

Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben

Prof. Dr. Peter Koepke

Serie 9

Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 32. Es sei $S = \{<, m, u, o\}$ die erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol $<$, einem zweistelligen Funktionssymbol m und einstelligen Funktionssymbolen u und o . Wir betrachten die Menge $\Phi \subseteq L_0^S$, die die Axiome für lineare Ordnungen um die Axiome

- (a) $\forall x (u(x) < x \wedge x < o(x))$
- (b) $\forall x \forall y [x < y \rightarrow (x < m(x, y) \wedge m(x, y) < y)]$

erweitert, und das zugehörige Termmodell \mathcal{T}^Φ .

- (1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\langle |\mathcal{T}^\Phi|, <^{\mathcal{T}^\Phi} \rangle$ keine lineare Ordnung ist.
- (2) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede durch $<^{\mathcal{T}^\Phi}$ linear geordnete Teilmenge Q_0 von $|\mathcal{T}^\Phi|$ eine Teilmenge Q existiert, so dass $Q_0 \subseteq Q \subseteq |\mathcal{T}^\Phi|$ gilt und $\langle Q, <^{\mathcal{T}^\Phi} \upharpoonright (Q \times Q) \rangle$ eine lineare Ordnung ist, die zu $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ isomorph ist.

Aufgabe 33 (6 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) $PA \vdash \forall x [x \equiv 0 \vee \exists y x \equiv y + 1]$.
- (2) $PA \vdash \forall x \forall y x + y \equiv y + x$.
- (3) $PA \vdash \forall x \forall y [y \equiv 0 \vee \exists r \exists s \exists t (x \equiv t \cdot y + r \wedge r + s + 1 \equiv y)]$.

(Tipp: Verwenden Sie den Vollständigkeitssatz).

Aufgabe 34 (4 Punkte). Es sei \mathfrak{M} ein Modell von PA .

- (1) Konstruieren Sie eine Einbettung $\iota : \mathbb{N} \rightarrow |\mathfrak{M}|$ des Standardmodells der Arithmetik in \mathfrak{M} .
- (2) Zeigen Sie, dass die Einbettung ι eindeutig bestimmt ist und ihr Bild abwärts abgeschlossen ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in |\mathfrak{M}|$ mit $\iota(n) = x +^{\mathfrak{M}} y$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(m) = x$.

Aufgabe 35 (4 Punkte). Beweisen Sie, dass die Klasse der Nichtstandardmodelle der Peano-Arithmetik (d.h. die Klasse aller Modelle von PA , die nicht zum Standardmodell der Arithmetik isomorph sind) nicht in der Sprache der Arithmetik $S_{AR} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ axiomatisiert werden kann.

Abgabe: Freitag, den 22. Juni 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.