Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
06. 12. 2010
Blatt 8

Übungen zur Mengenlehre

1. Sei A eine Menge, κ eine Kardinalzahl. Definieren Sie
$[A]^\kappa := \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$, $[A]^{<\kappa} := \{X \subseteq A : |X| < \kappa\}$,
$[A]^{\leq\kappa} := \{X \subseteq A : |X| \leq \kappa\}$.
Zeigen Sie: Sind A und κ unendlich und $\kappa \leq |A|$, so ist $|[A]^\kappa| = |[A]^{\leq\kappa}| = [A]^\kappa$ und ferner $|[A]^{<\kappa}| = |A|^{<\kappa}$.

2. a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \omega$ die Konfinalität der Halbordnung $([\aleph_n]^{\aleph_0}, \subseteq)$.
b) Zeigen Sie, dass die Konfinalität von $([\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq)$ mindestens $\aleph_\omega^+$ ist.

3. Zeigen Sie: Eine Ordinalzahl α ist bezüglich der Ordnungstopologie genau dann kompakt, wenn sie eine Nachfolgerordinalzahl ist.

4. Zeigen Sie ohne Benutzung von Königs Lemma, dass für unendliche Kardinalzahlen stets $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ gilt, indem Sie die Existenz einer Surjektion $f : \kappa \to \kappa^{cf(\kappa)}$ durch Diagonalisierung ad absurdum führen.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Das Banach-Tarski-Paradoxon 1)
Zwei Teilmengen A und B des $\mathbb{R}^3$ heißen zerlegungsäquivalent, geschrieben $A \sim B$, falls endlich viele, paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, ..., A_n \subseteq A$ und abstandstreue Abbildungen (Kompositionen von Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen) $\sigma_1, ..., \sigma_n$ von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ existieren, so dass
$A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$, $B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \sigma_i(A_i)$ und $\sigma_i(A_i) \cap \sigma_j(A_j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Zeigen Sie:

1.) Sei C der Einheitskreis, P ein beliebiger Punkt auf C. Dann ist $C \sim C - \{P\}$.

2.) Sei K die Einheitssphäre, $A \subseteq K$ abzählbar. Dann ist $K \sim K - A$.

Sei nun $\mathbb{F}$ die freie Gruppe mit zwei Erzeugern σ und τ, also die Menge der endlichen Wörter über dem Alphabet $\{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ zusammen mit dem leeren Wort 0, in denen weder τ und τ^{-1} noch σ und σ^{-1} direkt nacheinander auftreten, zusammen mit der Verkettung $\circ$ von Wörtern als Verknüpfung. (Beachten Sie $\tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = \sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 0$ und $x \circ 0 = 0 \circ x = x$.) Für $A \subseteq \mathbb{F}$, $x \in \mathbb{F}$ bezeichne $x \circ A$ die Menge $\{x \circ a : a \in A\}$, wobei die Worte ggf. vollständig zu kürzen sind. Zeigen Sie:

3.) Es existieren paarweise disjunkte Teilmengen $F_1, ...F_4 \subseteq \mathbb{F}$ und Elemente $x_1, ..., x_4 \in \mathbb{F}$ so, dass $F_1 \cup ... \cup F_4 = \mathbb{F} = x_1 \circ F_1 \cup x_2 \circ F_2 = x_3 \circ F_3 \cup x_4 \circ F_4$, wobei $x_1 \circ F_1 \cap x_2 \circ F_2 = x_3 \circ F_3 \cap x_4 \circ F_4 = \emptyset$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 20. 12. 2010 in der Vorlesung