Mathematisches Institut der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
08. 11. 2010
Blatt 4

Übungen zur Mengenlehre

1. (a) Zeigen Sie: Sind $(x, <_x)$, $(y, <_y)$ wohlgeordnete Mengen, so ist ihr lexikographisches Produkt $(x \times y, <_{lex})$ ebenfalls wohlgeordnet.

(b) Zeigen Sie: Sind α und β Ordinalzahlen, so ist $\alpha + \beta$ der Ordnungstyp der Summe und $\alpha{*}\beta$ der Ordnungstyp des lexikographischen Produktes von $(\alpha, \in)$ und $(\beta, \in)$.

2. (a) Gilt für Ordinalzahlen α, β und γ stets $(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha{*}\gamma + \beta{*}\gamma$?

(b) Beweisen Sie: Jedes Ordinalzahl β ist auf genau eine Weise in der Form $\beta = \omega^2{*}\alpha + \omega{*}m + n$ darstellbar, wobei α Ordinalzahl ist und m, n natürliche Zahlen sind.

3. Beweisen Sie, dass für jede fundierte Relation R auf einer Menge A, jede endliche Folge $\vec{v}$ von Elementen von A und jede $\in$-Formel $\phi(x, \vec{v})$ gilt:
$\forall x \in A(\forall y(yRx \rightarrow \phi(y, \vec{v})) \rightarrow \phi(x, \vec{v})) \rightarrow \forall x \in A\phi(x, \vec{v})$.

4. Sei Un' das Axiom: Es existiert eine nichtleere Menge X, so dass für jedes $x \in X$ auch $x \cup \{x\} \in X$ gilt. Eine solche Menge heisst schwach induktiv. Zeigen Sie (ohne Benutzung von Un), dass aus Un' bereits Un folgt.
(Tipp: Beweisen Sie zunächst, dass es für ein solches X eine Injektion $e : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit $e(n') = e(n) \cup \{e(n)\}$ gibt.)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 15. 11. 2010 in der Vorlesung