Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 6

Aufgabe 26 (6 Punkte)**.** Berechnen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ eine Basis des Unterraums

$$U_t = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 |\ tv_1 - tv_2 + (2t-1)v_3 = 0,\ tv_1 - v_2 + v_3 = 0,$$
$$3tv_1 - (t+2)v_2 + (2t+1)v_3 = 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ und geben Sie $dim(U_t)$ an. Ergänzen Sie die Basis von U_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 27 (6 Punkte)**.** Angenommen V ist ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie für beliebige $a, b, c, d, e \in V$, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$v_1 = a + b + c, \qquad v_2 = 2a + 2b + 2c - d, \qquad v_3 = a - b - e,$$
$$v_4 = 5a + 6b - c + d + e, \qquad v_5 = a - c + 3e, \qquad v_6 = a + b + d + e.$$

Berücksichtigen Sie dazu die Dimensionen von $\mathcal{L}(a, b, c, d, e)$ und $\mathcal{L}(v_1, ..., v_6)$ und denken Sie an die Sätze, die in der Vorlesung über Basen und Dimension gezeigt wurden.

(b) Für beliebige Unterräume $U_1, U_2 \subseteq V$ definieren wir

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 28 (6 Punkte)**.** Angenommen $x \in \mathbb{R}^+$.

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} = \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, indem Sie die Grenzwerte der einzelnen Terme berechnen.

(b) Zeigen Sie: für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(1 + \frac{x}{n})^n \geq \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$ für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie dazu zunächst mit Hilfe von (a), dass Sie für $\epsilon := \frac{1}{2} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} > 0$ ein $n_0 > k$ so groß wählen können dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \frac{x^i}{n^i} - \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}| < \epsilon$ und $\binom{n}{k+1} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} > \epsilon$. Dann sind Sie fast fertig.

Zusammen mit Aufgabe 4 (a) folgt daraus übrigens $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = exp(x)$ und (für $x=1$) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

(c) Finden Sie $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ und $u,v \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n})^n = (\frac{n-a}{n-b})^n(\frac{n-c}{n-d})^n = (1+\frac{u}{n-b})^n(1+\frac{v}{n-d})^n = (1+\frac{u}{n-b})^{n-b}(1+\frac{v}{n-d})^{n-d}(1+\frac{u}{n-b})^b(1+\frac{v}{n-d})^d$ und verwenden Sie das, um $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n})^n$ zu berechnen. Denken Sie daran, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{u}{n-b})^{n-b} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{u}{n})^n$.

Aufgabe 29 (6 Punkte)**.** In der Vorlesung werden einige Eigenschaften der Exponentialfunktion gezeigt, zum Beispiel dass $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist. Verwenden Sie diese Eigenschaften.

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}$ und begründen Sie das.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{-x^2}$ streng monoton fallend ist.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ der Gleichung $e^{ax} \leq e^{x+b}$ in Abhängigkeit von $a, b > 1$.

(d) Begründen Sie anhand der Exponentialreihe, dass $exp(\overline{x}) = \overline{exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{C}$, indem Sie zu jeder Partialsumme s_n die komplex konjugierte Zahl $\overline{s_n}$ bilden und Aufgabe 23 (c) verwenden.

Aufgabe 30 (6 Punkte)**.** Der folgende Grenzwert wurde in der Vorlesung im Beweis einer Eigenschaft der Exponentialfunktion verwendet.

(a) Zeigen Sie $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^2(1+|x|)^{2k}(1+|y|)^{2k}}{k!} = 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Erinnern Sie sich dafür an das Wachstumsverhalten von $k!$ und n^k als Funktionen in k. Sie können verwenden, dass $(k-m)!$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ schneller wächst als n^k, d.h. es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(k-m)! \geq n^k$ für alle $k \geq k_0$.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz, indem Sie das Quotientenkriterium oder das Majorantenkriterium anwenden oder die Summanden durch die Summanden der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{kn}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ nach unten abschätzen.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{8n^3}{3^n}$,

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{5n^2-3n+2}$,

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^6\cdot 2^n}{n^{4n}\cdot n!^5}$.

Abgabe Donnerstag, den 24. November, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung. Bitte notieren Sie auf der ersten Seite Ihrer Abgabe gut lesbar Ihre Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors, heften die Blätter zusammen, und legen sie in die Mappe Ihrer Übungsgruppe. Sie können Ihre Lösungen zusammen mit bis zu zwei anderen Teilnehmern der gleichen Übungsgruppe abgeben.