \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \mathbb{C}.$$

Der einzige Pol von h_k ist z_k. Daher ist h_k in einer Umgebung von $\overline{B}_k$ holomorph. Es sei

$$h_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} z^j$$

die Taylorentwicklung von h_k in 0. Die Taylorreihe konvergiert gleichmäßig für $|z| \leq r_k$. Daher existiert $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$|h_k(z) - \sum_{j=0}^{n_k} a_{j,k} z^j| < 2^{-k}$$

für alle $z \in B_k$. Wir setzen

$$P_k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} a_{j,k} z^j.$$

Es sei $R > 0$. Dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$B_R(0) \subset B_k \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Daraus folgt, daß für $k \geq k_0$ die h_k holomorph in $B_R(0)$ sind und die Abschätzung

$$|h_k(z) - P_k(z)| < 2^{-k}, \quad z \in B_R(0),$$

gilt. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{k \geq k_0} (h_k(z) - P_k(z))$$

gleichmäßig auf $B_R(0)$. Damit haben wir gezeigt, daß

$$h_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(z) - P_k(z))$$

kompakt in $\mathbb{C}$ konvergiert und eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ definiert. Für $R > 0$ gilt

$$f(z) = h_0(z) + \sum_{k=1}^{k_0 - 1} (h_k(z) - P_k(z)) + \sum_{k=k_0}^{\infty} (h_k(z) - P_k(z)).$$

Die unendliche Reihe ist holomorph auf $B_R(0)$. Daher sind die Hauptteile von f in den Polen, die in $B_R(0)$ liegen, genau diejenigen h_k, für die $z_k \in B_R(0)$ ist. Da R beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

□

Satz 15.3. *(Partialbruchzerlegung)*
Es sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit den Polen $z_0, z_1, z_2, \ldots$, $0 = |z_0| \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$ Es sei $h_k(z)$ der Hauptteil von f in z_k, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert eine Folge (n_k), $n_k \geq -1$, und eine ganze Funktion h, so daß gilt: Es sei P_k das Taylorpolynom der Ordnung n_k von h_k in 0.
Dann konvergiert die Reihe

$$g(z) = h_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(h_k(z) - P_k(z))$$

kompakt in $\mathbb{C}$ *und es ist*

$$f(z) = h(z) + g(z).$$

Durch f *und* (n_k) *ist* h *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus Satz 15.2 folgt, daß $f - g$ eine ganze Funktion ist.

□

Es seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $z_0 = 0$, und (c_k) Folgen in $\mathbb{C}$. Wir konstruieren eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in z_k und Residuen c_k in z_k. Es sei $|z_k| \leq |z_{k+1}|$, $k \in \mathbb{N}_0$, und $\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$. Wir setzen $c_k \neq 0$ für $k \geq 1$ voraus. Die Taylorentwicklung von $(z - z_k)^{-1}$ um 0 ist

$$\frac{1}{z - z_k} = -\frac{1}{z_k}\frac{1}{1 - \frac{z}{z_k}} = -\frac{1}{z_k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_k}\right)^i.$$

Wir wählen $n_k \in \mathbb{N}$ so, daß

$$\left|\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\sum_{i=0}^{n_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^i\right| < \frac{2^{-k}}{|c_k|}$$

für $|z| \leq \frac{1}{2}|z_k|$. Dann folgt

Satz 15.4.

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\left[\frac{1}{z - z_k} + \sum_{i=0}^{n_k}\frac{z^i}{z_k^{i+1}}\right]$$

ist eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ *mit einfachen Polen in* z_k*,* $k \in \mathbb{N}_0$*, und* $\mathrm{res}_{z_k} f = c_k$*.*

Partialbruchentwicklung von $\pi\cot(\pi z)$.

Wir betrachten den Fall $z_k = k$ und $c_k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \neq 0$ ist

$$\left|\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k}\right| = \frac{|z|}{|k||z - k|}.$$

Sei $|z| \leq R$ und $|k| > 2R$. Dann ist $|z - k| \geq |k|/2$ und daher

$$\frac{|z|}{|k||z - k|} \leq \frac{2R}{k^2}.$$

Da $\sum_{k=1}^\infty k^{-2} < \infty$, ist

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

kompakt konvergent und definiert daher eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $k \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{res}_k f = 1$. Weiter ist $f(-z) = -f(z)$.

Satz 15.5. *Es gilt*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{2} + \sum_{k\neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right).$$

Beweis: Die rechte Seite haben wir mit $f(z)$ bezeichnet. Da $\pi \cot \pi z$ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorph ist und in $k \in \mathbb{Z}$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 hat, ist

$$g(z) = \pi \cot \pi z - f(z)$$

eine ganze Funktion. Weiter ist $g(-z) = -g(z)$. Für $\pi \cot \pi z$ gilt die Verdopplungsformel

$$2\pi \cot 2\pi z = \pi \cot \pi z + \pi \cot \pi \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

Es sei

$$s_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k} \right).$$

Dann gilt

$$s_n(z) + s_n(z + 1/2) = 2 s_{2n}(2z) + \frac{2}{2z + 2n + 1}.$$

Für $n \to \infty$ erhält man daraus

$$2f(2z) = f(z) + f(z + 1/2).$$

Damit ist $g(z)$ eine ganze Funktion, für die gilt $g(-z) = -g(z)$ und

$$2g(2z) = g(z) + g(z + 1/2).$$

Insbesondere ist $g(0) = 0$. Wäre $g \not\equiv 0$, so existiert nach dem Maximumprinzip ein $c \in \partial \overline{B_2(0)}$ mit $|h(z)| < |h(c)|$ für alle $z \in B_2(0)$. Da $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}(c+1) \in B_2(0)$, so folgt

$$|2h(c)| = \left| h\left(\frac{1}{2}c\right) + h\left(\frac{1}{2}(c+1)\right) \right| \leq \left| h\left(\frac{1}{2}c\right) \right| + \left| h\left(\frac{1}{2}(c+1)\right) \right| < 2|h(c)|.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $h(c) \neq 0$. Also gilt

$$\pi \cot \pi z = f(z).$$

□

Durch Differentation erhält man

Satz 15.6. *Es gilt*

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2}.$$

16. Produktentewicklung ganzer Funktionen

Es sei $p(z)$ ein Polynom vom Grade $n \geq 1$. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, daß $c \in \mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ und $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$p(z) = c \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{n_k}.$$

Wir möchten dieses Resultat für ganze Funktionen verallgemeinern. Dazu benötigen wir einige Resultate über unendliche Produkte.

Definition 16.1. *1) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und hat den Wert a, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k = a$$

und $a \neq 0$ gilt.
2) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, wenn $a_k \neq 0$ für fast alle k und $\prod_{a_k \neq 0} a_k$ existiert. Wenn wenigstens ein k existiert mit $a_k = 0$, so sei $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = 0$.

Wenn $\prod_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$. Wir schreiben deshalb ein unendliches Produkt als

$$\prod_{k=1}^\infty (1+u_k).$$

Notwendig für die Konvergenz ist $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ und $u_k \neq -1$ für fast alle k.
Wir stellen einge einfache Resultate über konvergente Produkte zusammen.

Lemma 16.2. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiere ein Wert von $\log(1+u_k)$ so, daß*

$$\sum_{k=1}^\infty \log(1+u_k)$$

konvergiert. Dann konvergiert $\prod_{k=1}^\infty (1+u_k)$.

Beweis: Wenn $\sum_{k=1}^\infty \log(1+u_k)$ existiert, so ist wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (1+u_k) &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \exp(\log(1+u_k)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^n \log(1+u_k)\right) = \exp \sum_{k=1}^\infty \log(1+u_k).\end{aligned}$$

Lemma 16.3. *Es sei $(1+u_k) \notin \mathbb{R}^-$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\log$ bezeichne den Hauptwert des Logarithmus. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty \log(1+u_k)$ absolut genau dann, wenn $\sum_{k=1}^\infty u_k$ absolut konvergiert.*

Beweis: Es gilt

$$\log(1+u) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k}, \quad |u| < 1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{2}{3}|u| \leq |\log(1+u)| \leq \frac{4}{3}|u|,$$

für $|u| \leq 1/4$. Daraus folgt die Behauptung.

$\square$

Definition 16.4. *Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ absolut konvergiert.*

Definition 16.5. *Es sei (f_k) eine Folge stetiger Funktionen auf einer offenen Menge U. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k)$ konvergiert (punktweise) gegen die Funktion $f: U \to \mathbb{C}$, wenn für alle $z \in U$ gilt*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k(z)) = f(z).$$

Falls $\sum f_k$ absolut (lokal) gleichmäßig auf U konvergiert, so heißt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k)$ absolut (lokal) gleichmäßig konvergent.

Lemma 16.6. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1) *$\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k)$ konvergiert absolut lokal gleichmäßig auf U.*
2) *Für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß*

$$\sum_{k \geq k_0} \log(1+f_k)$$

auf K absolut gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Die Behauptung folgt aus

$$\frac{2}{3}|f_k(z)| \leq |\log(1+f_k(z))| \leq \frac{4}{3}|f_k(z)|$$

für $|f_k(z)| \leq \frac{1}{4}$ und dem Majorantenkriterium. Weiterhin ist für beliebiges $n \geq k_0$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(z)) &= \prod_{k=1}^{k_0-1}(1+f_k(z)) \prod_{k=k_0}^{n}(1+f_k(z)) \\ &= \prod_{k=1}^{k_0-1}(1+f_k(z)) \exp\left(\sum_{k=k_0}^{n} \log(1+f_k(z))\right).\end{aligned}$$

Da exp lokal gleichmäßig stetig ist, folgt daß

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=k_0}^{n} \log(1+f_k(z))\right)$$

lokal gleichmäßig konvergiert.

$\square$

Lemma 16.7. *Es sei (f_k) eine Folge holomorpher Funktionen $f_k : U \to \mathbb{C}$ und $\prod_{k=1}^{\infty}(1+f_k)$ konvergiere lokal gleichmäßig in U gegen $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f holomorph.*

Beweis: Dies folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz.

Definition 16.8. *Eine Nullstellenverteilung in $\mathbb{C}$ ist eine Menge $N = \{(a, n_a)\}$ von Paaren mit $a \in \mathbb{C}$ und $n_a \in \mathbb{N}$, so daß $|N| = \{a \mid (a, n_a) \in N\}$ diskret in $\mathbb{C}$ ist.*

Es sei f eine ganze Funktion. Seien $z_1, z_2, \dots$ die Nullstellen von f und $n_k = o_{z_k}(f)$, $k \in \mathbb{N}$, die Ordnung der Nullstelle z_k. Dann ist $N_f = \{(z_k, n_k)\}$ eine Nullstellenverteilung. Wir setzen

$$\mathrm{div} f := N_f.$$

Satz 16.9. *(Weierstraßscher Produktsatz)*
Es sei $N = \{(a_0, n_0), (a_1, n_1), \dots\}$ eine Nullstellenverteilung mit $0 = |a_0| < |a_1| \le |a_2| \le \cdots$. Es sei (p_k) eine Folge in $\mathbb{N}$ so, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \left[\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}\sum_{j=0}^{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right]$$

lokal gleichmäßig konvergiert. Dann ist

$$f(z) : z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{p_k+1}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right)\right]^{n_k}$$

eine ganze Funktion mit $N = div f$.

Beweis: Es sei

$$0 = |a_0| < |a_1| \le |a_2| \le \cdots$$

Nach dem Satz von Mittag-Leffler existiert eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ so, daß

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k}\sum_{j=0}^{p_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(z).$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, deren Pole genau die $a_0, a_1, \cdots$ sind und deren Hauptteil in a_k

$$\frac{n_k}{z-a_k}$$

ist. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$u_k(z) = \left(\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\sum_{j=0}^{p_k} \frac{1}{j+1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^{j+1}\right)\right)^{n_k}.$$

Dann ist

$$u_k'/u_k = h_k.$$

Es sei $R > 0$. Wir wählen $k_0 \geq 0$ so, daß $|a_k| > R$ für alle $k \geq k_0$. Dann hat u_k für $k \geq k_0$ in $B_R(0)$ keine Nullstellen. Deshalb existiert

$$v_k(z) = \int_0^z \frac{u_k'(\zeta)}{u_k(\zeta)} d\zeta = \int_0^z h_k(\zeta) d\zeta$$

für $z \in B_R(0)$ und es gilt

$$e^{v_k(z)} = u_k(z).$$

Da $\sum h_k$ konvergiert, konvergiert

$$\sum_{k \geq k_0} v_k(z) = \sum_{k \geq k_0} \log u_k(z)$$

gleichmäßig auf $B_R(0)$. Daraus folgt, daß

$$\prod_{k \geq k_0} u_k(z)$$

gleichmäßig in $B_R(0)$ konvergiert. Daher ist

$$u(z) = z^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

eine holomorphe Funktion. Weiter gilt

$$\frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{n_0}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(z).$$

Nach dem Satz von Mittag-Leffler sind die Pole von u'/u genau die Punkte $a_0, a_1, \ldots$ und es gilt

$$\mathrm{res}_{a_k} \frac{u'}{u} = n_k.$$

Dies bedeutet, daß u die Nullstellenverteilung N hat.

□

Satz 16.10. *Es seien f und g ganze Funktionen. Dann ist $\mathrm{div} f = \mathrm{div}\, g$ genau dann, wenn eine ganze Funktion h existiert so, daß*

$$f = e^h g.$$

Beweis: Es sei $\eta(z) = f(z)/g(z)$.
Dann ist η eine ganze Funktion ohne Nullstellen. Nach Satz **??** existiert eine ganze Funktion h mit $e^h = \eta$.

□

Beispiele: 1) Sei $f(z) = \sin \pi z$.
Dann hat f einfache Nullstellen in $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin konvergiert

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}$$

absolut und lokal gleichmäßig. Daher können wir im Weierstraßschen Produktsatz $p_k = 0$ wählen. Aus dem Weierstraßschen Produktsatz und Satz 16.10 folgt, daß eine ganze Funktion g_0 existiert so, daß

$$\sin \pi z = e^{g_0(z)} z \prod_{k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}.$$

Um g_0 zu bestimmen, bilden wir die logarithmische Ableitung f'/f beider Seiten. Dies ergibt

$$\pi \cot \pi z = g_0'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}\right).$$

Aus Satz 15.5 folgt $g_0' \equiv 0$. Daher ist $g_0(z)$ konstant. Weiter ist

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi.$$

Daraus folgt $e^{g_0(z)} = \pi$ und wir erhalten

Satz 16.11.

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Für $z = 1/2$ erhält man

$$1 = \sin \pi/2 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k)^2}\right).$$

Daraus ergibt sich die **Wallissche Produktdarstellung** für π:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots$$

2) Durch Vergleich von Partialbruch- und Taylorentwicklung erhält man wichtige Zusammenhänge.
Bekanntlich ist

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}.$$

Die Zahlen B_{2k} sind die Bernoullizahlen. Aus der Gleichung

$$(e^z - 1) \left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}\right) = z$$

kann man die Bernoullizahlen rekursiv berechnen. Insbesondere sind alle B_{2k} rational. Für die ersten Bernoullizahlen erhält man

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Weiter ist

$$\cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i + \frac{2i}{e^{2iz} - 1}$$

und daher

$$
\begin{aligned}
z\cot z &= iz + \frac{2iz}{e^{2iz}-1} \\
&= iz + 1 - \frac{2iz}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} B_{2k} z^{2k}.
$$

Andererseits ist nach Satz 15.5

$$
\pi z \cot \pi z = 1 + z \sum_{k\neq 0} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) = 1 + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}.
$$

Aus

$$
\frac{1}{z^2-k^2} = -\frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2} \right)^j
$$

erhalten wir durch Einsetzen und Vertauschung der Summationsreihenfolge

$$
\begin{aligned}
\pi z \cot \pi z &= 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2} \right)^j \right) \\
&= 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}} \right) z^{2j} \\
&= 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \zeta(2j) z^{2j}.
\end{aligned}
$$

Durch Vergleich mit der Taylorreihe erhalten wir

Satz 16.12. *(Eulersche Relation)*

$$\zeta(2j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}} = (-1)^{j+1} \frac{2^{2j-1}}{(2j)!} B_{2j} \pi^{2j}.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$