Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 3	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 8. Gegeben sei eine erststufige Sprache S.

(1) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass für jedes Wort w in S^* höchstens ein Anfangsstück von w existiert, das ein S-Term oder eine S-Formel ist.

(2) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass der Term- und der Formelkalkül für S *eindeutig lesbar* sind.

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine erststufige Sprache S, ein S-Modell $\mathfrak{M}$ sowie S-Formeln φ und ψ. Beweisen Sie die folgenden Äquivalenzen.

(1) $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$.

(2) $\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ oder $\mathfrak{M} \models \psi$.

(3) $\mathfrak{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ zu $\mathfrak{M} \models \psi$ äquivalent ist.

(4) $\mathfrak{M} \models \exists v_n \varphi$ genau dann, wenn ein $a \in |\mathfrak{M}|$ mit $\mathfrak{M}\frac{a}{v_n} \models \varphi$ existiert.

Eine partielle Ordnung $(I, \leq_I)$ ist eine *gerichtete Menge*, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i, j \leq_I k$ existiert.
Ist S eine erststufige Sprache und $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge, so nennen wir

$$(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j \rangle)$$

ein *gerichtetes System von S-Strukturen über* $(I, \leq_I)$, falls die folgenden Aussagen für alle $i, j, k \in I$ gelten.

(1) $\mathfrak{A}_i$ ist eine S-Struktur.

(2) Gilt $i \leq_I j$, so ist $f_{i,j} : |\mathfrak{A}_i| \to |\mathfrak{A}_j|$ eine Einbettung von S-Strukturen.

(3) $f_{i,i} = \mathsf{id}_{|\mathfrak{A}_i|}$ und $i \leq_I j \leq_I k$ impliziert $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$.

Aufgabe 10. Sei $(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j \rangle)$ ein gerichtetes System von S-Strukturen über einer gerichtete Menge $(I, \leq_I)$. Setze

$$D = \{(x, i) \mid i \in I,\ x \in |\mathfrak{A}_i|\}$$

Wir definieren eine Relation $\approx$ auf D durch

$$(x, i) \approx (y, j) \iff \exists k \in I\ [i, j \leq_I k \ \wedge\ f_{i,k}(x) = f_{j,k}(y)].$$

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf D ist.

Für $i \in I$ definieren wir

$$f^i : |\mathfrak{A}_i| \longrightarrow {}^{D}\!/\!\approx;\ x \mapsto [x, i],$$

wobei $[x, i]$ die Äquivalenzklasse von $(x, i) \in D$ bezüglich $\approx$ bezeichnet und ${}^{D}\!/\!\approx$ die Menge aller Äquivalenzklassen ist.

(2) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass $f^i = f^j \circ f_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt.

(3) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = {}^{D}\!/\!\approx$ gibt, so dass alle Abbildungen f^i Einbettungen von S-Strukturen sind. Diese Struktur nennt man den *direkten Limes* des gerichtetens Systems.

(4) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die oben konstruierte Struktur $\mathfrak{A}$ die folgende *universelle Eigenschaft* besitzt und durch sie bis aus auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: ist $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $\langle g^i \mid i \in I\rangle$ ein System von Einbettungen $g^i : |\mathfrak{A}_i| \to |\mathfrak{B}|$, so dass $g^i = g^j \circ f_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Einbettung $f : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ mit $g^i = f \circ f^i$ für alle $i \in I$.

(5) (4 Bonuspunkte) Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und $\mathbf{K}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{C}$, die eine endliche, algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind. Für $K, L \in \mathbf{K}$ mit $K \subseteq L$ definieren wir $\mathfrak{A}_K$ als die kanonische S_K-Struktur mit Trägermenge K und $f_{K,L}$ als die kanonische Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{K}, \subseteq)$ eine gerichtete Menge ist und bestimmen Sie den Teilkörper von $\mathbb{C}$, der zum direkten Limes des so definierten gerichteten Systems isomorph ist.

Abgabe: Freitag, den 04. Mai 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.