Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls[1]

(*1930*)

Whitehead und Russell haben bekanntlich die Logik und Mathematik so aufgebaut, daß sie gewisse evidente Sätze als Axiome an die Spitze stellten und aus diesen nach einigen genau formulierten Schlußprinzipien auf rein formalem Wege (d. h. ohne weiter von der Bedeutung der Symbole Gebrauch zu machen) die Sätze der Logik und Mathematik deduzierten. Bei einem solchen Vorgehen erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob das an die Spitze gestellte System von Axiomen und Schlußprinzipien vollständig ist, d. h. wirklich dazu ausreicht, *jeden* logisch-mathematischen Satz zu deduzieren, oder ob vielleicht wahre (und nach anderen Prinzipien eventuell auch beweisbare) Sätze denkbar sind, welche in dem betreffenden System nicht abgeleitet werden können. Für den Bereich der logischen Aussageformeln ist diese Frage in positivem Sinn entschieden, d. h. man hat gezeigt,[2] daß tatsächlich jede richtige Aussageformel aus den in den *Principia mathematica* angegebenen Axiomen folgt. Hier soll dasselbe für einen weiteren Bereich von Formeln, nämlich für die des "engeren Funktionenkalküls",[3] geschehen, d. h. es soll gezeigt werden:

350 | Satz I: *Jede allgemeingültige*[4] *Formel des engeren Funktionenkalküls ist beweisbar.*

Dabei legen wir folgendes Axiomensystem[5] zugrunde:

[1]Einige wertvolle Ratschläge bezüglich der Durchführung verdanke ich Herrn Prof. H. Hahn.

[2]Vgl. *Bernays 1926*.

[3]In Terminologie und Symbolik schließt sich die folgende Arbeit an *Hilbert und Ackermann 1928* an. Danach gehören zum engeren Funktionenkalkül diejenigen logischen Ausdrücke, welche sich aus Aussagevariablen: X, Y, $Z \ldots$ und Funktions- (= Eigenschafts- und Relations-)variablen 1. Typs: $F(x)$, $G(x,y)$, $H(x,y,z) \ldots$ mittels der Operationen $\vee$ (oder), $\overline{}$ (nicht), (x) (für alle), (Ex) (es gibt) aufbauen, wobei die Präfixe (x), (Ex) sich *nur* auf Individuen, *nicht* auf Funktionen beziehen dürfen. Eine solche Formel heißt allgemeingültig (tautologisch), wenn bei jeder Einsetzung bestimmter Aussagen bzw. Funktionen für X, Y, $Z \ldots$ bzw. $F(x)$, $G(x,y) \ldots$ ein wahrer Satz entsteht (z. B.: $(x)[F(x) \vee \overline{F(x)}]$).

[4]Genauer muß es heißen: "in jedem Individuenbereich allgemeingültig", was nach bekannten Sätzen dasselbe besagt wie: "im abzählbaren Individuenbereich allgemeingültig".—Bei Formeln mit freien Individuenvariablen $A(x,y,\ldots,w)$ bedeutet "allgemeingültig" die Allgemeingültigkeit von $(x)(y)\ldots(w)A(x,y,\ldots,w)$ und "erfüllbar" die Erfüllbarkeit von $(Ex)(Ey)\ldots(Ew)A$, so daß ohne Ausnahme gilt: "A ist allgemeingültig" ist gleichbedeutend mit: "$\overline{A}$ ist nicht erfüllbar".

[5]Es stimmt (bis auf das von P. Bernays als überflüssig erwiesene associative principle) mit dem in *Principia mathematica*, I, Nr. 1 und Nr. 10, gegebenen überein.

The completeness of the axioms of the functional calculus of logic[1]

(*1930*)

Whitehead and Russell, as is well known, constructed logic and mathematics by initially taking certain evident propositions as axioms and deriving the theorems of logic and mathematics from these by means of some precisely formulated principles of inference in a purely formal way (that is, without making further use of the meaning of the symbols). Of course, when such a procedure is followed the question at once arises whether the initially postulated system of axioms and principles of inference is complete, that is, whether it actually suffices for the derivation of *every* logico-mathematical proposition, or whether, perhaps, it is conceivable that there are true propositions (which may even be provable by means of other principles) that cannot be derived in the system under consideration. For the formulas of the propositional calculus the question has been settled affirmatively; that is, it has been shown[2] that every correct formula of the propositional calculus does indeed follow from the axioms given in *Principia mathematica*. The same will be done here for a wider realm of formulas, namely those of the "restricted functional calculus";[3] that is, we shall prove

Theorem I. *Every valid*[4] *formula of the restricted functional calculus is provable.*

We lay down the following system of axioms[5] as a basis:

[1]I am indebted to Professor H. Hahn for several valuable suggestions that were of help to me in writing this paper.

[2]See *Bernays 1926*.

[3]In terminology and symbolism this paper follows *Hilbert and Ackermann 1928*. According to that work, the restricted functional calculus contains the logical expressions that are constructed from propositional variables, $X, Y, Z, \ldots$, and functional variables (that is, variables for properties and relations) of type 1, $F(x), G(x,y), H(x,y,z), \ldots$, by means of the operations $\vee$ (or), $\overline{}$ (not), (x) (for all), (Ex) (there exists), with the variable in the quantifiers (x) or (Ex) ranging over individuals *only*, *not* over functions. A formula of this kind is said to be valid (tautological) if a true proposition results from every substitution of specific propositions and functions for $X, Y, Z, \ldots$ and $F(x)$, $G(x,y), \ldots$, respectively (for example, $(x)[F(x) \vee \overline{F(x)}]$).

[4]To be more precise, we should say "valid in every domain of individuals", which, according to well-known theorems, means the same as "valid in the denumerable domain of individuals". For a formula with free individual variables, $A(x,y,\ldots,w)$, "valid" means that $(x)(y)\ldots(w)A(x,y,\ldots,w)$ is valid and "satisfiable" that $(Ex)(Ey)\ldots(Ew)$ $A(x,y,\ldots,w)$ is satisfiable, so that the following holds without exception: "A is valid" is equivalent to "$\overline{A}$ is not satisfiable".

[5]It coincides (except for the associative principle, which P. Bernays proved to be redundant) with that given in *Whitehead and Russell 1910*, *1 and *10.

Undefinierte Grundbegriffe: $\vee$, $\overline{}$, (x). (Daraus lassen sich in bekannter Weise &, $\rightarrow$, $\sim$, (Ex) definieren.)

Formale Axiome:

1. $X \vee X \rightarrow X$,	4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$,
2. $X \rightarrow X \vee Y$,	5. $(x)F(x) \rightarrow F(y)$,
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,	6. $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)$.

Schlußregeln:[6]

1. Das Schlußschema: Aus A und $A \rightarrow B$ darf B geschlossen werden.
2. Die Einsetzungsregel für Aussage- und Funktionsvariable.
3. Aus $A(x)$ darf $(x)A(x)$ geschlossen werden.
4. Individuenvariable (freie oder gebundene) dürfen durch beliebige andere ersetzt werden, soweit dadurch keine Überdeckung der Wirkungsbereiche gleichbezeichneter Variabler eintritt.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, einige abgekürzte Bezeichnungen einzuführen.

(P), (Q), (R) etc. bedeuten irgendwie gebaute Präfixe, also endliche Zeichenreihen der Form: $(x)(Ey)$, $(y)(x)(Ez)(u)$ etc.

Kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ etc. bedeuten n-tupel von Individuenvariablen, d. h. Zeichenreihen der Form: x, y, z; x_2, x_1, x_2, x_3 etc., wobei dieselbe Variable auch mehrmals auftreten kann. Entsprechend sind die Zeichen $(\mathfrak{x}), (E\mathfrak{x})$ etc. zu verstehen. Sollte in $\mathfrak{x}$ eine Variable mehrmals vorkommen, so hat man sie natürlich in $(\mathfrak{x})$, $(E\mathfrak{x})$ nur einmal angeschrieben zu denken.

Ferner benötigen wir eine Reihe von Hilfssätzen, die hier zusammengestellt seien. Die Beweise sind nicht angeführt, da sie teils bekannt, teils leicht zu ergänzen sind:

1. Für jedes n-tupel $\mathfrak{x}$ ist beweisbar:
   (a) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$,
   (b) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$ & $(E\mathfrak{x})G(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})[F(\mathfrak{x})$ & $G(\mathfrak{x})]$,
   (c) $(\mathfrak{x})\overline{F(\mathfrak{x})} \sim \overline{(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})}$.

351 | 2. Unterscheiden sich $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ nur durch die Reihenfolge der Variablen, so ist beweisbar:

$$(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x}).$$

[6]Diese sind bei Russell–Whitehead nicht alle explizit formuliert, werden aber in den Deduktionen fortwährend verwendet.

Undefined primitive notions: $\vee$, $\overline{}$, and (x). (By means of these, &, $\rightarrow$, $\sim$, and (Ex) can be defined in a well-known way.)

Formal axioms:

1. $X \vee X \rightarrow X$,	4. $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$,
2. $X \rightarrow X \vee Y$,	5. $(x)F(x) \rightarrow F(y)$,
3. $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$,	6. $(x)[X \vee F(x)] \rightarrow X \vee (x)F(x)$.

Rules of inference:[6]

1. The inferential schema: From A and $A \rightarrow B$, B may be inferred;
2. The rule of substitution for propositional and functional variables;
3. From $A(x)$, $(x)A(x)$ may be inferred;
4. Individual variables (free or bound) may be replaced by any others, so long as this does not cause overlapping of the scopes of variables denoted by the same sign.

For what follows, it will be expedient to introduce some abbreviated notations.

(P), (Q), (R), and so on stand for prefixes constructed in any way whatever, that is, finite sequences of signs of the form $(x)(Ey)$, $(y)(x)(Ez)(u)$, and the like.

Lower-case German letters, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, and so on, mean n-tuples of individual variables, that is, sequences of signs of the form x, y, z, or x_2, x_1, x_2, x_3, and the like, where the same variable may occur several times. The signs $(\mathfrak{x})$, $(E\mathfrak{x})$, and so on are to be understood accordingly. Should a variable occur several times in $\mathfrak{x}$, we must, of course, think of it as written only once in $(\mathfrak{x})$ or $(E\mathfrak{x})$.

Furthermore we require a number of lemmas, which are collected here. The proofs are not given, since they are in part well known, in part easy to supply.

1. For every n-tuple $\mathfrak{x}$
   (a) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$,
   (b) $(\mathfrak{x})F(\mathfrak{x})$ & $(E\mathfrak{x})G(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x})[F(\mathfrak{x})$ & $G(\mathfrak{x})]$,
   (c) $(\mathfrak{x})\overline{F(\mathfrak{x})} \sim \overline{(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}))}$

are provable.

2. If $\mathfrak{x}$ and $\mathfrak{x}'$ differ only in the order of the variables, then

$$(E\mathfrak{x})F(\mathfrak{x}) \rightarrow (E\mathfrak{x}')F(\mathfrak{x})$$

is provable.

[6]Although Whitehead and Russell use these rules throughout their derivations, they do not formulate all of them explicitly.