Mathematisches Institut der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
13. 12. 2010
Blatt 9

Übungen zur Mengenlehre

1. Zeigen Sie: Ist U ein freier, κ-vollständiger Ultrafilter, so gilt $|x| \geq \kappa$ für alle $x \in U$.

2. Sei X eine Menge, $F \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Zeigen Sie: Genau dann ist F ein κ-vollständiger Ultrafilter, wenn die Abbildung $\mu_F : \mathfrak{P}(X) \to \{0,1\}$ mit $\mu_F^{-1}(1) = F$ auf X ein κ-additives Maß ist.

3. Es sei $[\mathbb{Q}]^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Teilmengen der rationalen Zahlen. Zu $x \in \mathbb{R}$ sei $C_x := \{a \in [\mathbb{Q}]^{<\omega} : |\{q \in a : q < x\}| \text{ ist ungerade}\}$ die Menge aller Elemente von $[\mathbb{Q}]^{<\omega}$, die eine ungerade Anzahl von Elementen unterhalb von x enthalten. Zeigen Sie:
a) $x \neq y$ impliziert $C_x \neq C_y$.
b) Für $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $m \leq n$ ist $\bigcap_{1 \leq i \leq m} C_{x_i} \cap \bigcap_{m < j \leq n} ([\mathbb{Q}]^{<\omega} - C_{x_j}) \neq \emptyset$.

4. a) Folgern Sie aus Aufgabe 3: Es existieren $2^{\aleph_0}$ viele Mengen $\langle A_i : i < 2^{\aleph_0} \rangle$ mit $A_i \subset \omega$ für $i < 2^{\aleph_0}$ so, dass für alle endlichen Folgen $0 \leq i_1 < ... < i_m < ... < i_n < 2^{\aleph_0}$ der Schnitt $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_m} \cap (\omega - A_{i_{m+1}}) \cap ... \cap (\omega - A_{i_n})$ nicht leer ist.
b) Zeigen Sie mithilfe von a), dass es auf ω genau $2^{(2^{\aleph_0})}$ verschiedene Ultrafilter gibt.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Das Banach-Tarski-Paradoxon 2)
Sei K die Einheitssphäre. Für feste Winkel α, β definieren wir: Ist P ein Punkt auf K, so bezeichnen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ die Bilder von x unter der Drehung um α um die x-Achse bzw. um β um die y-Achse im positiven Drehsinn, entsprechend $\alpha^{-1}(x)$, $\beta^{-1}(x)$ die Bilder bei negativem Drehsinn. Sei W die Menge aller endlichen, vollständig gekürzten Wörter über $\{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}\}$ zusammen mit dem leeren Wort 0. Ist $w \in W$, so sei $w(x)$ das Bild von x unter der Hintereinanderausührung der Drehungen gemäß w. Ist $T \subseteq W$, so heißt $Tx := \{y \in K : \exists w \in T(w(x) = y)\}$ der T-Orbit von x. Für $X \subseteq K$, $w \in W$ sei außerdem $wX = \{w \circ x : x \in X\}$.
Wir benutzen folgenden Fakt ohne Beweis: α und β können so gewählt werden, dass für nichtleere, vollständig gekürzte Wörter w_1, w_2 und alle $x \in K$ aus $w_1(x) = w_2(x)$ schon $w_1 = w_2$ folgt.
Seien α und β nun gewählt wie beschrieben. Zeigen Sie:
a) Zu $x \in K$ existieren paarweise disjunkte Mengen $X_1, ..., X_4 \subseteq Wx$ und $w_1, ..., w_4 \in W$, so dass $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} X_i = Wx = w_1X_1 \cup w_2X_2 = w_3X_3 \cup w_4X_4$, wobei $w_1X_1 \cap w_2X_2 = w_3X_3 \cap w_4X_4 = \emptyset$. Folgern Sie: Jeder W-Orbit ist zerlegungsäquivalent zu zwei disjunkten Kopien seiner selbst. (Tipp: Teil 3 der Zusatzaufgabe vom letzten Zettel.)
(6 Punkte)

b) Für $x, y \in K$ ist entweder $Wx = Wy$ oder $Wx \cap Wy = \emptyset$.
(2 Punkte) Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 22. 12. 2010 in der Vorlesung