Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
15. 11. 2010
Blatt 5

Übungen zur Mengenlehre

1. Zeigen Sie folgende Aussagen:
(a) Sind x und y Mengen, so gilt $x \in y \rightarrow \mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(y)$.
(b) Ist x eine Menge, so ist $\mathrm{rg}(x) = \sup\{\mathrm{rg}(y) + 1 | y \in x\}$.
(c) Sei R eine binäre Relation auf einer Menge X. Dann ist R fundiert genau dann, wenn es eine Funktion $\mathrm{rg}' : x \rightarrow \mathrm{Ord}$ gibt mit $aRb \rightarrow \mathrm{rg}'(x) < \mathrm{rg}'(y)$ für alle a, b aus X.

2. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Zeigen Sie folgende Aussagen:
(a) $[0, 1] \approx]0, 1[\approx \mathbb{R}$
(b) $[0, 1]^{\omega} \approx [0, 1]$
(c) $\mathfrak{P}(\omega) \approx [0, 1]$
(Tipp: Fassen Sie Mengen natürlicher Zahlen als Binärfolgen auf. Vorsicht: Achten Sie auf die Eindeutigkeit der Zuordnung!)

3. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(1) AC
(2) Für jede Menge X und jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf X existiert eine Menge $T \subseteq X$, die jede $\sim$-Äquivalenzklasse in genau einem Punkt schneidet.

4. Geben Sie x und y an, so dass folgendes gilt:
(1) x ist abzählbar, y ist eine überabzählbare Familie von Teilmengen von x
(2) Für a, b aus y ist $a \cap b$ endlich.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei M die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ferner $<$ eine Wohlordnung auf M. Für $x \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ sei f_x die Einschränkung von f auf das Intervall $]-\infty, x[$, $M_x = \{f_x | f \in M\}$. Für $t \in M_x$ sei ferner g_t das $<$-kleinste f mit $f_x = t$. Definiere eine Funktion $H : \bigcup\{M_x | \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $H(t) = g_t(x)$. Zeige: Für jedes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $H(f_x) = f(x)$ an allen bis auf höchstens abzählbar vielen Stellen. H 'rät' also jede Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an fast allen Stellen richtig aufgrund ihres Verlaufs bis zu dieser Stelle. (Tipp: Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbb{R} | H(f_x) \neq f(x)\}$ keine unendlichen absteigenden Folgen in der üblichen Ordnung von $\mathbb{R}$ enthält.)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 22. 11. 2010 in der Vorlesung