Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
20. 12. 2010
Blatt 10

Übungen zur Mengenlehre

1. Sei X eine Menge. Zu $S \subseteq \mathfrak{P}(X)$ sei $S^* := \{X - A : A \in S\}$. Zeige: $F \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist genau dann ein Filter, wenn F^* ein Ideal ist.

2. Sei $\kappa > \aleph_0$ eine Kardinalzahl, μ ein nichttriviales, σ-additives Maß auf κ. Zeige: Ist $\lambda > \kappa$ eine Kardinalzahl, so existiert auch auf λ ein nichttriviales, σ-additives Maß.

3. Sei X eine Menge, $\langle F_\iota : \iota < \lambda \rangle$ eine aufsteigende Folge echter, freier Filter auf X, d.h. für $\iota_1 < \iota_2$ ist $F_{\iota_1} \subseteq F_{\iota_2}$. Zeigen Sie, dass auch $F := \bigcup_{\iota<\lambda} F_\iota$ ein echter, freier Filter auf X ist.

4. Sei X eine endliche Menge.
a) Finde alle Filter F auf X. Wie viele davon gibt es?
b) Finde alle Maße $\mu : \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}$ auf X.

Zusatzaufgabe für Interessierte: (Das Banach-Tarski-Paradoxon 3)
Korrektur: In Teil a) auf dem letzten Zettel sollte es statt $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} X_i = Wx = w_1 X_1 \cup w_2 X_2 = w_3 X_3 \cup w_4 X_4$ heißen: $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} X_i = Wx - \{x\}$ und $Wx = w_1 X_1 \cup w_2 X_2 = w_3 X_3 \cup w_4 X_4$.
Wir benutzen nun weiter die Bezeichnungen und Definitionen aus den letzten beiden Zusatzaufgaben.
a) Zeigen Sie: Die Relation $\sim$, die wir Zerlegungsäquivalenz genannt haben, ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^3)$.
(2 Punkte)

Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass für jedes $w \in W$, das nicht das leere Wort ist, $|\{x \in K : w(x) = x\}| = 2$ ist, d.h. zu jedem $w \in W - \{0\}$ genau zwei Fixpunkte auf K existieren. Sei A die Menge aller solchen Fixpunkte zu Elementen von $W - \{0\}$.
b) Zeigen Sie: $K \sim K - A$. (Tipp: Teil 2 der Zusatzaufgabe von Zettel 8).
(2 Punkte)

c) Zeigen Sie: Die Menge $K - A$ ist zerlegungsäquivalent zu zwei disjunkten Kopien ihrer selbst. (Tipp: Benutzen Sie das Auswahlaxiom, um ein Repräsentantensystem für die $W - \{0\}$-Orbits auf $K - A$ zu wählen und verwenden Sie Teil a) der letzten Zusatzaufgabe.)
(4 Punkte)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 12. 01. 2011 in der Vorlesung